ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2021–2022

TD Anneaux

Exercice 1

Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux non nuls de A.

1. Montrer que $IJ \subset I \cap J$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que si $I + J = A$ alors $IJ = I \cap J$.
3. Montrer que la réciproque est vraie si A est principal.
4. Montrer que la réciproque est fausse en général. (On pourra considérer $A = k[X, Y]$ ou $A = \mathbf{Z}[X]$, avec I et J des idéaux principaux bien choisis.)
5. Soit k un corps et a, b deux éléments distincts de k. Montrer que l'anneau quotient $k[X]/((X - a)(X - b))$ est isomorphe à $k \times k$.
6. Expliciter cet isomorphisme et sa réciproque.

Exercice 2

Soit k un corps, A un anneau commutatif non nul, et $\phi : k \to A$ un morphisme d'anneaux (de sorte que A est une k-algèbre).

1. Montrer que ϕ est injectif.
2. On suppose que A est intègre et de dimension finie sur k. Montrer que A est un corps.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur un polynôme $P \in k[X]$ pour que l'anneau quotient $k[X]/(P)$ soit un corps.

Exercice 3

Soit L/K une extension de corps.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Hom}_K(K[X], L)$ des morphismes de K-algèbres $\phi : K[X] \to L$ est en bijection avec L (on définira en détail la bijection et son inverse).
2. Soit $P \in K[X]$. Montrer que $\mathrm{Hom}_K(K[X]/(P), L)$ est en bijection avec l'ensemble des racines de P dans L.
3. Déterminer les morphismes de K-algèbres $\phi : K[X] \to K[Y]$.
4. À quelle condition ϕ est-il injectif ? surjectif ? un isomorphisme ?
5. Plus généralement, soit A un anneau commutatif et B une A-algèbre. Décrire explicitement $\mathrm{Hom}_A(A[X], B)$ et $\mathrm{Hom}_A(A[X_1, \dots, X_n], B)$ pour $n \geq 1$ (ici Hom_A désigne l'ensemble des morphismes de A-algèbres).

Exercice 4

Soit A un anneau commutatif, k un corps et $\phi : A \to k$ un morphisme d'anneaux.

1. On suppose φ surjectif. Montrer que $\ker(\phi)$ est un idéal maximal de A.
2. En général, que peut-on dire de $\ker(\phi)$?
3. On suppose φ injectif. Montrer que $\mathrm{im}(\phi)$ est un sous-anneau intègre de k, et que son corps des fractions s'identifie à un sous-corps de k.

Exercice 5

Soit A un anneau commutatif, F, G des polynômes de $A[X]$ avec G unitaire de degré $d \geq 1$.

1. Montrer par récurrence sur le degré de F qu'il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $A[X]$ tels que $F = QG + R$ avec $\deg R < d$.
2. Montrer sur un exemple la nécessité de supposer G unitaire.
3. On note x la classe de X dans $A[X]/(G)$. Montrer que tout élément y de $A[X]/(G)$ s'écrit de manière unique sous la forme $y = \sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i$ avec $a_0, \ldots, a_{d-1} \in A$.
   (On dit que $(1, x, \ldots, x^{d-1})$ est une base du A-module $A[X]/(G)$.)

Exercice 6

1. Construire un isomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1) \cong \mathbf{Z}[i]$.
2. Si k est un corps, montrer que les morphismes d'anneaux $\phi : \mathbf{Z}[i] \to k$ sont en bijection avec les racines carrées de -1 dans k (on pourra s'inspirer de l'exercice 3).
3. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbf{F}_{p^2}$.

On note $\alpha \in \mathbf{F}_{p^2}$ une racine carrée de -1, et $\phi : \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{F}_{p^2}$ le morphisme d'anneaux associé.

4. Montrer que si $p \equiv 3 \pmod 4$, alors ϕ est surjectif.
5. Montrer que si $p \equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathrm{im}(\phi) = \mathbf{F}_p$.
6. Déterminer un générateur de $\ker(\phi)$ pour $p = 3$, puis pour $p = 5$. (On pourra utiliser la description de $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1)$ obtenue à l'exercice 5.)

Exercice 7

Soit $(G, +)$ un groupe abélien. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G.

1. Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau (non nécessairement commutatif).
2. Que vaut $\mathrm{End}(\mathbf{Z})$? Et $\mathrm{End}(G)$ si G est cyclique ?
3. Montrer que $\mathrm{End}(\mathbf{Z}^n)$ est isomorphe à $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$.
4. En déduire que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ s'identifie au groupe des automorphismes de $(\mathbf{Z}^n, +)$.

Exercice 8

L'algèbre des quaternions $\mathbf{H}$ est la $\mathbf{R}$-algèbre définie par

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$$

où l'addition est définie de manière évidente, et la multiplication est déterminée par les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

1. Soit $u = x + yi + zj + tk \in \mathbf{H}$. On pose $\bar{u} = x - yi - zj - tk$. Calculer $u\bar{u}$.
2. En déduire que tout élément non nul de $\mathbf{H}$ est inversible dans $\mathbf{H}$, *i. e.* $\mathbf{H}$ est un corps non commutatif.
3. Montrer qu'il existe un unique morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{H}$ tel que $\phi(i) = i$.
4. Montrer que $(1, j)$ est une base de $\mathbf{H}$ comme $\mathbf{C}$-espace vectoriel (via ϕ).
5. Montrer que $\mathbf{H}$ s'identifie à une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$. (On pourra considérer, pour chaque $u \in \mathbf{H}$, l'endomorphisme $m_u : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $v \mapsto uv$.)
6. Montrer que l'ensemble $\mathbf{H}^1 := \{u \in \mathbf{H} : u\bar{u} = 1\}$ forme un groupe isomorphe à $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$.