Résultant
22/01/2021

<u>Notations</u> A anneau commutatif

$A[X]_{\leq n}$ polynômes de degré $\leq n$

<u>Déf</u> Soit $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in A[X]_{\leq m}$

et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in A[X]_{\leq n}$

Le résultant de P et Q (en degrés m et n), noté $\mathrm{Res}_{m,n}(P,Q)$ est le déterminant de la matrice de Sylvester

$$\mathrm{Syl}_{m,n}(P,Q) = \begin{pmatrix} a_m & \cdots & a_0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a_m & \cdots & a_0 \\ b_n & \cdots & b_0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & b_n & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ lignes} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ lignes} \end{array}$$

$$\in M_{m+n}(A)$$

$\mathrm{Res}_{m,n}(P,Q) \in A$

<u>Prop</u> Soit K un corps, $P, Q \in K[X]$, $\deg(P) = m$, $\deg(Q) = n$
Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $\mathrm{Res}_{m,n}(P,Q) = 0$
(2) P et Q ne sont pas premiers entre eux dans $K[X]$
(3) P et Q ont une racine commune dans $\overline{K}$ (clôture alg. de K)

<u>Dém</u> (2) $\Leftrightarrow$ (3) ok (exo)

$(1) \Leftrightarrow (2)$ On introduit l'application linéaire

$$\varphi : K[X]_{\leq n-1} \times K[X]_{\leq m-1} \longrightarrow K[X]_{\leq m+n-1}$$
$$(U, V) \longmapsto PU + QV$$

On vérifie que $Syl_{m,n}(P,Q)$ est la transposée de la matrice de φ dans les bases suivantes :

Au départ $(X^{n-1},0), (X^{n-2},0), \dots, (1,0), (0,X^{m-1}), \dots, (0,X), (0,1)$

À l'arrivée $(X^{m+n-1}, X^{m+n-2}, \dots, X, 1)$

Donc : $\mathrm{Res}(P,Q) = 0 \Leftrightarrow \varphi$ n'est pas bijective

$(1) \Rightarrow (2)$ par contraposée

Supposons $(P,Q) = 1$. Montrons que φ est injective

Soit $U \in K[X]_{\leq n-1}$, $V \in K[X]_{\leq m-1}$ tels que $PU + QV = 0$

Alors $Q \mid U$ et $P \mid V$, donc $U = 0$ et $V = 0$

$(2) \Rightarrow (1)$ Supposons $(P,Q) \neq 1$

Alors $1 \notin \mathrm{im}(\varphi)$, donc φ n'est pas surjective,

donc $\mathrm{Res}(P,Q) = 0$. $\square$

Rq. D'après la définition, $\mathrm{Res}_{m,n}(P,Q)$ est un polynôme à coefficients entiers en les a_i et les b_j.

Conséquence Soit $\psi : A \to B$ un morphisme d'anneaux

On note $\psi(P), \psi(Q) \in B[X]$ les polynômes obtenus en appliquant ψ à chacun des coefficients de P et Q.

(ψ induit $A[X] \to B[X]$ morphisme d'anneaux)

Alors :

$$\mathrm{Res}_{m,n}(\psi(P), \psi(Q)) = \psi(\mathrm{Res}_{m,n}(P,Q))$$

Cas particulier : $A = K[T]$, $B = K$, $t \in K$

$$\psi_t : K[T] \to K \quad \text{évaluation en } t$$
$$F \mapsto F(t)$$

$P, Q \in K[T, X]$ $\qquad \psi_t(P) = P(t, X)$, $\psi_t(Q) = Q(t, X)$

$\deg_X(P) \leq m$, $\deg_X(Q) \leq n$

Alors :

$$\mathrm{Res}_X(P, Q)(t) = \mathrm{Res}_X(P(t, X), Q(t, X))$$

<u>Application</u> Intersection de courbes planes

K corps ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$P, Q \in K[X, Y]$

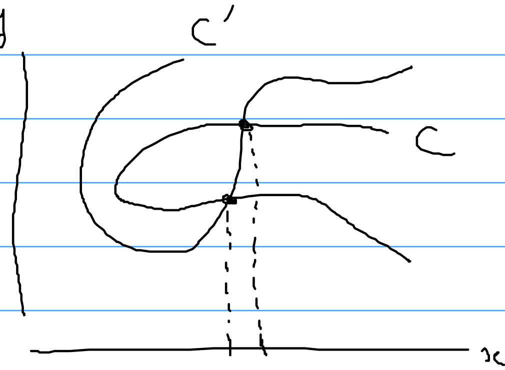
$C = \{(x, y) \in K^2, P(x, y) = 0\}$

$C' = \{(x, y) \in K^2, Q(x, y) = 0\}$

<u>But</u> : déterminer $C \cap C'$

Soit $\pi : K^2 \longrightarrow K$

$(x, y) \longmapsto x$



$$\pi(C \cap C') = \{x \in K, \exists y \in K, P(x, y) = Q(x, y) = 0\}$$
$$\subset \{x \in K, \mathrm{Res}_Y(P, Q)(x) = 0\}$$
$$= \{\text{racines de } \mathrm{Res}_Y(P, Q) \text{ dans } K\}$$

