ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2021–2022

TD Exponentielle de matrices

Exercice 1 —
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Exercice 2 —
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Calculer e^A.

Exercice 3 —
Soit $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ le bloc de Jordan de taille n associé à $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer e^J.

Exercice 4 —
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer e^A.

Exercice 5 —

1. Calculer la différentielle de l'application $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en 0.
2. Soit $p \geq 1$. On note $u_p \colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $u_p(X) = X^p/p!$. Montrer que u_p est de classe $\mathcal{C}^1$ et que
$$Du_p(X)(H) = \frac{1}{p!}\Big(X^{p-1}H + X^{p-2}HX + \cdots + HX^{p-1}\Big).$$
3. Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{ad}(X) \colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $H \mapsto XH - HX$. Démontrer par récurrence que pour tout $k \geq 1$, on a
$$\sum_{p+q=k} \frac{1}{q!} Du_p(X)(H) = \frac{1}{k!}(-\mathrm{ad}(X))^{k-1}(H).$$
4. En déduire que la différentielle de exp en $X \in M_n(\mathbb{R})$ est donnée par
$$D\exp(X)(H) = \exp X \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-\mathrm{ad}(X))^{k-1}(H)\Big).$$

Exercice 6 —

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, l'application $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par $M \mapsto M^k$ est surjective.
2. Est-ce vrai si l'on remplace $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 7 — On note S_n l'espace des matrices symétriques réelles de taille n, et S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

1. Montrer que $\exp\colon S_n \to S_n^{++}$ est bien définie et est un homéomorphisme.
2. Montrer un analogue pour les matrices hermitiennes.

Exercice 8 — Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\exp(M)$ est diagonalisable.
2. Est-ce vrai dans $M_n(\mathbb{R})$?