Formes quadratiques

Réduction de Gauss

Exercice 1.

1. Pour chacune des formes quadratiques suivantes, donner une décomposition en somme de carrés et calculer leur rang, noyau, et discriminant.
   (a) $q_1(x, y, z) = (x + y)^2 - z^2$ sur K^3 ;
   (b) $q_2(x, y, z) = xy + yz + zx$ sur K^3 ;
   (c) $q_3(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + xy - xz$ sur K^3.
2. On prend $K = \mathbb{R}$. Pour chacune des formes quadratiques ci-dessus, donner leur signature, un sous-espace maximal sur lequel elles sont définies positives, et un sous-espace maximal sur lequel elles sont définies négatives.

Exercice 2.

1. Exprimer les formes quadratiques suivantes comme une somme de carrés et donner leur rang, leur noyau, et leur discriminant.
   (a) $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)^2$ sur $M_n(K)$;
   (b) $M \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMM)$ sur $M_n(K)$;
   (c) $M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ sur $M_n(K)$.
2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de signature (r, s). Calculer la signature de $M \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMSM)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (Signature et mineurs principaux)

Soit (E, q) un espace quadratique. On suppose que q est non dégénérée.

1. Soit δ le déterminant d'une matrice de q. Soit H un hyperplan de E et $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H orthogonale pour q. Montrer qu'il existe $e_n \in E$ tel que $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et tel que la matrice de q dans la base $\mathbf{e}$ soit diagonale de déterminant δ.
2. Pour une matrice $A \in M_n(K)$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note Δ_i le i-ième mineur principal de A, c'est-à-dire le déterminant de la matrice $(A_{k,\ell})_{k,\ell\in[\![1,i]\!]}$.
   Soit $S \in S_n(K)$ la matrice de q dans une base de E. On suppose que tous les mineurs principaux de S sont non nuls. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de q dans cette base soit diagonale égale à
   $$\mathrm{diag}\left(\Delta_1(S), \frac{\Delta_2(S)}{\Delta_1(S)}, \ldots, \frac{\Delta_n(S)}{\Delta_{n-1}(S)}\right).$$
3. On garde les notations et les hypothèses de la question précédente. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Montrer que la signature de q est égal à $(n - s, s)$ où s est le nombre de changements de signes dans la suite $(1, \Delta_1(S), \Delta_2(S), \ldots, \Delta_n(S))$.
4. Montrer qu'une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Formes quadratiques réelles

Exercice 4. (Cauchy-Schwarz)

Soit (E, q) un espace quadratique réel avec $q \neq 0$.

1. Montrer l'équivalence entre ces trois propriétés :

(a) q est anisotrope ;

(b) q est définie positive ou définie négative ;

(c) q vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x, y \in E$, $b(x,y)^2 \leqslant q(x)q(y)$ avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

2. Montrer que $\ker(q) = C(q)$ si et seulement si q est positive ou négative.

Exercice 5.

Soit (E, q) un espace quadratique complexe. Justifier que $\mathrm{Re}(q) : x \mapsto \mathrm{Re}(q(x))$ est une forme quadratique sur E vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et calculer sa signature en fonction du rang de q.

Exercice 6. (Topologie de l'espace des formes quadratiques réelles)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour r, $s \in [\![0, n]\!]$ tels que $r + s \leqslant n$, on note $\mathcal{Q}_{r,s}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de signature (r, s).

1. Montrer que $\mathcal{Q}_{n,0}(E)$ et $\mathcal{Q}_{0,n}(E)$ sont ouverts dans $\mathcal{Q}(E)$.

2. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{Q}_{r,s}(E)$ contient $X := \bigcup\limits_{r' \leqslant r, s' \leqslant s} \mathcal{Q}_{r',s'}(E)$.

3. On va montrer que l'adhérence de $\mathcal{Q}_{r,s}(E)$ est égale à X.

(a) On montre dans cette question que l'ensemble des formes quadratiques q telles que $r(q) \geqslant r + 1$ (*resp.* $s(q) \geqslant s + 1$) est ouvert dans $\mathcal{Q}(E)$.
Soit $q \in \mathcal{Q}_{r',s'}(E)$ avec $r' \geqslant r + 1$, et soit F_+ un sous-espace maximal où q est définie positive. En utilisant l'application $\mathcal{Q}(E) \to \mathcal{Q}(F_+)$ qui à une forme quadratique associe sa restriction à F_+, construire un voisinage ouvert de q dans $\mathcal{Q}(E)$ composé uniquement de formes q' telles que $r(q') \geqslant r + 1$. En déduire le résultat.

(b) Établir que X est fermé dans $\mathcal{Q}(E)$, et conclure.

Pour aller plus loin

Exercice 7. (Sous-espaces totalement isotropes)

Soit q une forme quadratique de rang r sur un espace vectoriel E de dimension n. On note ϕ la forme polaire de q.

On appelle *sous-espace totalement isotrope* (ou *SETI*) un sous-espace F de E tel que pour tout $x \in F$, $q(x) = 0$. On appelle *sous-espace totalement isotrope maximal* (ou *SETIM*) un SETI F maximal pour l'inclusion.

1. Montrer que F est un SETI si et seulement si $\phi_{F \times F}$ est nulle.

2. Donner un exemple de forme quadratique non nulle dans K^3 admettant un SETI de dimension 2 non trivial (i.e. contenant strictement le noyau).

3. Soit F un SETI de (E, q). Montrer que F est inclus dans un SETIM.

4. Démontrer que $\dim(F) \leqslant n - r/2$.

5. On suppose maintenant que q est non dégénérée. Soient F_1 et F_2 deux SETIM. On pose $F = F_1 \cap F_2$ et S_1, S_2 des supplémentaires respectifs de F dans F_1 et F_2.

(a) Montrer que $S_1 \cap S_2^\perp \subset F_2^\perp$.

(b) En déduire en utilisant la maximalité de F_2 que $S_1 \cap S_2^\perp \subset F_2$.

(c) En déduire que $S_1 \cap S_2^\perp = \{0\}$.

(d) Montrer que tous les SETIM ont la même dimension.

6. On ne suppose plus que q est non dégénérée. On note $\overline{q} : E/\ker(q) \to K$ la forme quadratique non dégénérée associée à q.

(a) Montrer que les SETI de q qui contiennent $\ker(q)$ sont en correspondance avec les SETIM de $\overline{q}$.

(b) En déduire que tous les SETIM de q ont la même dimension.

7. On suppose que $K = \mathbb{R}$ et q est de signature (r, s). Montrer que la dimension d'un SETIM de q est $\min(r, s)$.