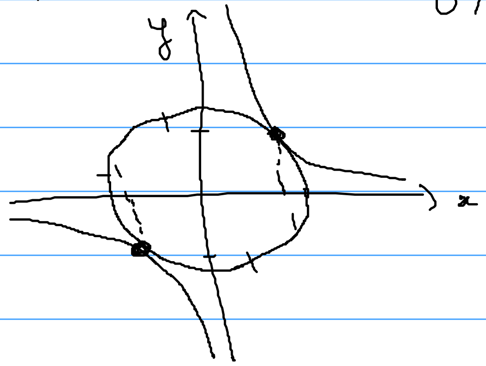
<u>Exo</u> $C : xy = 1$ $\qquad C' : x^2 + y^2 = 2$

Déterminer $C \cap C'$ dans $\mathbb{R}^2$.

$P = XY - 1$ $\qquad \deg_Y(P) = 1$

$Q = Y^2 + X^2 - 2$ $\qquad \deg_Y(Q) = 2$

$$\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 1 & 0 & X^2 - 2 \end{vmatrix} = (X^2 - 1)^2$$



<u>Exo</u> Trouver les points d'intersection à coordonnées rationnelles de $E : y^2 + y = x^3 - x$ et C cercle de centre $(0, 1)$ et rayon $\sqrt{5}$.

$\alpha_i \in A$

__Prop__ Si $P = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_m)$ et $Q \in A[X]_{\leq n}$

$\mathrm{Res}_{m,n}(P,Q) = \prod_{i=1}^{m} Q(\alpha_i)$

En particulier, si $Q = (X-\beta_1)\cdots(X-\beta_n)$ avec $\beta_i \in A$

alors $\mathrm{Res}_{m,n}(P,Q) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i - \beta_j)$

Autre application : courbes paramétrées.

Soit $C : \begin{cases} x(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)} \\ y(t) = \dfrac{R(t)}{S(t)} \end{cases}$ $\quad P, Q, R, S \in \mathbb{R}[T]$

But : trouver une équation cartésienne de C

$(x,y) \in C \iff \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{\text{pôles de } Q \text{ et } S\},\ \begin{cases} Q(t)x - P(t) = 0 \\ S(t)y - R(t) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $xQ(T) - P(T)$ et $yS(T) - R(T)$ ont une racine commune (dans $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \mathrm{Res}_T(xQ - P, yS - R) = 0$

Posons $R = \mathrm{Res}_T(XQ(T) - P(T), YS(T) - R(T)) \in \mathbb{R}[X,Y]$

$(x,y) \in C \Rightarrow R(x,y) = 0$

Donc $C \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ R(x,y) = 0\}$

Il n'y a pas nécessairement égalité.

__Ex__ Équation cartésienne de $C : \begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

$R = \mathrm{Res}_T\left(X(T^2+1) - 2T,\ Y(T^2+1) - 1 + T^2\right)$

$= \begin{vmatrix} X & -2 & X & 0 \\ 0 & X & -2 & X \\ Y+1 & 0 & Y-1 & 0 \\ 0 & Y+1 & 0 & Y-1 \end{vmatrix}$ $\quad C_4 \leftarrow C_4 - C_2$

$= 4(X^2 + Y^2 - 1)$

$C = \{x^2+y^2=1\} \setminus \{(0,-1)\}$

Discriminant

Def. Soit $P \in K[X]$ de degré n. $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$$\mathrm{Disc}(P) = \frac{1}{a_n} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{Res}_{n,n-1}(P, P') \in K$$

Prop Si $P = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ dans une extension K' de K, alors

$$\mathrm{Disc}(P) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \in K$$

Dém Par la proposition précédente $\mathrm{Disc}(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} P'(\alpha_i)$

Par Leibnitz, $P'(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\alpha_i - \alpha_k)}_{=0 \text{ si } j \neq i} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_i - \alpha_k$

$$\longrightarrow \mathrm{Disc}(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i - \alpha_j = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad \square$$

Prop $\mathrm{Disc}(P) = 0 \iff \mathrm{pgcd}(P, P') \neq 1$

$\iff$ P et P' ont une racine commune dans $\overline{K}$

$\iff$ P a une racine double dans $\overline{K}$

Exo Calculer $\mathrm{disc}(aX^2 + bX + c)$ et $\mathrm{disc}(X^3 + pX + q)$