TD Anneaux

Exercice 1

Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux non nuls de A.

1. Montrer que $IJ \subset I \cap J$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que si $I + J = A$ alors $IJ = I \cap J$.
3. Montrer que la réciproque est vraie si A est principal.
4. Montrer que la réciproque est fausse en général. (On pourra considérer $A = k[X, Y]$ ou $A = \mathbf{Z}[X]$, avec I et J des idéaux principaux bien choisis.)
5. Soit k un corps et a, b deux éléments distincts de k. Montrer que l'anneau quotient $k[X]/((X - a)(X - b))$ est isomorphe à $k \times k$.
6. Expliciter cet isomorphisme et sa réciproque.

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif intègre, de corps des fractions K. Soit S une partie de $A \setminus \{0\}$ qui contient 1 et est stable par multiplication.

1. Montrer que $S^{-1}A = \{\frac{a}{s} : a \in A,\ s \in S\}$ est un sous-anneau de K.
2. Montrer que si A est principal, alors $S^{-1}A$ est principal.
3. Soit k un corps. Montrer que l'anneau $k[X, Y]/(XY - 1)$ est principal.
4. Montrer que $\mathbf{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ est principal.

Exercice 3

Soit A un anneau principal (on suppose que A n'est pas un corps). Montrer que les idéaux premiers de A sont les idéaux $\{0\}$ et (π), où π est un élément irréductible de A. Quels sont les idéaux maximaux de A ?

Exercice 4

Un sous-anneau d'un anneau intègre est-il intègre ? Même question avec noethérien, factoriel, principal, euclidien et toutes vos propriétés préférées pour les anneaux. Mêmes questions pour le quotient d'un anneau.

Exercice 5

Montrer qu'une k-algèbre commutative intègre de dimension finie sur k est un corps.

Exercice 6

Soit L/K une extension de corps.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Hom}_K(K[X], L)$ des morphismes de K-algèbres $\phi : K[X] \to L$ est en bijection avec L (on définira en détail la bijection et son inverse).
2. Soit $P \in K[X]$. Montrer que $\mathrm{Hom}_K(K[X]/(P), L)$ est en bijection avec l'ensemble des racines de P dans L.
3. Soit A un anneau commutatif et B une A-algèbre. Montrer qu'il existe une bijection canonique entre $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(A[X_1, \dots, X_n], B)$ et B^n.

Exercice 7

Soit A un anneau commutatif, k un corps et $\phi : A \to k$ un morphisme d'anneaux.

1. On suppose φ surjectif. Montrer que $\ker(\phi)$ est un idéal maximal de A.
2. En général, que peut-on dire de $\ker(\phi)$?
3. On suppose φ injectif. Montrer que $\operatorname{im}(\phi)$ est un sous-anneau intègre de k, et que son corps des fractions s'identifie à un sous-corps de k.

Exercice 8

Soit A un anneau commutatif, F, G des polynômes de $A[X]$ avec G unitaire de degré $d \geq 1$.

1. Montrer par récurrence sur le degré de F qu'il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $A[X]$ tels que $F = QG + R$ avec $\deg R < d$.
2. Montrer sur un exemple la nécessité de supposer G unitaire.
3. On note x la classe de X dans la A-algèbre $A[X]/(G)$. Montrer que tout élément y de $A[X]/(G)$ s'écrit de manière unique sous la forme $y = \sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i$ avec $a_0, \ldots, a_{d-1} \in A$.

Exercice 8

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$, et soit $P \in k[X]$ un polynôme qui n'est pas un carré.

1. Montrer que l'anneau $A = k[X, Y]/(Y^2 - P(X))$ est intègre.
2. On note $\pi : k[X, Y] \to A$ la projection canonique. Montrer que l'idéal $(\pi(X))$ de A est premier si et seulement si $P(0)$ n'est pas un carré dans k.
3. On suppose P de degré impair ≥ 3. Montrer que $\pi(X)$ est irréductible dans A.
4. En déduire que $k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - 1)$ n'est pas factoriel.

Exercice 9

1. Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ est isomorphe à $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + 1)$.
2. Si k est un corps, montrer que les morphismes d'anneaux $\phi : \mathbf{Z}[i] \to k$ sont en bijection avec les racines carrées de -1 dans k.
3. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbf{F}_{p^2}$.

On note $\alpha \in \mathbf{F}_{p^2}$ une racine carrée de -1, et $\phi : \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{F}_{p^2}$ le morphisme d'anneaux associé.

4. Montrer que si $p \equiv 3 \pmod 4$, alors ϕ est surjectif.
5. Montrer que si $p \equiv 1 \pmod 4$, alors $\operatorname{im}(\phi) = \mathbf{F}_p$.
6. Déterminer un générateur de $\ker(\phi)$ pour $p = 3$, puis pour $p = 5$.

Exercice 10

1. Pour $z \in \mathbf{Z}[i]$, on note $N(z) = |z|^2$. Montrer que si z divise z' dans $\mathbf{Z}[i]$, alors $N(z)$ divise $N(z')$ dans $\mathbf{Z}$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $\mathbf{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$ et $\mathbf{Z}[j]^\times = \{\pm 1, \pm j, \pm j^2\}$ (on note ici $j = e^{2i\pi/3}$).
3. Montrer que 2 est associé à un carré dans $\mathbf{Z}[i]$.
4. Montrer que 3 est associé à un carré dans $\mathbf{Z}[j]$.
5. Montrer que le groupe $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est infini.

Exercice 11

Soit $(G, +)$ un groupe abélien. On note $\operatorname{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G.

1. Montrer que $(\operatorname{End}(G), +, \circ)$ est un anneau (non nécessairement commutatif).
2. Que vaut $\operatorname{End}(\mathbf{Z})$? Et $\operatorname{End}(G)$ si G est cyclique ?
3. Montrer que $\operatorname{End}(\mathbf{Z}^n)$ est isomorphe à $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$.
4. En déduire que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ s'identifie au groupe des automorphismes de $(\mathbf{Z}^n, +)$.