Démonstration par Goncharov et Levin de la conjecture de Zagier pour $L(E,2)$

François BRUNAULT

Mardi 25 septembre 2001

Stage de DEA sous la direction de Loïc MEREL

Résumé

Dans le cas des courbes elliptiques, la conjecture de Zagier affirme que la valeur en $s=2$ de la fonction L d'une courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$, est égale, à un facteur rationnel non nul près, à $\pi D_q(l)$, où D_q est le dilogarithme elliptique (défini sur $E(\mathbf{C})$), et l est un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel sur E. Cette conjecture a été démontrée en 1998 par Goncharov et Levin. Ils ont en outre donné des conditions suffisantes sur un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel sur E pour que son image par le dilogarithme elliptique appartienne à $\frac{1}{\pi}L(E,2)\mathbf{Q}$. Ce dernier résultat dépend cependant de la conjecture de Bloch-Beilinson. Le problème de l'effectivité de la conjecture de Zagier n'est donc pas encore résolu, bien que l'on ait une méthode pour trouver, étant donnée une courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$, des diviseurs $\mathbf{Q}$-rationnels l sur E qui sont de très bons candidats.

Dans l'introduction nous définissons la fonction L de Hasse-Weil d'une courbe elliptique E sur $\mathbf{Q}$ ainsi que le dilogarithme elliptique D_q, de manière à pouvoir énoncer les résultats de Goncharov et Levin. Les sections (2) et (3) définissent un complexe elliptique motivique $B(E/\bar{\mathbf{Q}};3)$, et font le lien entre ce complexe et la K-théorie de E. La section (4) est consacrée à la démonstration proprement dite de la conjecture. Les sections (5) et (6) démontrent des résultats techniques utilisés dans (3) et (4). L'appendice est une introduction à la notion de biextension.

Table des matières

1 Introduction.

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ et $p \in \mathbf{Z}$ un nombre premier. Si E a bonne réduction en p, on note $\tilde{E}_p$ la réduction de E à $\mathbf{F}_p$ et on pose

$$a_p = p + 1 - \operatorname{Card} \tilde{E}_p(\mathbf{F}_p),$$
$$\chi_p(X) = 1 - a_p X + pX^2,$$

$$L_p(E, s) = \frac{1}{\chi_p(p^{-s})} = \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}}$$

pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Si E a réduction multiplicative déployée (resp. multiplicative non déployée, additive), on pose

$$\chi_p(X) = 1 - X \qquad (\text{resp. } \chi_p(X) = 1 + X,\ \chi_p(X) = 1),$$

$$L_p(E, s) = \frac{1}{\chi_p(p^{-s})}$$

pour $\operatorname{Re} s > 0$.

Définition 1.1. *Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$. On appelle* fonction L de Hasse-Weil de E *la fonction*

$$L(E, s) = \prod_{p \text{ premier}} L_p(E, s)$$

définie et holomorphe pour $\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}$.

Définition 1.2. *Le* dilogarithme *est le prolongement analytique de la série entière*

$$Li_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{1}$$

définie sur l'ouvert $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

Une manière de construire un tel prolongement est de considérer le revêtement universel (X, x_0) de l'espace pointé $(\mathbf{C}\backslash\{0, 1\}, \frac{1}{2})$. Sur X est définie de façon naturelle la fonction $Li_1(z) = -\log(1 - z)$. En effet si $c \in X$ est la classe d'un chemin reliant $\frac{1}{2}$ à z dans $\mathbf{C}\backslash\{0, 1\}$, on pose

$$Li_1(c) = Li_1^{[c]}(z) = Li_1(\frac{1}{2}) + \int_c \frac{dw}{1 - w}.$$

D'autre part, sur l'ouvert $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\}$, on a $Li_2'(z) = \frac{1}{z} Li_1(z)$, ce qui permet de prolonger Li_2 de manière unique à X. On peut voir le dilogarithme Li_2 comme une fonction holomorphe multivaluée sur $\mathbf{C}\backslash\{0, 1\}$.

