ÉNS de Lyon — Option C
M2 FEADéP — 2021–2022

TD/TP Matrices

1 Coût des calculs sur les matrices

Exercice 1 — Soit A un anneau. Quel est le coût, en termes d'opérations dans A, du calcul de la somme de deux matrices ? De leur produit ? Du produit d'une matrice par un vecteur colonne ? De l'élévation d'une matrice carrée à une certaine puissance ?

Exercice 2 — Coût du pivot de Gauss — Soit k un corps et $M \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$. Quel est le coût, en termes d'opérations dans k, du calcul d'une forme échelonnée par lignes de M, à l'aide du pivot de Gauss ? Du calcul de la forme échelonnée réduite ?

Exercice 3 — Soit k un corps et $M \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$. À l'aide de l'exercice précédent, estimer le coût des calculs suivants :

1. le rang de M ;
2. le noyau de M (donné par une base) ;
3. l'image de M (donnée par une base) ;
4. si $m = n$, le déterminant de M ;
5. si $m = n$ et M est inversible, l'inverse de M.

Exercice 4 — Polynôme caractéristique — Soit k un corps de caractéristique 0, et $M \in \mathcal{M}_n(k)$. On note $\chi_M = \det(X \cdot I_n - M) \in k[X]$ le polynôme caractéristique de M.

1. Que se passe-t-il si l'on cherche à calculer χ_M à l'aide du pivot de Gauss ?

2. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de k deux à deux distincts. Expliquer comment calculer χ_M à partir des quantités $\det(x_i \cdot I_n - M)$ pour $0 \leq i \leq n$.

Nous verrons plus tard le coût de ce dernier algorithme.

2 Manipulations de matrices avec Sage

Exercice 5 —

1. Comment définir une matrice dans Sage ? Comment spécifier l'anneau auquel appartiennent les coefficients de la matrice ?

2. Comment créer la matrice identité ? une matrice diagonale ? une matrice aléatoire ?

3. Comment additionner, multiplier des matrices ?

4. Comment calculer le déterminant, le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, l'inverse d'une matrice ?

Exercice 6 — Soit A un anneau.

1. Comment créer l'espace $\mathcal{M}_{m,n}(A)$ dans Sage ?

2. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux calculable dans Sage (c'est-à-dire que Sage autorise la conversion d'un élement de A en un élément de B). Comment obtenir l'image d'une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(A)$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(B)$? On testera sur des exemples tels que $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ avec p premier.

3. Soit M une matrice carrée de taille 30 à coefficients dans $\mathbb{Q}$, choisie aléatoirement. Comparer le temps mis par Sage pour calculer le polynôme caractéristique de M via la définition $\det(X \cdot I_{30} - M)$, et en utilisant la fonction dédiée.

Exercice 7 — **1.** Définir les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_8(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} I_4 & A \\ I_4 & I_4 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & I_4 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer le noyau et l'image de B et C.

3. Déterminer la forme échelonnée de B.

Exercice 8 — **1.** Résoudre l'équation $3x + 4y + 5z = 0$ dans $\mathbb{Q}^3$ à l'aide de Sage.

2. Même question dans $\mathbb{Z}^3$.

3 Décomposition de Dunford

Exercice 9 — Via la forme de Jordan —

Soit k un corps, et M une matrice carrée à coefficients dans k. On note χ_M le polynôme caractéristique de M.

1. Écrire une fonction dans Sage qui teste si χ_M est scindé dans k.

On suppose désormais que χ_M est scindé dans k.

2. Comment obtenir avec Sage la forme de Jordan de M, et une matrice de passage associée ?

3. Écrire une fonction dans Sage qui renvoie la décomposition de Dunford de M à l'aide de la forme de Jordan.

Exercice 10 — Par la méthode de Newton —

Soit $M \in \mathcal{M}_n(k)$ comme précédemment, avec χ_M scindé dans k. Soit P un polynôme scindé à racines simples dans k tel que $P^n(M) = 0$.

On définit une suite de matrices par $M_0 = M$, et $M_{i+1} = M_i - P(M_i)P'(M_i)^{-1}$. La suite se stabilise à l'étape n au plus tard, et en posant $M_n = D$ et $N = M - D$, l'écriture $M = D + N$ est la décomposition de Dunford de M.

1. Vérifier les affirmations précédentes. On justifiera en particulier que $P'(M_i)$ est toujours inversible, et qu'on peut obtenir son inverse sous la forme d'un polynôme en M_i, le polynôme ne dépendant pas de i.
2. Écrire une fonction dans Sage qui prend en entrée M et P, et renvoie D et N.
3. Vérifier qu'un tel polynôme P existe toujours. Comment le calculer ?
4. En déduire un algorithme qui permet de calculer la décomposition de Dunford de M. Vous paraît-il plus efficace que le précédent ?