ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2021–2022

# TD Séries formelles

Dans toute cette feuille, $A$ est un anneau commutatif intègre, et $K$ est un corps commutatif.

**Exercice 1 (Éléments inversibles de $A[[X]]$)**

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est inversible dans $A[[X]]$ si et seulement si $a_0 \in A^*$. Calculer $(1-X)^{-1}$, et montrer que $X^3+3X+2$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$ mais pas dans $\mathbf{Z}[[X]]$.
2. Si $A = K$ est un corps, en déduire que $K[[X]]$ est un anneau euclidien dont l'unique idéal maximal est l'idéal engendré par $X$.
3. Montrer également que $K[[X]]$ contient l'anneau des fractions rationnelles $F = P/Q \in K(X)$ avec $Q(0) \neq 0$. En particulier, développer en série formelle $(1-X)^{-n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

**Exercice 2 (Séries génératrices et dénombrement)**

1. Compter, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le nombre d'entiers $x, y \in \mathbf{N}$ tels que $2x+3y = n$.
2. Calculer, pour tout $k, n \in \mathbf{N}$, $S(n,k)$ le nombre de $k$-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut $n$.
3. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $D_n$ le nombre de permutations sans points fixes de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$ et en déduire une formule pour $D_n$ puis un équivalent quand $n$ tend vers l'infini.
4. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n$ le nombre d'arbres binaires à $n$ noeuds. Montrer que $B_0 = 1$ et que $B_{n+1} = \sum_{p+q=n} B_p B_q$, en déduire que $B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

**Exercice 3**

Soit $G \in K[[T]]$ une série formelle telle que $\mathrm{val}(G) \geq 1$. On note $\varphi_G : K[[T]] \to K[[T]]$ l'application définie par $\varphi_G(F) = F \circ G$.

1. Vérifier que $\varphi_G$ est un morphisme de $K$-algèbres.
2. À quelle condition sur $G$ l'endomorphisme $\varphi_G$ est-il injectif ?
3. Montrer que $\varphi_G$ est surjectif si et seulement si $\mathrm{val}(G) = 1$.
4. Montrer que l'ensemble $E = \{G \in K[[T]] : \mathrm{val}(G) = 1\}$ muni de la loi de composition interne $\circ$ est un groupe.

**Exercice 4**

Montrer que le seul morphisme de $K$-algèbres de $K[[T]]$ dans $K$ est le morphisme « évaluation en 0 », défini par $\varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n\right) = a_0$.

**Exercice 5**

Soit $K$ un corps et $n \geq 1$ un entier. Montrer l'isomorphisme de $K$-algèbres $K[T]/(T^n) \cong K[[T]]/(T^n)$.