Le groupe de Galois du revêtement $X \to \mathbf{C}\backslash\{0, 1\}$ est isomorphe au groupe libre engendré par les boucles c_0 et c_1 autour des points 0 et 1 (cf. figure).

Le dilogarithme vérifie les relations de monodromie suivantes : pour tout $z \in \mathbf{C}\backslash\{0,1\}$, et pour tout chemin c reliant $\frac{1}{2}$ à z dans $\mathbf{C}\backslash\{0,1\}$, on a :

$$Li_2^{[c_0 c]}(z) = Li_2^{[c]}(z) \qquad \text{et} \qquad Li_2^{[c_1 c]}(z) = Li_2^{[c]}(z) - 2i\pi \log^{[c]}(z)$$

où $c_i c$ désigne le composé des chemins c_i et c.

Bloch et Wigner ont défini une version univaluée du dilogarithme.

Définition 1.3. *On pose pour* $z \in \mathbf{C}\backslash\{0,1\}$ *et* $c : \frac{1}{2} \to z$ *:*

$$D(z) = \operatorname{Im} Li_2^{[c]}(z) + \log|z| \operatorname{Im} \log^{[1-c]}(1-z)$$

où $1-c$ *est le symétrique du chemin* c *par rapport au point* $\frac{1}{2}$*. Cette expression ne dépend pas du chemin* c *choisi, comme on le vérifie en utilisant les relations de monodromie du logarithme et du dilogarithme. La fonction* D *est appelée* fonction de Bloch-Wigner.

Propriétés :

- $D : \mathbf{C}\backslash\{0,1\} \to \mathbf{R}$ est analytique réelle. Elle se prolonge par continuité à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ en posant $D(0) = D(1) = D(\infty) = 0$.
- Si $0 < |z| < 1$ on peut calculer $D(z)$ en utilisant l'expression (1) de Li_2 en série entière et la détermination principale de l'argument de $1-z$. Ainsi $D(z) = \operatorname{Im} Li_2(z) + \log|z| \arg(1-z)$.
- Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $D(\bar{z}) = -D(z)$. En particulier D est nulle sur l'axe réel $\mathbf{R}$.
- Pour tout $z \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, $D(1/z) = -D(z)$ et $D(1-z) = -D(z)$.

Le dilogarithme elliptique a été étudié pour la première fois par Bloch. Voici sa définition :

Définition 1.4. *Soit* E *une courbe elliptique définie sur* $\mathbf{C}$*. On fixe un isomorphisme* $E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)$ *où* $\tau \in \mathbf{C}$ *vérifie* $\operatorname{Im}\tau > 0$*. On pose* $q = \exp(2i\pi\tau)$*. On a* $|q| < 1$ *et* $E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$*. Pour tout* $x \in \mathbf{C}^*$*, on pose*

$$D_q(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} D(q^n x).$$

D_q *induit une fonction continue* $E(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$*, appelée* dilogarithme elliptique*. Cette fonction dépend a priori du choix de* q *et de l'isomorphisme* $E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$*.*

Si $l = \sum_{j=1}^r n_j\{P_j\}$ est un diviseur sur $E(\mathbf{C})$, on pose

$$D_q(l) = \sum_{j=1}^r n_j D_q(P_j).$$

Notations. Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$.

Si K est un corps de nombres, on note $E(K)$ le groupe des points K-rationnels de E.

Nous appellerons *diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel sur E*, toute combinaison linéaire formelle finie

$$l = \sum_{P \in E(\bar{\mathbf{Q}})} n_P \{P\},$$

invariante par $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, avec $n_P \in \mathbf{Z}$. Pour un tel diviseur l, on note $\mathbf{Q}(l)$ le sous-corps de $\bar{\mathbf{Q}}$ engendré par les coordonnées des points P tels que $n_P \neq 0$ (ce corps ne dépend pas de l'équation de Weierstraß choisie).

