ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2021–2022

TD Dualité

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels considérés sont sur un corps fixé k et sont de dimension finie.

Exercice 1 — Soit E un espace vectoriel. On considère l'application $\iota\colon E \to E^{**}$ définie par $\iota(x) = (\lambda \mapsto \lambda(x))$.

1. Montrer que ι est un isomorphisme (on pourra montrer l'injectivité).
2. En déduire que l'accouplement $E \times E^* \to k$ est parfait.
3. Soit $n = \dim E$. Montrer que l'application $e = (e_1, \ldots, e_n) \mapsto e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une bijection de l'ensemble des bases de E sur l'ensemble des bases de E^*.

Exercice 2 — Soient V, W des espaces vectoriels, et $f\colon V \to W$ une application linéaire.

1. Soit v une base de V, et w une base de W. Montrer :
$$\mathrm{Mat}_{w^*,v^*}(f^*) = {}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Mat}_{v,w}(f).$$
2. Montrer les égalités :
$$\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^\perp$$
$$\mathrm{im}(f^*) = \ker(f)^\perp.$$
Vérifier qu'elles sont compatibles avec le théorème du rang pour f et f^*.
3. Montrer que f est injective (resp. surjective) si et seulement si f^* est surjective (resp. injective).

Exercice 3 —

1. Soient V, W des espaces vectoriels. Montrer que l'application de $\mathrm{Hom}(V, W)$ dans $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ qui à f associe sa transposée, est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.
2. Pour des applications linéaires $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$, exprimer la transposée de $g \circ f$ en termes des transposées de f et g.

Exercice 4 — Soit E un espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel de E. On note $i\colon F \to E$ l'inclusion, et $\pi\colon E \to E/F$ l'application canonique.

1. Vérifier que pour tout $\lambda \in E^*$, la forme linéaire $i^*(\lambda)$ est la restriction de λ à F.
2. Montrer que i^* induit un isomorphisme $E^*/F^\perp \cong F^*$.

3. En déduire $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.
4. Montrer que π^* induit un isomorphisme $(E/F)^* \cong F^{\perp}$.
5. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par f^*.
6. Si f est diagonalisable, respectivement trigonalisable, en est-il de même pour f^* ?
7. Si f admet un vecteur propre associé à la valeur propre λ, en est-il de même pour f^* ?

Exercice 5 — Déterminer des équations indépendantes pour le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \mathrm{Vect}((1, 3, -2, 2), (1, -1, 0, 1))$.

Exercice 6 — Soit F un sous-espace vectoriel de k^n donné par des équations linéaires $\lambda_1(x) = \ldots = \lambda_r(x) = 0$. Comment utiliser la théorie de la dualité pour obtenir une base de F ?

Exercice 7 —

1. Soient λ et μ des formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'elles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.
2. Montrer que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire sur E.

Exercice 8 — Soit E un espace vectoriel, et λ, μ des formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\lambda(x)\mu(x) \neq 0$.

Exercice 9 —

1. Montrer que l'application
$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon M_n(k) \times M_n(k) \to k$$
définie par $\langle M, M' \rangle = \mathrm{Tr}(MM')$ est un accouplement parfait.
2. On suppose k de caractéristique $\neq 2$. Soit S_n (resp. A_n) le sous-espace de $M_n(k)$ formé des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $S_n^{\perp} = A_n$ et $A_n^{\perp} = S_n$.