ÉNS de Lyon Option C
M2 FEADéP 2021–2022

TD/TP Déterminants

Exercice 1 — Méthode de Gauss-Bareiss —

Soit A un anneau intègre. Soit $M_0 = (a_{i,j}^{(0)})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice à coefficients dans A. On pose $c_0 = 1$. On définit par récurrence une suite de matrices $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ à coefficients dans A de la manière suivante :

$$M_k = (a_{i,j}^{(k)})_{k+1\leq i,j\leq n}, \qquad a_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{c_{k-1}}\begin{vmatrix} a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,j}^{(k-1)} \\ a_{i,k}^{(k-1)} & a_{i,j}^{(k-1)} \end{vmatrix}, \qquad c_k = a_{k,k}^{(k-1)}.$$

On suppose que c_k est non nul pour tout k, de sorte que les matrices M_k sont bien définies, au moins dans le corps des fractions de A.

1. À l'aide du pivot de Gauss, montrer que
$$\det(M_k) = \frac{c_k^{n-k-1}}{c_{k-1}^{n-k}} \det(M_{k-1}) \qquad (1 \leq k \leq n-1).$$
2. En déduire $\det(M_0) = c_n$.
3. Montrer que $a_{i,j}^{(k)}$ est égal au mineur $(k+1)\times(k+1)$ de M_0 formé des k premières lignes et de la i-ième ligne, et des k premières colonnes et de la j-ième colonne.
4. En déduire qu'au cours de la procédure, toutes les divisions dans A sont exactes.
5. Implémenter cet algorithme.
6. Comment peut-on modifier l'algorithme lorsqu'il existe k tel que $c_k = 0$?

Exercice 2 —

1. En utilisant la méthode de Gauss-Bareiss, écrire une fonction Sage qui calcule le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in M_n(k)$.
2. Comparer le temps de calcul avec la méthode d'interpolation de Lagrange, et avec la fonction dédiée de Sage.

Exercice 3 —

Généraliser la méthode de Gauss-Bareiss pour calculer l'inverse d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1.