# TD Formes multilinéaires, déterminants

Tous les espaces vectoriels sont sur un corps $k$ fixé et sont de dimension finie.

**Exercice 1** — On suppose $k$ de caractéristique $\neq 2$. Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $\mathcal{L}_2(E)$ l'espace des formes bilinéaires sur $E \times E$. On note $\mathcal{S}_2(E)$ (resp. $\mathcal{AS}_2(E)$) le sous-espace de $\mathcal{L}_2(E)$ formé des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques).

1. Montrer que $\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{AS}_2(E)$.
2. Montrer que $\mathcal{AS}_2(E)$ est égal à l'espace $\mathcal{A}_2(E)$ des formes bilinéaires alternées.
3. Les résultats ci-dessus sont-ils vrais lorsque $k$ est de caractéristique 2 ?

**Exercice 2** — **Formes linéaires alternées** — Soit $E$ un espace vectoriel de base $(e_1, \ldots, e_n)$ avec $n \geq 1$. Soit $p \geq 1$ un entier. On note $\mathcal{A}_p(E)$ l'espace des formes $p$-linéaires alternées sur $E^p$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_p(E)$ est isomorphe à $k^I$, où $I$ est l'ensemble des $p$-uplets $(i_1, \ldots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_p(E)$.

**Exercice 3** — Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}_2(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires sur $E \times F$.

1. Donner des isomorphismes $u_1 \colon \mathcal{L}_2(E, F) \to \mathrm{Hom}(E, F^*)$ et $u_2 \colon \mathcal{L}_2(E, F) \to \mathrm{Hom}(F, E^*)$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E, F)$. Montrer que $u_1(\varphi)$ et $u_2(\varphi)$ ont même rang. Ce rang est appelé le rang de $\varphi$.

**Exercice 4** — Soit $E$ un espace vectoriel et $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$.

1. En utilisant les notations de l'exercice précédent, montrer $u_1(\varphi) = u_2(\varphi)$. On notera $f \colon E \to E^*$ cette application.
2. Soit $F$ un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $E$. Montrer que la restriction de $\varphi$ à $F \times F$ est non dégénérée (c'est-à-dire de rang maximal).
3. Réciproquement, soit $F$ un sous-espace de $E$ tel que la restriction de $\varphi$ à $F \times F$ est non dégénérée. Montrer que $F$ est contenu dans un supplémentaire de $\ker(f)$.

**Exercice 5** — Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in E^*$ et $\mu_1, \ldots, \mu_r \in F^*$.

1. Montrer que l'application
$$\begin{aligned}\varphi\colon E\times F &\to k\\ (x,y) &\mapsto \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(x)\mu_i(y)\end{aligned}$$
appartient à $\mathcal{L}_2(E,F)$.
2. Montrer que le rang de $\varphi$ est inférieur ou égal à $r$.

**Exercice 6 —**

1. Soit $M=(m_{i,j})\in M_n(k)$. Pour tout $1\le i,j\le n$, on note $M_{i,j}$ la matrice extraite de $M$ obtenue en enlevant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne. Pour $1\le i,j\le n$, montrer les formules
$$\det(M)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}m_{k,j}\det(M_{k,j})=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}m_{i,k}\det(M_{i,k}).$$
*Indication :* Montrer que ces expressions définissent des formes $n$-linéaires alternées.
2. En déduire $M\cdot{}^t\operatorname{Com}(M)={}^t\operatorname{Com}(M)\cdot M=\det(M)\cdot I_n$, où $\operatorname{Com}(M)$ désigne la comatrice de $M$.

**Exercice 7 — Formule de Cauchy-Binet —** Soit $M\in M_n(k)$. Pour $r\in\{0,\dots,n\}$, un $r$-*mineur* de $M$ est une matrice carrée extraite de $M$ de taille $r\times r$.

1. Montrer que le rang de $M$ est le plus grand entier $r\in\{0,\dots,n\}$ tel qu'il existe un $r$-mineur de $M$ inversible.

Pour un entier $0\le r\le n$, on note $\binom{[n]}{r}$ l'ensemble des parties de $[n]=\{1,\dots,n\}$ de cardinal $r$. Pour $I,J\in\binom{[n]}{r}$, on note $M_{I,J}$ le $r$-mineur de $M$ obtenu en ne gardant que les lignes (resp. colonnes) d'indice appartenant à $I$ (resp. à $J$).

