ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2021–2022

TD Résultant

Dans toute cette feuille, K est un corps commutatif.

Exercice 1
Soient $P \in K[X]$ et $c \in K^\times$. Calculer $\mathrm{Res}(c, P)$ et $\mathrm{Res}(P, c)$.

Exercice 2
Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. Montrer que $\mathrm{Res}(P, X - \alpha) = P(\alpha)$.

Exercice 3
Soient $P \in K[X]_{\leq m}$ et $Q \in K[X]_{\leq n}$. Montrer que $\mathrm{Res}_{m,n}(P, Q) = (-1)^{mn} \mathrm{Res}_{n,m}(Q, P)$.

Exercice 4 (Calcul du résultant par l'algorithme d'Euclide)
Soient $P, Q \in K[X]$ de degrés respectifs m et n. On note a le coefficient dominant de P. Soit R le reste dans la division euclidienne de Q par P. Montrer que

$$\mathrm{Res}(P, Q) = a^{n-\deg(R)} \mathrm{Res}(P, R).$$

En déduire un algorithme pour calculer le résultant de deux polynômes.

Exercice 5 (Intersection de courbes planes)
Déterminer les points d'intersection à coordonnées rationnelles de la courbe plane $E : y^2 + y = x^3 - x$ et du cercle C de centre $(0, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 6 (Somme de nombres algébriques)
Soient $A, B \in \mathbf{C}[X]$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $y \in \mathbf{C}$ pour que le système $A(x) = B(y - x) = 0$ admette une solution dans $\mathbf{C}$.
2. En déduire un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ dont les racines sont exactement les nombres de la forme $\alpha + \beta$, où α est racine de A et β est racine de B.
3. Trouver un polynôme P à coefficients entiers dont $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ est racine.
4. Quelles sont les autres racines de P ?

Exercice 7 (Transformation des équations algébriques)
Soient $P, Q \in \mathbf{C}[X]$.

1. À l'aide du résultant, construire un polynôme dont les racines sont les $Q(\alpha)$, où α est une racine de P.
2. Résoudre l'équation algébrique $x^3 - 6x + 6 = 0$ en utilisant la transformation $y = x^2 + x - 4$.

Exercice 8 (Équation implicite)

1. Déterminer une équation cartésienne de la courbe plane

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Exercice 9

Soient $P, Q, R, S \in \mathbf{R}[t]$. On suppose $\deg(P), \deg(Q) \leq m$ et $\deg(R), \deg(S) \leq n$. Considérons la courbe paramétrée

$$C : \begin{cases} x = \frac{P(t)}{Q(t)} \\ y = \frac{R(t)}{S(t)} \end{cases}$$

Montrer que l'équation cartésienne de C est de degré total au plus $m + n$.

Exercice 10

Soient $P, Q \in K[X]$ et $a \in K$. Comparer le résultant de $P(X + a)$ et $Q(X + a)$ avec celui de P et Q.

Exercice 11

Soient $P, Q_1, Q_2 \in K[X]$. Montrer que $\operatorname{Res}(P, Q_1 Q_2) = \operatorname{Res}(P, Q_1) \operatorname{Res}(P, Q_2)$.

Exercice 12

Soient $P, Q \in K[X, Y, Z]$. On suppose que P (resp. Q) est homogène de degré m (resp. n). Montrer que $\operatorname{Res}_X(P, Q)$ est un polynôme homogène de degré mn en les variables Y, Z.

Exercice 13

1. Calculer $\operatorname{Disc}(P)$ pour $P = aX^2 + bX + c$, et comparer avec $\operatorname{Res}(P, P')$.
2. Calculer $\operatorname{Disc}(X^3 + pX + q)$.

Exercice 14

Soient P_1 et P_2 des polynômes unitaires de $K[X]$. Exprimer $\operatorname{Disc}(P_1 P_2)$ en termes de $\operatorname{Disc}(P_1)$, $\operatorname{Disc}(P_2)$ et $\operatorname{Res}(P_1, P_2)$.

Exercice 15

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ unitaire de degré n. On note r le nombre de racines réelles de P.

1. Montrer que si $\operatorname{Disc}(P) > 0$, alors $r \equiv n \bmod 4$.
2. Montrer que si $\operatorname{Disc}(P) < 0$, alors $r \equiv n - 2 \bmod 4$.
3. Discuter le nombre de racines réelles du polynôme $X^3 + pX + q$.

Exercice 16

Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{C})$ ayant toutes leurs valeurs propres distinctes est un ouvert de $M_n(\mathbf{C})$.

Exercice 17

Pour $P \in K[X]_{\leq n}$ et $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K)$, on définit

$$P(X) \cdot g = (cX + d)^n P\Big(\frac{aX + b}{cX + d}\Big).$$

On note $\widetilde{P}(X, Y) = Y^n P(X/Y) \in K[X, Y]$ l'homogénéisé de P.

1. Montrer que l'homogénéisé de $P \cdot g$ est $\widetilde{P}\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\Big)$.
2. En déduire que $(P, g) \mapsto P \cdot g$ définit une action à droite de $\mathrm{SL}_2(K)$ sur $K[X]_{\leq n}$.
3. Montrer que Disc_n est un invariant de l'action de $\mathrm{SL}_2(K)$ sur $K[X]_{\leq n}$.
   Indication. On pourra considérer des générateurs de $\mathrm{SL}_2(K)$.