Sage : quelques exercices pour commencer

Exercice 1 Montrer que $2^{127}-1$ est premier. Factoriser $2^{100}-1$.

Exercice 2 Calculer une valeur approchée de $1/\pi$ à 100 décimales.

Exercice 3 Afficher l'identité d'Euler $e^{i\pi}+1=0$ dans une cellule de type Markdown.

Exercice 4 Vérifier l'identité $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ pour $n=100$, puis pour tout n en utilisant la sommation formelle de Sage.

Exercice 5
1. Factoriser $x^9-x^6+x^3-1$ sur $\mathbf{Q}$. Comment récupérer la liste des facteurs irréductibles ?
2. Trouver un polynôme cyclotomique ayant un coefficient égal à 2. Même question avec 3.

Exercice 6
1. Créer la liste des nombres premiers < 100.
2. Créer la liste des nombres premiers de la forme n^2+1 avec $n \leqslant 100$.
3. Créer la liste des couples $(p, p+2)$ de nombres premiers jumeaux avec $p < 1000$.

Exercice 7
1. Définir la fonction symbolique $f(x) = \sin(x)/x$.
2. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ puis lorsque $x \to \pm\infty$.
5. Déterminer le début du développement asymptotique de $f(x)$ en $x = 0$ (utiliser la commande `taylor`).
6. Résoudre numériquement l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.
7. Calculer numériquement $\int_0^\pi f$.

Exercice 8
1. Écrire une fonction qui prend en entrée une liste v et renvoie $2v$.
2. Écrire une *procédure* qui prend en entrée une liste v et multiplie les éléments de v par 2.
3. Tester vos réponses sur un exemple.
4. Définir une fonction qui prend en entrée une liste v et un élément x, et renvoie un entier i tel que $v[i] = x$ s'il en existe, et renvoie `False` sinon.

Exercice 9 On rappelle l'algorithme de Syracuse. On part d'un entier $N \geqslant 1$. On le divise par 2 s'il est pair, et on le multiplie par 3 et on ajoute 1 s'il est impair. Puis on recommence. On conjecture que quelque soit l'entier N de départ, on arrive toujours à 1.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier N, et renvoie le nombre d'étapes nécessaires pour arriver à 1.
2. Déterminer l'entier $1 \leqslant N \leqslant 1000$ tel que ce nombre d'étapes soit maximal.

Exercice 10 On s'intéresse ici à l'ensemble S des entiers qui sont sommes de deux carrés.

1. Calculer l'ensemble $S \cap \{1, \ldots, 100\}$.
2. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie $s_n = \mathrm{Card}(S \cap \{1, \ldots, n\})$.
3. Vérifier expérimentalement le théorème de Landau (1908) : il existe $K > 0$ tel que $s_n \sim K \frac{n}{\sqrt{\log n}}$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Estimer le coût théorique de votre calcul de s_n.

Exercice 11 Moyenne arithmético-géométrique

Pour deux nombres réels $a, b > 0$, on définit deux suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad (n \geqslant 0).$$

On admet que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Leur limite commune est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b, et est notée $\mathrm{AGM}(a, b)$.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée a et b et renvoie une valeur approchée de $\mathrm{AGM}(a, b)$ à la précision par défaut (on n'utilisera pas la fonction dédiée de Sage).
2. Tester cette fonction sur des exemples.
3. Vérifier numériquement la relation de Gauss :

$$\frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}(1, \sqrt{2})} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

Indication : Utiliser la fonction `numerical_integral` avec l'option `algorithm='qags'`.

Exercice 12 Pour des entiers $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 0$, on note $\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$ la somme des puissances m-ièmes des diviseurs de n. Pour tout entier pair $k \geqslant 4$, on définit la série formelle

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) x^n \in \mathbf{Q}[[x]],$$

où B_k est le k-ième nombre de Bernoulli, obtenu avec la commande `bernoulli`.

1. Vérifier expérimentalement les identités $E_4^2 = E_8$, $E_4 E_6 = E_{10}$ et $E_4 E_{10} = E_6 E_8 = E_{14}$.
2. Déterminer expérimentalement une relation de dépendance linéaire entre E_4^3, E_6^2 et E_{12}.