ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2021–2022

# TD Structures quotients

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels considérés sont sur un corps fixé $k$.

**Exercice 1** — Soit $E$ un espace vectoriel et $F_1, F_2$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $\pi_i \colon E \to E/F_i$ l'application canonique. On définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f \colon E &\to (E/F_1) \times (E/F_2) \\ x &\mapsto (\pi_1(x), \pi_2(x)). \end{aligned}$$

À quelle condition $f$ est-elle injective ? surjective ?

**Exercice 2** — Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On note $\pi \colon E \to E/F$ l'application canonique. Soit $S$ un sous-espace vectoriel de $E$. Monter que $S$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$ si et seulement si $\pi|_S \colon S \to E/F$ est un isomorphisme.

**Exercice 3** — Soient $E$ et $E'$ des espaces vectoriels, et soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On note $\pi \colon E \to E/F$ l'application canonique.

1. Montrer que l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(E/F, E') &\to \mathrm{Hom}(E, E') \\ f &\mapsto f \circ \pi \end{aligned}$$

   est injective, et décrire son image.
2. Déduire de la question précédente une description du dual de $E/F$.

**Exercice 4** — Formuler et démontrer une généralisation de l'exercice 3 pour les groupes abéliens.

**Exercice 5** — Le but de cet exercice est de déterminer le groupe $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, où $m, n \geq 1$ sont des entiers.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. En utilisant l'exercice 4, obtenir une première description de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
3. Soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $mx = 0$ si et seulement si $dx = 0$, avec $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$.
4. Conclure.

**Exercice 6** — **Deuxième théorème d'isomorphisme** —

Soit $G$ un groupe, et $N, H$ des sous-groupes de $G$, avec $N$ distingué dans $G$.

1. Montrer les assertions suivantes :
   (a) $HN = \{hn : h \in H, n \in N\}$ est un sous-groupe de $G$.
   (b) $H \cap N$ est un sous-groupe distingué de $H$.
2. Construire un isomorphisme de groupes $(HN)/N \cong H/(H \cap N)$.
3. En déduire une description de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/Z$, où $Z = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{C}^\times\}$, comme quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

**Exercice 7 — Sous-groupes d'un quotient —**
Soit $G$ un goupe, et $N$ un sous-groupe distingué de $G$.

1. Construire une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de $G/N$, et l'ensemble des sous-groupes de $G$ contenant $N$.
2. Montrer que cette bijection préserve l'inclusion ainsi que le caractère distingué.

**Exercice 8 — Quotients du groupe symétrique —**
Le but de cet exercice est de déterminer les quotients abéliens du groupe symétrique. Soit $G$ un groupe abélien. On suppose que $G$ est isomorphe à un quotient $\mathfrak{S}_n/N$, où $N$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que tout élément $g$ de $G$ vérifie $g^2 = 1$.
2. Montrer que $G$ est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Exercice 9** — Soit $E$ un ensemble, et $f\colon E \to E$ une application. Pour $x, y \in E$, on pose

$$x \sim y \iff \exists\, m, n \geq 0,\ f^m(x) = f^n(y).$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $E$.
2. Expliciter les classes d'équivalence pour $f\colon \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$.
3. Déterminer le nombre de classes d'équivalence pour $f\colon \mathbb{Z}/10^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10^n\mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$.

**Exercice 10** — Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des classes d'isométrie de triangles dans le plan. Trouver un ensemble “simple” qui est en bijection naturelle avec $\mathcal{T}$.