Nous noterons $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(E)$ le groupe des diviseurs $\mathbf{Q}$-rationnels sur E. On a une injection canonique $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(E) \subset E(\mathbf{C})$, ce qui permet de définir le dilogarithme elliptique $D_q(l)$ d'un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel l sur E.

Soient K un corps de nombres et v une place de K. On note $|.|_v$ la valeur absolue normalisée de K associée à v [Sil1, VIII, §5, Definition p. 206]. On note $h_v : E(K)\backslash\{0\} \to \mathbf{R}$ la hauteur locale associée à $|.|_v$ [Sil2, VI, Thm 1.1]. Il est commode de poser $h_v(0) = 0$.

Soient A un anneau commutatif et M un A-module. Nous noterons $T_A M$ (resp. $S_A M, \Lambda_A M$) l'algèbre tensorielle (resp. symétrique, extérieure) de M. Si n est un entier naturel, nous noterons $T_A^n M$ (resp. $S_A^n M, \Lambda_A^n M$) le sous-A-module de $T_A M$ (resp. de $S_A M, \Lambda_A M$) placé en degré n [Bou, Algèbre, III, §5, §6, §7]. Lorsqu'aucun indice n'est précisé, nous convenons que $A = \mathbf{Z}$.

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats de Goncharov et Levin. Nous commençons par la version dite faible de la conjecture de Zagier.

Théorème 1.5. *Soit E une courbe elliptique modulaire définie sur $\mathbf{Q}$. Alors il existe un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel $l = \sum_{j=1}^{r} n_j \{P_j\}$ sur E et un nombre rationnel non nul α tels que*

$$L(E, 2) = \alpha \pi D_q(l)$$

et vérifiant de plus les trois conditions suivantes

(a) : $\sum_{j=1}^{r} n_j P_j^3 = 0$ *dans* $S^3 E(\bar{\mathbf{Q}})$*;*

(b) : *Pour toute place v de $\mathbf{Q}(l)$, on a*

$$\sum_{j=1}^{r} n_j h_v(P_j) \otimes P_j = 0 \text{ dans } \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} E(\bar{\mathbf{Q}});$$

(c) : *Pour tout nombre premier p tel que E a réduction multiplicative déployée en p, on a une* condition d'intégralité *sur l, cf. [Gon, pp. 394-395 formule (4), p. 418 formule (32)] et le travail de Schappacher et Scholl [Sch2].*

Pour énoncer le second résultat de Goncharov et Levin, nous avons besoin d'introduire les régulateurs de Bloch et Beilinson. Commençons par celui de Bloch [Blo, §8.1].

Soit $*$ le produit dans l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[E(\bar{\mathbf{Q}})]$. Pour tout diviseur $D = \sum_{P \in E(\bar{\mathbf{Q}})} n_P \{P\}$, posons $D^- = \sum_{P \in E(\bar{\mathbf{Q}})} n_P \{-P\}$.

Soit $\widetilde{\beta}$ l'homomorphisme de Bloch

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta} : \mathbf{Q}(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(E)^* &\to \mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(E) \\ f \otimes g &\mapsto \mathrm{div}(f) * \mathrm{div}(g)^-.\end{aligned} \tag{2}$$

Par composition avec le dilogarithme elliptique, on a un homomorphisme

$$D_q \circ \widetilde{\beta} : \mathbf{Q}(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(E)^* \to \mathbf{R}.$$

Pour tout schéma X et tout entier naturel n, nous noterons $K_n(X)$ le n-ième groupe de K-théorie de Quillen de X. K_n est un foncteur contravariant de la catégorie des schémas dans la catégorie des groupes abéliens [Qui]. Rappelons le théorème de Matsumoto : pour tout corps k, on a un isomorphisme

$$K_2(k) = \frac{k^* \otimes_{\mathbf{Z}} k^*}{< x \otimes (1-x),\ x \in k \backslash \{0,1\} >}.$$

