ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2020–2021

TD Dualité

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels considérés sont sur un corps fixé k.

Exercice 1 — On considère $E = k[X]$ muni de la base $(e_i)_{i\geq 0}$ définie par $e_i = X^i$. Soit e_i^* l'unique forme linéaire sur E telle que $e_i^*(e_j) = 0$ pour $j \neq i$, et $e_i^*(e_i) = 1$.

1. Montrer que la famille $(e_i^*)_{i\geq 0}$ est libre.
2. Exhiber une forme linéaire sur E qui n'est pas combinaison linéaire des e_i^*.

À partir de maintenant, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Exercice 2 — Soit E un espace vectoriel. On considère l'application $\iota \colon E \to E^{**}$ définie par $\iota(x) = (\lambda \mapsto \lambda(x))$.

1. Montrer que ι est un isomorphisme (on pourra montrer l'injectivité).
2. En déduire que l'accouplement $E \times E^* \to k$ est parfait.
3. Soit $n = \dim E$. Montrer que l'application $e = (e_1, \dots, e_n) \mapsto e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une bijection de l'ensemble des bases de E sur l'ensemble des bases de E^*.

Exercice 3 — Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times W \to k$ un accouplement parfait.

1. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de V. Montrer :
   (a) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
   (b) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$;
   (c) $(F^\perp)^\perp = F$;

Exercice 4 — Soit E un espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel de E. On note $i \colon F \to E$ l'inclusion, et $\pi \colon E \to E/F$ l'application canonique.

1. Vérifier que pour tout $\lambda \in E^*$, la forme linéaire $i^*(\lambda)$ est la restriction de λ à F.
2. Montrer que i^* induit un isomorphisme $E^*/F^\perp \cong F^*$.
3. En déduire $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
4. Montrer que π^* induit un isomorphisme $(E/F)^* \cong F^\perp$.
5. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.

Exercice 5 — Soit $f \colon V \to W$ une application linéaire. Montrer :

1. $(\mathrm{im}\, f)^\perp = \ker f^*$;

2. $(\ker f)^\perp = \operatorname{im} f^*$.
3. Montrer que f est injective (resp. surjective) si et seulement si f^* est surjective (resp. injective).

Exercice 6 — Soient V, W des espaces vectoriels, et $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Soit v une base de V, et w une base de W. Montrer que

$$\operatorname{Mat}_{w^*,v^*}(f^*) = {}^t\operatorname{Mat}_{v,w}(f).$$

Exercice 7 —

1. Soient λ et μ des formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'elles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.
2. Montrer que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire sur E.

Exercice 8 — Soit F un sous-espace vectoriel de k^n. Supposons connue une famille génératrice de F. Comment obtenir un système d'équations définissant F ?

Exercice 9 — Soit E un espace vectoriel, et λ, μ des formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\lambda(x)\mu(x) \neq 0$.

Exercice 10 —

1. Montrer que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon M_n(k) \times M_n(k) \to k$$

définie par $\langle M, M' \rangle = \operatorname{Tr}(MM')$ est un accouplement parfait.

2. On suppose k de caractéristique $\neq 2$. Soit S_n (resp. A_n) le sous-espace de $M_n(k)$ formé des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $S_n^\perp = A_n$ et $A_n^\perp = S_n$.