ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2023–2024

TD Quotients, dualité

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels considérés sont sur un corps fixé k.

Exercice 1 — Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace de E. On note $\pi\colon E \to E/F$ l'application canonique. Soit S un sous-espace vectoriel de E. Monter que S est un supplémentaire de F dans E si et seulement si $\pi|_S\colon S \to E/F$ est un isomorphisme.

Exercice 2 — Soient F_1, F_2 des sous-espaces d'un espace vectoriel E. Montrer que F_1+F_2 est naturellement isomorphe à un quotient de $F_1 \times F_2$, et expliciter le sous-espace par lequel on quotiente.

Exercice 3 — Soient E et E' des espaces vectoriels, et soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $\pi\colon E \to E/F$ l'application canonique.

1. Montrer que l'application linéaire
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(E/F, E') &\to \mathrm{Hom}(E, E') \\ f &\mapsto f \circ \pi \end{aligned}$$
est injective, et décrire son image.
2. En déduire une description du dual de E/F.

Exercice 4 — Le but de cet exercice est de déterminer le groupe $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, où $m, n \geqslant 1$ sont des entiers.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ s'identifie au groupe $\{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : mx = 0\}$.
3. En déduire que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ s'identifie à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ avec $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$.

Exercice 5 — Sous-groupes d'un quotient —
Soit G un goupe, et N un sous-groupe distingué de G.

1. Construire une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G/N, et l'ensemble des sous-groupes de G contenant N.
2. Montrer que cette bijection préserve l'inclusion ainsi que le caractère distingué.

Exercice 6 — Quotients abéliens du groupe symétrique —
Soit G un groupe abélien, supposé isomorphe à un quotient $\mathfrak{S}_n/N$, où N est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que tout élément g de G vérifie $g^2 = 1$.
2. Montrer que G est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 7 — On note T le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(k)$ défini par $T = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in k\}$.

1. Montrer que l'application $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto (c, d)$ induit une bijection entre $T\backslash\mathrm{SL}_2(k)$ et $k^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Ce résultat est-il valable si on remplace k par un anneau R ? On rappelle que $\mathrm{SL}_2(R) = \{M \in M_2(R) : \det M = 1\}$.

Exercice 8 —

1. Soient λ et μ des formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'elles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.
2. Montrer que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire sur E.

Exercice 9 — Soit E un espace vectoriel, et λ, μ des formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\lambda(x)\mu(x) \neq 0$.

Exercice 10 — Déterminer des équations indépendantes pour le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \mathrm{Vect}((1, 3, -2, 2), (1, -1, 0, 1))$.

Exercice 11 — Soit E un espace vectoriel de dimension n. On considère l'application $\iota\colon E \to E^{**}$ définie par $\iota(x) = (\lambda \mapsto \lambda(x))$.

1. Montrer que ι est un isomorphisme.
2. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que f^{**} s'identifie à f, via l'isomorphisme ι.
3. Soit F un sous-espace de E. Montrer que $F^{\perp\perp}$ s'identifie à F, via l'isomorphisme ι.

Exercice 12 — Soient E, F des espaces vectoriels de dimension finie, et $u\colon E \to F$ une application linéaire.

1. Soit $\mathbf{e}$ une base de E, et $\mathbf{f}$ une base de F. Montrer :
$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}^*,\mathbf{e}^*}(u^*) = {}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u).$$
2. Montrer les égalités :
$$\ker(u^*) = \mathrm{im}(u)^{\perp} \qquad \mathrm{im}(u^*) = \ker(u)^{\perp}.$$
3. Montrer que u est injective (resp. surjective) si et seulement si u^* est surjective (resp. injective).

Exercice 13 — Exprimer la transposée d'une composition d'applications linéaires.

Exercice 14 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace de E. On note $i\colon F \to E$ l'inclusion, et $\pi\colon E \to E/F$ l'application canonique.

1. Montrer que i^* induit un isomorphisme $E^*/F^\perp \cong F^*$.
2. En déduire $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
3. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.
4. Si f est diagonalisable (respectivement, trigonalisable), en est-il de même pour f^* ? Peut-on expliciter une base de diagonalisation ou de trigonalisation pour f^* ?
5. Montrer que f et f^* ont même polynôme caractéristique. En déduire que si f admet la valeur propre $a \in k$, alors f^* aussi.

Exercice 15 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\phi\colon E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique. On définit

$$N = \ker(L_\phi) = \{x \in E : \forall y \in E,\ \phi(x, y) = 0\}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\bar{\phi}$ sur E/N telle que pour tout $x, y \in E$, on ait $\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(x, y)$.
2. Montrer que $\bar{\phi}$ est non dégénérée.

Exercice 16 —

1. Montrer que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon M_n(k) \times M_n(k) \to k$$

définie par $\langle M, M' \rangle = \mathrm{Tr}(MM')$, est un accouplement non dégénéré.

2. On suppose k de caractéristique $\neq 2$. Soit S_n (resp. A_n) le sous-espace de $M_n(k)$ formé des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $S_n^\perp = A_n$ et $A_n^\perp = S_n$.