ÉNS de Lyon Cours d'algèbre
M2 FEADéP 2020–2021

TD Algèbre linéaire

Soit k un corps.

Exercice 1 — Générateurs de $\mathrm{SL}_n(k)$ — Le but de cet exercice est de montrer que le groupe $\mathrm{SL}_n(k)$ est engendré par les matrices de transvection.

1. Montrer $D_i(\lambda)T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda\mu)D_i(\lambda)$ et $P_{(ij)} = T_{j,i}(-1)T_{i,j}(1)T_{j,i}(-1)D_i(-1)$.
2. En déduire que toute matrice de $\mathrm{SL}_n(k)$ s'écrit sous la forme $A_1 \dots A_r B_1 \dots B_s$ où les A_i sont des matrices de transvection, et les B_j des matrices de dilatation.
3. On suppose ici $n = 2$. En faisant uniquement des opérations élémentaires de la forme $L \leftarrow L + \alpha L'$, montrer que $T_{1,2}(\lambda)$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -1/\lambda & 0 \end{pmatrix}$, puis à $D_1(1/\lambda)D_2(\lambda)$.
4. En déduire que $B_1 \dots B_s = AB$, où A est un produit de matrices de transvection, et B une matrice de dilatation. Conclure.

Exercice 2 — Soient M, M' des matrices dans $M_{n,p}(k)$. On note V (resp. V') l'image de M (resp. M') dans k^n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $V = V'$
(ii) $M' = MP$ avec $P \in \mathrm{GL}_p(k)$
(iii) M et M' sont équivalentes par colonnes
(iv) M et M' ont la même forme réduite échelonnée par colonnes

Exercice 3 — Soient M, M' des matrices dans $M_{p,n}(k)$. On note V (resp. V') le noyau de M (resp. M') dans k^n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $V = V'$
(ii) $M' = PM$ avec $P \in \mathrm{GL}_p(k)$
(iii) M et M' sont équivalentes par lignes
(iv) M et M' ont la même forme réduite échelonnée par lignes

Exercice 4 — Conjugaison de matrices élémentaires dans $\mathrm{GL}_n(k)$ —

1. Soit $\lambda, \mu \in k^*$. Montrer que les matrices de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ et $T_{k,l}(\mu)$ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$.
2. À quelle condition deux matrices de dilatation sont-elles conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$?
3. On suppose $n = 2$. Montrer que $T_{1,2}(\lambda)$ et $T_{2,1}(-\lambda)$ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(k)$.
4. Montrer que $T_{1,2}(\lambda)$ et $T_{1,2}(\mu)$ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(k)$ si et seulement si λ/μ est un carré dans k^*.
5. Montrer que pour $n \geq 3$, les matrices de transvection sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(k)$.