ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2023–2024

TD Groupe linéaire

Exercice 1 — Soit k un corps, et E, F des espaces vectoriels de dimension finie sur k. Soit $u\colon E \to F$ une application linéaire. On note $u^*\colon F^* \to E^*$ la transposée de u.

1. Soit $\mathbf{e}$ une base de E, et $\mathbf{f}$ une base de F. Montrer :
$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}^*,\mathbf{e}^*}(u^*) = {}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u).$$
2. Montrer les égalités :
$$\ker(u^*) = \mathrm{im}(u)^\perp \qquad \mathrm{im}(u^*) = \ker(u)^\perp.$$
3. Montrer que u est injective (resp. surjective) si et seulement si u^* est surjective (resp. injective).
4. Déterminer des équations indépendantes pour le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ défini par $F = \mathrm{Vect}((1,3,-2,2),(1,-1,0,1))$.

Exercice 2 — Écrire la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ comme produit de matrices de transvection dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Exercice 3 — Décomposition LU —

Soit k un corps. Dans cet exercice, on montre que si $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ est une matrice dont tous les mineurs principaux sont inversibles, alors A s'écrit de manière unique $A = LU$, où L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, et U est triangulaire supérieure. On rappelle que les mineurs principaux sont les déterminants des matrices obtenues à partir de A en ne gardant que les k premières lignes et colonnes ($1 \leq k \leq n$). On procède par récurrence sur n.

1. Supposons $n > 1$. Écrivons A comme une matrice par blocs $\left(\begin{smallmatrix} A' & B \\ {}^tC & d \end{smallmatrix}\right)$ où A' est une matrice carrée de taille $n-1$. Chercher des matrices par blocs L et U vérifiant les conditions voulues et en déduire l'existence de la décomposition.
2. Montrer l'unicité de la décomposition.
3. Estimer le coût de la décomposition LU, en termes de nombre d'opérations dans k.

Exercice 4 — Classes de conjugaison de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ —

On décrit ici complètement les classes de conjugaison du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, mais pas dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.

2. Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{tr}(g)^2 > 4$. Montrer que g est conjuguée dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ à une unique matrice de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{smallmatrix}\right)$ avec $|\lambda| > 1$.
3. Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{tr}(g)^2 = 4$. Montrer que g est conjuguée à exactement une des matrices suivantes : $\pm I_2$, $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
4. Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{tr}(g)^2 < 4$. Montrer que g est conjuguée à une unique matrice de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ et non égale à $\pm I_2$.
5. Que peut-on dire de la décomposition d'Iwasawa des matrices trouvées ci-dessus ?

Exercice 5 — Morphismes de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ —

Le but de cet exercice est de montrer que le seul morphisme continu de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ est le morphisme trivial. Soit f un tel morphisme.

1. Montrer que $f(A) = 0$ si $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ est d'ordre fini. En déduire $f(\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que
$$f\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix}\right) = \alpha \log r \qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \beta t \qquad (r > 0, t \in \mathbf{R}).$$
3. Montrer que $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{smallmatrix}\right)$ est conjuguée à son inverse dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. En déduire $\alpha = 0$.
4. Montrer que $\beta = 0$ et conclure.

Exercice 6 — Sous-groupes compacts de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ —

Le but de cet exercice est de montrer que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbf{R})$.

On va d'abord montrer le lemme suivant : *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, K un compact convexe de E, et H un sous-groupe compact de $GL(E)$ laissant stable K. Alors H fixe un point de K.*

1. Démontrer le lemme lorsque H est fini.
2. Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur E. Montrer que $N(x) = \max_{u\in H}\|u(x)\|$ est bien définie, et est une norme H-invariante sur E.
3. Montrer que N est strictement convexe : si $N(x+y) = N(x) + N(y)$ alors x et y sont positivement liés.
4. Démontrer le lemme.
5. Soit maintenant G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On fait agir G sur l'espace $E = S_n$ des matrices symétriques réelles par $g \cdot M = gM^tg$. En appliquant le lemme avec K égal à l'enveloppe convexe de l'orbite de I_n, montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbf{R})$.
6. Montrer que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $U_n(\mathbf{C})$.