Pour tout $I\in\binom{[n]}{r}$, on note $\widehat{I}=\{1,\dots,n\}\backslash I$. De plus, notons $I=\{i_1,\dots,i_r\}$ avec $i_1<\cdots<i_r$ et $\widehat{I}=\{i_{r+1},\dots,i_n\}$ avec $i_{r+1}<\cdots i_n$. On définit alors $\varepsilon(I)$ comme la signature de la permutation $t\mapsto i_t$.

2. Soit $I,J\in\binom{[n]}{r}$. Montrer que
$$\det(M)=\sum_{H\in\binom{[n]}{r}}\varepsilon(H)\det(M_{I,H})\det(M_{\widehat{I},\widehat{H}})=\sum_{H\in\binom{[n]}{r}}\varepsilon(H)\det(M_{H,J})\det(M_{\widehat{H},\widehat{J}}).$$

3. Soient $m \leq n$ des entiers. Soit $P \in M_{m,n}(k)$ et $Q \in M_{n,m}(k)$. Montrer

$$\det(PQ) = \sum_{I \in \binom{[n]}{m}} \det(P_{[m],I}) \det(Q_{I,[m]}).$$

**Exercice 8** — Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(k)$ une matrice vérifiant $m_{i,j} = 0$ pour $i + j \leq n$. Calculer $\det(M)$.

**Exercice 9** — Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}.$$

**Exercice 10** — Calculer le déterminant d'ordre $n$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

**Exercice 11** — Calculer le déterminant d'ordre $n$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}.$$

**Exercice 12** — **Résultant** — On suppose dans cet exercice que $k$ est algébriquement clos.

1. Soient $A, B \in k[X]$ deux polynômes de degrés $m$ et $n$ respectivement. Montrer qu'ils ont une racine commune dans $k$ si et seulement si il existe $P, Q \in k[X] \setminus \{0\}$ tels que $PA + QB = 0$ et $\deg(P) < n$, $\deg(Q) < m$.
2. Notons $A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$ et $B = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n$. En déduire que $A$ et $B$ ont une racine commune dans $k$ si et seulement si le déterminant de Sylvester

$$\operatorname{Res}(A, B) := \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_m & & \vdots & b_n & & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_m & 0 & 0 & b_n \end{vmatrix} \qquad \text{s'annule.}$$

(Les $n$ premières colonnes sont formées des coefficients de $A$, et les $m$ dernières colonnes des coefficients de $B$.)

**Exercice 13 — Déterminant d'une matrice aléatoire —** Soit $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme à valeurs dans $\{-1,1\}$. On note $M$ la matrice $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Calculer $\mathrm{E}(\det M)$.
2. Calculer $\mathrm{E}((\det M)^2)$.
3. En déduire une majoration de $E(|\det M|)$.

**Exercice 14 — Formes alternées non dégénérées —** On suppose $\mathrm{car}(k)\neq 2$. Soit $E$ un $k$-espace vectoriel et $\varphi$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $E$. Le but de cet exercice est de montrer que $E$ est nécessairement de dimension paire.

1. On suppose $\dim E = 2$. Montrer qu'il existe une base $(x,y)$ de $E$ telle que $\varphi(x,x) = \varphi(y,y) = 0$ et $\varphi(x,y) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une base $B$ de $E$ dans laquelle la matrice de $\varphi$ est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Comment ce résultat se traduit-il en termes de matrices antisymétriques ?

**Exercice 15 — Pfaffien —** On suppose $k$ de caractéristique $\neq 2$.

1. Montrer que toute matrice antisymétrique $A\in M_n(k)$ est congruente à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{Pf}_m \in \mathbb{Z}[(X_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}]$ tel que :
   (a) Pour tout corps $k$ et toute matrice antisymétrique $A\in M_n(k)$, on a $\det(A) = \mathrm{Pf}_m(A)^2$ ;
   (b) $\mathrm{Pf}_m(\mathrm{diag}(J,\dots,J)) = 1$.
3. Montrer que le polynôme $\mathrm{Pf}_m$ est homogène et irréductible sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 16 — Application aux classes de conjugaison dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ —** Soit $M\in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) La matrice $A = M - {}^tM$ est inversible ;
   (b) Le polynôme caractéristique $\chi_M$ n'a pas de racine réelle ;
   (c) $\mathrm{Pf}(A)\neq 0$.
2. En déduire que deux matrices $M,N\in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont conjuguées dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\chi_M = \chi_N$ et $\mathrm{Pf}(M - {}^tM) = \mathrm{Pf}(N - {}^tN)$.