ÉNS de Lyon
 M2 FEADéP

Option C
 2020–2021

TD/TP Polynômes 2

Exercice 1 —

On considère le polynôme $P = X^2 + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la suite de Sturm associée à P.

2. Vérifier que le nombre de racines réelles de P est bien égal à $V(-\infty) - V(+\infty)$.

Exercice 2 — Localisation de racines —

1. Écrire une fonction qui prend en argument un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ et renvoie une liste d'intervalles disjoints contenant chacun exactement une racine de P, et telle que toute racine réelle de P appartienne à l'un de ces intervalles.

2. On suppose maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$. Si les coefficients de P ne sont pas connus de manière exacte, pourquoi ne peut-on pas utiliser l'algorithme précédent ?

Exercice 3 — Racines sur le cercle unité —

On s'intéresse dans cet exercice à calculer le nombre de racines d'un polynôme sur le cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

1. Montrer que l'application $t \mapsto (t - i)/(t + i)$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers un sous-ensemble de U que l'on précisera.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Montrer qu'il existe deux polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(t+i)^n P\Big(\frac{t-i}{t+i}\Big) = A(t) + iB(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

3. En déduire une méthode pour calculer le nombre de racines de P sur le cercle unité.

4. Implémenter cette méthode dans Sage.

5. Déterminer le nombre de racines de $P(X) = X^4 - 2X^3 - 2X + 1$ sur le cercle unité. Vérifier numériquement ce résultat.

6. Trouver un polynôme de degré 8 à coefficients dans $\{\pm 1\}$ qui a exactement 6 racines sur le cercle unité.

Exercice 4 — Interpolation de Newton —

Soit k un corps, $Q_1, \dots Q_n \in k[X]$ des polynômes de degrés respectifs $d_1, \dots, d_n \geq 1$. On pose $d = d_1 + \cdots + d_n$.

1. Montrer que tout polynôme $P \in k[X]$ de degré $\leq d - 1$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$P = \sum_{i=1}^{n} A_i \prod_{j=1}^{i-1} Q_j$$

avec $A_i \in k[X]$ de degré $\leq d_i - 1$.

2. Écrire une fonction Sage qui permet d'écrire un polynôme sous cette forme. Quel est le coût de cet algorithme ?

3. On considère maintenant les polynômes $Q_i = X - x_i$, avec $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts. Écrire une fonction qui calcule le polynôme d'interpolation associé aux points (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$, écrit sous la forme de la question 1 (dite forme de Newton).

4. Quel est le coût de cette méthode, en termes d'opérations dans k ?

Exercice 5 — Interpolation de Hermite —

La méthode d'interpolation de Hermite consiste à déterminer un polynôme interpolateur en fixant son développement de Taylor en certains points.

Soit k un corps de caractéristique 0. Fixons un entier $n \geq 1$, des éléments deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_n$ dans k et des entiers strictement positifs $m_1, \ldots, m_n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout entier $\ell \in \{0, \ldots m_i - 1\}$, on se donne un élément $y_{i,l}$ de k. Posons enfin $m := \sum_{i=1}^{n} m_i$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in k[X]$ de degré strictement inférieur à m et vérifiant $P^{(\ell)}(x_i) = y_{i,\ell}$ pour tous indices $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\ell \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$.

2. Comment interpréter le résultat de la question précédente à l'aide du k-espace vectoriel $k[X]/\left(\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)^{m_i}\right)$?

3. En s'inspirant des algorithmes d'interpolation vus précédemment, écrire un algorithme permettant de calculer le polynôme P de la question 1. Quel est son coût en termes d'opérations dans k ?

Exercice 6 — Différences divisées et interpolation de Newton —

Soit k un corps, $x_0, \ldots, x_n$ des éléments distincts de k, et $y_0, \ldots, y_n \in k$.

On définit pour tous les indices i et j tels que $0 \leq i \leq i+j \leq n$ les quantités suivantes : $[y_i] = y_i$, $[y_{i+1}, y_i] = \dfrac{[y_{i+1}] - [y_i]}{x_{i+1} - x_i}$ et par récurrence

$$[y_{i+j}, \ldots, y_i] = \frac{[y_{i+j}, \ldots, y_{i+1}] - [y_{i+j-1}, \ldots, y_i]}{x_{i+j} - x_i}$$

(différence divisée d'ordre j).

Si $y_i = f(x_i)$ pour une certaine fonction f, on note $f[x_{i+j}, \ldots, x_i]$ pour $[y_{i+j}, \ldots, y_i]$.

1. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=1}^{i-1}(X - x_j)$ le polynôme d'interpolation de Newton tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Vérifier que $a_i = [y_i, \ldots, y_0]$.

2. Montrer que $[y_{i+j}, \ldots, y_i]$ ne dépend que des x_k et des y_k avec $i \leq k \leq i + j$.

3. Soit σ une permutation de $\{i, \ldots, i+j\}$. Montrer que $[y_{i+j}, \ldots, y_i] = [y_{\sigma(i+j)}, \ldots, y_{\sigma(i)}]$

4. Combien d'opérations dans k faut-il pour calculer $[y_{i+j}, \ldots, y_i]$?

On suppose maintenant $x_i = i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. On cherche à interpoler une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aux points (x_i, y_i) avec $y_i = f(x_i)$. On note Δ l'opérateur de différence, défini par $\Delta g(x) = g(x + 1) - g(x)$ pour toute fonction $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit P le polynôme interpolateur de f.

5. Montrer que la formule d'interpolation de Newton peut se réécrire sous la forme

$$P(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0) + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}\Delta^n f(0).$$