Le théorème fondamental de Bloch est le suivant : l'homomorphisme $D_q \circ \widetilde{\beta}$ induit un homomorphisme $K_2(\mathbf{Q}(E)) \to \mathbf{R}$. D'autre part, la K-théorie de Quillen fournit un homomorphisme $K_2(E) \to K_2(\mathbf{Q}(E))$. On obtient donc un homomorphisme

$$K_2(E) \to \mathbf{R}.$$

C'est par définition la *partie imaginaire du régulateur de Bloch.* Voici une autre façon de voir les choses. L'application $\widetilde{\beta}$ induit un homomorphisme

$$\beta : K_2(E) \to \frac{\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(E)}{< \widetilde{\beta}(f \otimes (1-f)),\ f \in \mathbf{Q}(E) \backslash \{0,1\} >}. \tag{3}$$

Le résultat de Bloch signifie que l'on peut définir le dilogarithme elliptique sur ce quotient de $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(E)$. La partie imaginaire du régulateur de Bloch s'obtient alors en composant β et le dilogarithme elliptique.

Le régulateur de Beilinson (39) est un homomorphisme

$$r_{\mathcal{D},q} : K_2(E) \to \mathbf{C}$$

dépendant du choix d'un isomorphisme $E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. On peut faire le lien entre régulateur de Beilinson et dilogarithme elliptique. Le calcul de la section (4), tiré de [Gon, §3.3, p. 416], montre que pour tout $\gamma \in K_2(E)$, on a :

$$\mathrm{Im}\, r_{\mathcal{D},q}(\gamma) = -\frac{1}{4\pi} D_q(\beta(\gamma)).$$

L'application β définie en (3) est une *application régulateur universelle*, dans le sens où la composition $D_q \circ \beta$ coïncide, à un facteur près, avec la partie imaginaire du régulateur de Beilinson.

Remarque. Il est possible de construire une fonction J_q sur $E(\mathbf{C})$ telle que la composition $J_q \circ \beta$ coïncide, au même facteur près, avec la partie réelle du régulateur de Beilinson [Blo, §8.1].

Soit $\mathcal{E}$ un modèle minimal, propre et régulier de E sur $\mathbf{Z}$. On définit le sous-groupe des éléments entiers de $K_2(E)$ par la formule

$$K_2(E)_{\mathbf{Z}} := \operatorname{Im}(K_2'(\mathcal{E}) \to K_2(E)).$$

Cette définition ne dépend pas du choix du modèle $\mathcal{E}$. La conjecture de Bloch-Beilinson s'énonce ainsi :

$$r_{\mathcal{D},q}(K_2(E)_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) = \frac{i}{\pi^2} L(E,2)\mathbf{Q}. \tag{4}$$

On a alors la version "effective" suivante de la conjecture de Zagier (dite version forte) :

Théorème 1.6. *Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$. On suppose vraie la conjecture de Bloch-Beilinson (4). Alors pour tout diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel l sur E satisfaisant aux conditions (a), (b), (c) du théorème (1.5), il existe $\alpha \in \mathbf{Q}$ tel que*

$$D_q(l) = \frac{\alpha}{\pi} L(E,2).$$

Remarque. On peut éventuellement avoir $\alpha = 0$: considérer par exemple le diviseur $l = \{0\}$, ou bien $l = \{P\} + \{-P\}$ avec $P \in E(\mathbf{Q})$.

