ÉNS de Lyon
2018-2019

Agrégation
Option C

TD Polynômes

Exercice 1 (Coût de l'évaluation d'un polynôme) — Soit A un anneau commutatif unitaire, soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$ et soit $x \in A$.

Quel est le coût, en termes d'opérations dans A, du calcul de $P(x)$ par :

1. la méthode naïve, qui consiste à évaluer les $a_k x^k$ puis à les additionner ?

2. la méthode de Hörner, qui consiste à écrire

$$P(X) = a_0 + X(a_1 + X(a_2 + \cdots (a_{n-1} + a_n X)))?$$

Exercice 2 (Polynômes à coefficients entiers) — Estimer le coût du calcul de la somme et du produit de deux polynômes $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ en fonction de leurs degrés et d'une borne uniforme M de la valeur absolue de leurs coefficients.

Exercice 3 (Euclide pour les polynômes) — Soit K un corps. Soient $P, Q \in K[X]$ deux polynômes de degrés respectifs n, m. Les coûts mentionnés dans cet exercice sont à exprimer en nombre d'opérations dans K.

1. Écrire un algorithme effectuant la division euclidienne de P par Q puis déterminer son coût.

2. Écrire un algorithme renvoyant le pgcd de P et Q, puis déterminer son coût.

3. Écrire un algorithme renvoyant le pgcd D de P et Q ainsi qu'une paire de polynômes (U, V) telle que $UP + VQ = D$, puis en estimer le coût.

4. En supposant que Q est premier avec P, estimer le coût du calcul de l'inverse de Q dans l'anneau $K[X]/(P)$.

On dispose de méthodes directes qui permettent de borner le module des racines d'un polynôme à l'aide de ses coefficients. Nous en présentons ici deux : la première est très élémentaire, et la seconde est connue sous le nom de *borne de Mignotte* (ou de *théorème de Landau-Mignotte*).

Exercice 4 (Majoration du module des racines) — Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. On pose $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

1. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de la forme $Q(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_j X^j - c_{j-1}X^{j-1} \cdots - c_0$ avec $c_0, \ldots, c_{n-1} \geq 0$, $1 \leq j \leq n$ et $(c_0, \ldots, c_{j-1}) \neq (0, \ldots, 0)$. Montrer que Q possède une unique racine strictement positive.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Soit $r > 0$ tel que $r^n \geq |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0|$. Montrer que $|z| \leq r$.

3. Montrer que $|z| \leq \max\Big(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\Big)$.

4. Montrer que $|z| < 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$.

5. En supposant $a_0 \neq 0$, comment obtenir une minoration du module des racines de P ?

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{C}[X]$, on rappelle que l'on peut lui associer les quantités suivantes :

$$\|P\|_\infty := \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \ ; \ \|P\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \ ; \ \|P\|_1 := \sum_{k=0}^{n} |a_k| \ .$$

En outre, si l'on a $P(X) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$, on pose aussi $M(P) := |a_n| \prod_{k=1}^{n} \max(1, |z_k|)$.

Exercice 5 (Quelques résultats préliminaires) —

1. Vérifier que pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $M(PQ) = M(P)M(Q)$.

2. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout élément $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\|(X - z)P(X)\|_2 = \|(\bar{z}X - 1)P(X)\|_2 \ .$$

Exercice 6 (Théorème de Landau et borne de Mignotte) —
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un diviseur de P de degré $m \geq 1$.

1. Démontrer que l'on a $M(P) \leq \|P\|_2$.

2. Montrer ensuite que l'on dispose des inégalités suivantes :

$$\|Q\|_\infty \leq \|Q\|_1 \leq 2^m M(Q) \leq \left|\frac{b_m}{a_n}\right| 2^m \|P\|_2 \ .$$

3. En déduire que si P et Q sont tous deux à coefficients entiers avec Q divisant P dans $\mathbb{Z}[X]$, alors on a

$$\|Q\|_1 \leq 2^{\deg Q} \|P\|_2 \ .$$

En quoi cette inégalité peut-elle être utile ?