ÉNS de Lyon | Agrégation
2018-2019 | Option C

TP Résultants

Exercice 1 — Formule de Héron — Soit ABC un triangle, avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. En utilisant Sage, montrer la formule de Héron

$$S^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}$$

où S est l'aire du triangle. On introduira le pied H de la hauteur issue de A, les distances $x = AH$ et $y = BH$ et on écrira trois équations reliant S, x, y à a, b, c.

Exercice 2 — Courbes paramétrées — On considère la courbe paramétrée $x(t) = t(t^2-1)^2$, $y(t) = t^2+1$.

1. Tracer cette courbe paramétrée.
2. En donner une équation cartésienne, et tracer la courbe à l'aide de cette équation.
3. Obtient-on des points surnuméraires ?
4. Comparer les deux courbes en zoomant autour du point $(0,2)$. Quelle méthode (paramétrique ou implicite) permet de tracer la courbe avec le plus de précision le plus rapidement ? Pourquoi ce point particulier est-il problématique ?
5. Mêmes questions avec la cardioïde, d'équation paramétrique $x(\theta) = \cos\theta(1+\cos\theta)$, $y(\theta) = \sin\theta(1+\cos\theta)$ (on commencera par en trouver une paramétrisation rationnelle).

Exercice 3 — Intersection de courbes planes — On considère les courbes planes réelles $C : xy = 4$ et $C' : y^2 = (x-3)(x^2-16)$.

1. Tracer les deux courbes sur un même graphique (avec des couleurs différentes).
2. Donner une équation de la projection de $C \cap C'$ sur l'axe des x. La factoriser sur $\mathbb{R}$. Combien de points trouve-t-on ? Combien en aurait-on attendu ?
3. L'ensemble $C \cap C'$ rencontre-t-il la droite $y = -2x+1$?

Exercice 4 — Calculer l'intersection des courbes planes C et C' dans les cas suivants :

1. $C : y^2 = x^3 - x$ et $C' : (x-1)^2 + y^2 = 1$.
2. $C : y^2 = x^3 - x$ et $C' : x^2 = y^3 - y$.

Dans chacun des cas, interpréter le nombre de points d'intersection.

Exercice 5 — Intersection de surfaces — Considérons le point $M = (2,0,0) \in \mathbb{R}^3$ et soit S la sphère de centre O passant par M. Soit C le cylindre d'axe (Oz) et de base le cercle de diamètre $[OM]$ dans le plan (Oxy).

1. Déterminer des équations cartésiennes pour la courbe $X = C \cap S$.
2. Déterminer les projections orthogonales de X sur les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).
3. Faire de même pour l'intersection de C avec le cylindre C' de centre O, de rayon 1 et d'axe (Oy).

Exercice 6 — Soit $C : f(x, y) = 0$ une courbe algébrique plane réelle.

1. À l'aide de résultants, montrer que l'ensemble X_r des points de $\mathbb{R}^2$ situés à une distance fixée r de C est (inclus dans) une courbe algébrique.
2. En donner une équation implicite dans le cas $C : x^2 + 2y^2 = 1$ avec $r = 1$.

Exercice 7 — Résoudre le système polynomial suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 302 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3060. \end{cases}$$

Exercice 8 — On considère le polynôme $P(X) = X^4 + X + 1$, et on note $(a_i)_{1 \le i \le 4}$ ses racines. En utilisant le résultant, calculer le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^{4}(X - a_i^3)$.

Exercice 9 — Pour un entier $n \ge 1$, on considère l'entier algébrique $z_n = \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}$. Écrire un algorithme calculant le polynôme minimal de z_n sur $\mathbb{Q}$. Expérimentalement, que peut-on dire du degré de l'entier algébrique z_n ?