ÉNS de Lyon — Cours d'algèbre
M2 FEADéP — 2020–2021

TD Structures quotients

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels considérés sont sur un corps fixé k.

Exercice 1 — Soit E un espace vectoriel et F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $\pi_i \colon E \to E/F_i$ l'application canonique. On définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f \colon E &\to (E/F_1) \times (E/F_2) \\ x &\mapsto (\pi_1(x), \pi_2(x)). \end{aligned}$$

À quelle condition f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2 — Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On note $\pi \colon E \to E/F$ l'application canonique. Soit S un sous-espace vectoriel de E. Monter que S est un supplémentaire de F dans E si et seulement si $\pi|_S \colon S \to E/F$ est un isomorphisme.

Exercice 3 — Soient E et E' des espaces vectoriels, et soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $\pi \colon E \to E/F$ l'application canonique.

1. Montrer que l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(E/F, E') &\to \mathrm{Hom}(E, E') \\ f &\mapsto f \circ \pi \end{aligned}$$

   est injective, et décrire son image.
2. Déduire de la question précédente une description du dual de E/F.
3. Plus généralement, considérons deux groupes abéliens G, G', et un sous-groupe H de G. Montrer que le groupe abélien $\mathrm{Hom}(G/H, G')$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(G, G')$, que l'on décrira explicitement.

Exercice 4 — Le but de cet exercice est de déterminer le groupe $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, où $m, n \geq 1$ sont des entiers.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. En utilisant l'exercice 3, obtenir une première description de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
3. Soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $mx = 0$ si et seulement si $dx = 0$, avec $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$.
4. Conclure.

Exercice 5 — Deuxième théorème d'isomorphisme —
Soit E un espace vectoriel, et F, G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Construire un isomorphisme d'espaces vectoriels $(F+G)/G \cong F/(F \cap G)$.
2. Plus généralement, considérons un groupe G, un sous-groupe distingué N de G, et un sous-groupe H de G. Montrer les assertions suivantes :
   (a) HN est un sous-groupe de G.
   (b) $H \cap N$ est un sous-groupe distingué de H.
3. Construire un isomorphisme de groupes $(HN)/N \cong H/(H \cap N)$.

Exercice 6 — Troisième théorème d'isomorphisme —

Soit E un espace vectoriel, et F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que $G \subset F$.

1. Montrer que F/G s'identifie à un sous-espace vectoriel de E/G.
2. Construire un isomorphisme d'espaces vectoriels $(E/G)/(F/G) \cong E/F$.
3. Plus généralement, considérons un groupe G et des sous-groupes distingués M, N de G tels que $M \subset N$. Construire un isomorphisme de groupes $(G/M)/(N/M) \cong G/N$.

Exercice 7 — Quotients du groupe symétrique —

Le but de cet exercice est de déterminer les quotients abéliens du groupe symétrique. Soit G un groupe abélien. On suppose que G est isomorphe à un quotient $\mathfrak{S}_n/N$, où N est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que tout élément g de G vérifie $g^2 = 1$.
2. Montrer que G est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.