ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2023–2024

TD Polynômes symétriques

Exercice 1

Exprimer les polynômes suivants de $\mathbf{Z}[X,Y,Z]$ en termes des polynômes symétriques élémentaires : $X^2+Y^2+Z^2$; $X^2(Y+Z)+Y^2(Z+X)+Z^2(X+Y)$.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire. On pose $P = \prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$ avec $\alpha_i \in \mathbf{C}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $\Delta_n(P) = \prod_{i=1}^{d}(\alpha_i^n - 1)$.

1. Montrer que $\Delta_n(P) \in \mathbf{Z}$.
2. Calculer $\Delta_2(P)$ et $\Delta_3(P)$ pour $P = X^3 - X - 1$.
3. Montrer que si P n'a pas de racine sur le cercle unité, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\Delta_n(P)|^{1/n} = \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)$.

Exercice 3

Pour tout monôme P de $\mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]$, le *symétrisé* ΣP de P est la somme des éléments de l'orbite de P sous l'action du groupe $\mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que le polynôme symétrique élémentaire Σ_k $(1 \leq k \leq n)$ est le symétrisé d'un monôme.
2. Montrer que tout polynôme symétrique $P \in \mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de monômes symétrisés.
3. Exprimer en termes des polynômes symétriques élémentaires les polynômes suivants, à l'aide de la méthode de Waring :
   (a) ΣX_1^2 $(n \geq 2)$;
   (b) $\Sigma X_1^2 X_2$, ΣX_1^3 $(n \geq 3)$;
   (c) $\Sigma X_1^2 X_2 X_3$, $\Sigma X_1^2 X_2^2$, $\Sigma X_1^3 X_2$, ΣX_1^4 $(n \geq 4)$.

Exercice 4

Soit $\displaystyle\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j) \in \mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]$.

1. Montrer que Δ est antisymétrique : pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\sigma \cdot \Delta = \varepsilon(\sigma)\Delta$.
2. Pour $n=2$ et $n=3$, exprimer Δ^2 en termes des polynômes symétriques élémentaires.
3. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]$ antisymétrique s'écrit de manière unique $P = \Delta \cdot Q$ avec $Q \in \mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]$ symétrique (on pourra commencer par le cas $n=2$).

Exercice 5

Soit $P \in K[X_1,\dots,X_n]$ un polynôme homogène symétrique, que l'on écrit sous la forme $P = Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$. Le polynôme Q est-il alors homogène ?

Exercice 6 (Sommes de Newton)

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. On considère le polynôme $P(T) = \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i T) \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n][T]$.

1. Exprimer les coefficients de $P(T)$ en termes des polynômes symétriques élémentaires.
2. Démontrer la formule suivante dans $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n][[T]]$:

$$\frac{-TP'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i T}{1 - X_i T} = \sum_{k \geq 1} S_k T^k.$$

3. En déduire, par multiplication, les identités

$$S_k + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \Sigma_j S_{k-j} + (-1)^k k \Sigma_k = 0 \qquad (k \geq 1),$$

   avec la convention $\Sigma_p = 0$ pour $p > n$.
4. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 en termes des Σ_k.
5. Montrer que Σ_k est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Q}$ en $S_1, \ldots, S_k$.

Exercice 7 (Fractions rationnelles symétriques)

Soit K un corps. On fait agir le groupe $\mathfrak{S}_n$ sur $K(X_1, \ldots, X_n)$ par permutation des variables. On note $K(X_1, \ldots, X_n)^{\mathfrak{S}_n}$ le sous-corps formé des fractions rationnelles symétriques

1. Soit $F \in K(X_1, \ldots, X_n)^{\mathfrak{S}_n}$. Montrer que F s'écrit sous la forme $\frac{P}{Q}$ avec P et Q dans $K[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.
2. Soit $\phi : K(T_1, \ldots, T_n) \to K(X_1, \ldots, X_n)^{\mathfrak{S}_n}$ le morphisme de corps qui est l'identité sur K et envoie T_i sur Σ_i pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que ϕ est bien défini et est un isomorphisme de corps.