Exercice 1

a) Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. Si U contient le disque fermé $D = \overline{D(a,r)}$, rappeler la formule de Cauchy exprimant $f(w)$ pour $w \in D(a,r)$ comme une intégrale curviligne sur le cercle $C(a,r)$, et la définition de cette intégrale curviligne. Comment peut-on démontrer cette formule ?

b) En déduire que f est développable en série entière convergente dans $D(a,r)$.

c) Montrer que si f n'est pas constante au voisinage de a, il existe un entier $m \geq 1$ et une fonction g holomorphe définie sur un voisinage V de a tels que $f(z) = f(a) + g(z)^m$ dans V et $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$.

d) En déduire que si U est connexe, toute fonction holomorphe non constante $f : U \to \mathbb{C}$ est *ouverte* : l'image de tout ouvert de U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

e) En déduire que si U est connexe et si l'une des fonctions $|f|$, $\mathrm{Re}(f)$ atteint son supremum en un point de U, elle est constante ("principe du maximum").

f) Montrer que si $f'(a) = 0$, f n'est pas injective au voisinage de a.

g) En déduire que si f est injective, son inverse $f^{-1} : f(U) \to U$ est holomorphe (f est un "biholomorphisme", ou difféomorphisme holomorphe de U vers $f(U)$).

h) Si on considère f comme application différentiable entre ouverts de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, que vaut $\det Df(a)$?

i) Montrer pour tout $b \in \mathbb{C}$ que l'ensemble $f^{-1}(b)$ est discret dans U ("principe des zéros isolés").

Exercice 2

a) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $|f(z)| \leq C(1+|z|)^n$, $C > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est un polynôme complexe de degré au plus n.

b) Déduire du cas $n = 0$ de la question précédente que tout polynôme complexe non constant a une racine ("théorème fondamental de l'algèbre").

Exercice 3

On rappelle le "principe des singularités inexistantes" : si $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et bornée au voisinage de $a \in U$, elle se prolonge en une fonction holomorphe sur U.

a) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe et *propre*, i.e. telle que l'image réciproque de tout compact est compacte. Montrer que la fonction $g(z) = 1/f(1/z)$ est holomorphe et bornée dans un disque épointé $D(0,r) \setminus \{0\}$, pour $r > 0$ assez petit.

b) En déduire que f est un polynôme complexe.

c) En déduire que tout biholomorphisme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de la forme $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Exercice 4 On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

a) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$. Montrer que l'on peut écrire $f(z) = zg(z)$, pour une fonction holomorphe $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Que vaut $g(0)$?

b) En utilisant l'exercice 1, en déduire le *lemme de Schwarz* : on a $|f'(0)| \leq 1$, et s'il y a égalité, $f(z) = \lambda z$ pour un nombre complexe λ de module 1.

c) Soit a un point de $\mathbb{D}$. Vérifier que $z \mapsto (z-a)/(1-\overline{a}z)$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$, d'inverse holomorphe (un "biholomorphisme").

d) En déduire que tout biholomorphisme $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est de la forme $\varphi(z) = \lambda(z-a)/(1-\overline{a}z)$, avec $|\lambda| = 1$ et $a \in \mathbb{D}$.

e) Montrer que l'application $z \mapsto (z-i)/(z+i)$ définit un biholomorphisme du demi-plan supérieur $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ vers $\mathbb{D}$, et en déduire que les biholomorphismes de H vers lui-même sont les homographies $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ avec a, b, c, d réels et $ad - bc = 1$.

Exercice 5 Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

a) Exprimer la projection stéréographique φ_+ de $U_+ = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ vers le plan $x_3 = 0$, depuis le pôle $\{(0,0,1)\}$. Idem pour φ_- de $U_- = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ vers le plan $x_3 = 0$. On identifie ce plan à $\mathbb{C}$ par $x_1 + ix_2$.

b) On considère les cartes $\psi_+ = \overline{\varphi_+} : U_+ \to \mathbb{C}$, $\psi_- = \varphi_- : U_- \to \mathbb{C}$. Vérifier que dans $U_+ \cap U_-$, le produit $\psi_+\psi_-$ est constant égal à 1, et en déduire que le changement de carte $\psi_- \circ \psi_+^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est holomorphe. Ces cartes munissent $\mathbb{S}^2$ d'une structure de *surface de Riemann*, la "sphère de Riemann".

c) On identifie $\mathbb{S}^2$ à $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, avec les coordonnées holomorphes z dans $\mathbb{C} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ et $w = 1/z$ dans $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Montrer que toute fonction holomorphe $\widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est constante.

d) Montrer que toute homographie $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ définit un biholomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}}$.

e) Inversement, montrer que tout biholomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une telle homographie, et on peut supposer $ad - bc = 1$ (considérer l'image de ∞).