TD Polynômes en une indéterminée : irréductibilité

Exercice 1

Soit A un anneau commutatif. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps. Expliciter un idéal non principal de $\mathbf{Z}[X]$, de $K[X, Y]$.

Exercice 2

Montrer que l'anneau $\mathbf{C}[X^2, X^3]$ n'est pas factoriel.

Exercice 3

1. Soit K un corps et $P \in K[X]$ de degré 2 ou 3. Montrer que P est irréductible si et seulement si P n'a pas de racine dans K.
2. Quels sont les polynômes irréductibles de degré 2 de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$?
3. En déduire un critère pour déterminer si un polynôme de degré ≤ 5 de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$ est irréductible.
4. *Application.* montrer que $P = X^5 + X^3 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 4

1. Factoriser le polynôme $P = X^4 + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{F}_2[X]$, $\mathbf{F}_3[X]$.
2. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Montrer que le groupe $\mathbf{F}_{p^2}^\times$ possède un élément d'ordre 8.
3. En déduire que $X^4 + 1$ admet une racine dans $\mathbf{F}_{p^2}$, puis que $X^4 + 1$ est réductible dans $\mathbf{F}_p[X]$.

Exercice 5

Factoriser $P = 2X^3 - 2X^2 + 6X - 6$ dans $\mathbf{Z}[X]$.

Exercice 6

Résoudre l'équation $x^2 + 14x + 5 = 0$ dans $\mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$. Le polynôme $X^2 + 14X + 5$ est-il irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$?

Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer que le polynôme $P = X^n - X - 1$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ pour $n \geq 2$.

1. Traiter les cas $n = 2$ et $n = 3$.
2. On suppose $n \geq 4$. Montrer que les racines de P dans $\mathbf{C}$ sont simples et n'appartiennent pas à $\mathbf{Q}$.
3. Si Q est un diviseur de P dans $\mathbf{Z}[X]$, on pose

$$S(Q) = \sum_{Q(z)=0} z - \frac{1}{z}.$$

Montrer que $S(Q) \in \mathbf{Z}$. Que vaut $S(P)$?

4. On suppose $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbf{Q}[X]$ unitaires de degré ≥ 2. Montrer que Q et R sont dans $\mathbf{Z}[X]$.
5. Si z est une racine de P, montrer que $\Re(z - \frac{1}{z}) > \frac{1}{|z|^2} - 1$.
6. En déduire $S(Q) \geq 1$ et conclure.

Exercice 8

Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire. On suppose $P = Q_1 Q_2$ avec $Q_1, Q_2 \in \mathbf{Q}[X]$ unitaires. Montrer que Q_1 et Q_2 appartiennent à $\mathbf{Z}[X]$.

On pourra utiliser le lemme de Gauss : $c(P_1 P_2) = c(P_1)c(P_2)$ pour tous $P_1, P_2 \in \mathbf{Z}[X]$.

Exercice 9

Déterminer un polynôme dans $\mathbf{Q}[X]$ de degré 4 dont $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est racine. Montrer que ce polynôme est irréductible.