Esquissons la preuve du théorème (1.5). Nous nous appuyons sur un théorème de Beilinson [Bei1, Bei2] qui affirme que pour toute courbe elliptique E modulaire définie sur $\mathbf{Q}$, il existe un élément $\gamma_0 \in K_2(E)_{\mathbf{Z}}$ et un nombre rationnel non nul α tels que

$$r_{\mathcal{D},q}(\gamma_0) = \frac{i\alpha}{\pi^2} L(E,2).$$

Or la partie imaginaire du régulateur de Beilinson se calcule à l'aide du dilogarithme elliptique (cf. plus haut). On a en particulier

$$r_{\mathcal{D},q}(\gamma_0) = -\frac{1}{4\pi} D_q(l_0)$$

où l_0 est un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel sur E. En combinant ces deux résultats, on obtient

$$L(E,2) \in \pi D_q(l_0)\mathbf{Q}^*.$$

Il reste donc à montrer que le diviseur l_0 satisfait aux conditions (a), (b), (c) du théorème (1.5). Pour montrer les conditions (a) et (b), on utilise de façon essentielle le fait que l_0 provient d'un élément $\gamma_0 \in K_2(E)$. En ce qui concerne la condition (c), on utilise le fait que $\gamma_0 \in K_2(E)_{\mathbf{Z}}$.

2 Le groupe $B_2(E/k)$ et ses propriétés.

Soit k un corps parfait et E une courbe elliptique sur k. Le but de cette partie est de construire un groupe abélien $B_2(E/k)$ muni d'une suite exacte courte :

$$0 \to k^* \xrightarrow{i} B_2(E/k) \xrightarrow{p} T^2E(k) \to 0. \tag{5}$$

Nous définirons également un homomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}[E(k)] &\to B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}] \\ \{P\} &\mapsto \{P\}_2 \end{aligned} \tag{6}$$

tel que pour tout $P \in E(k)$, on ait $p(\{P\}_2) = P \otimes P$.

Le groupe $B_2(E/k)$ provient de la biextension donnée par le fibré de Poincaré sur $E \times \mathrm{Pic}^0(E)$. Pour tout $(x, y) \in E(k) \times E(k)$, l'ensemble $p^{-1}(x \otimes y) \subset B_2(E/k)$ est un k^*-torseur. La fonction $P \in E(k) \mapsto \{P\}_2 \in B_2(E/k)$ est une généralisation de la fonction thêta définie dans le cadre d'une courbe elliptique sur $\mathbf{C}$. Nous renvoyons à l'appendice pour les notions de torseur et de biextension.

Notations. Soit $\mathrm{Pic}^0_k(E)$ le groupe des classes d'isomorphisme de k-fibrés en droite de degré zéro sur E. On note $\mathrm{Div}_k(E) \subset \mathbf{Z}[E(\bar{k})]$ le groupe des diviseurs k-rationnels sur E, et $\mathrm{Div}^0_k(E)$ le sous-groupe des diviseurs k-rationnels de degré zéro sur E. Si $E_{(0)}$ désigne l'ensemble des points fermés du schéma E, on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Div}_k(E) \cong \mathbf{Z}[E_{(0)}]$. Rappelons que l'on a une suite exacte [Sil1, II, Exercise 2.13]

$$0 \to k^* \to k(E)^* \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^0_k(E) \to \mathrm{Pic}^0_k(E) \to 0.$$

Pour un diviseur $l = \sum_{P \in E(\bar{k})} n_P\{P\} \in \mathrm{Div}_k(E)$, et pour un point $P \in E(\bar{k})$, on pose $v_P(l) = n_P$. On appelle *support de* l, et on note $\mathrm{Supp}(l)$, l'ensemble des $P \in E(\bar{k})$ tels que $v_P(l) \neq 0$. Deux diviseurs $l, m \in \mathrm{Div}_k(E)$ seront dits *étrangers* lorsque $\mathrm{Supp}(l) \cap \mathrm{Supp}(m) = \emptyset$, propriété que nous nous permettrons d'écrire $l \cap m = \emptyset$.

Soit $f \in k(E)^*$. Si $P \in E(\bar{k})$ n'appartient pas à $\mathrm{Supp}(\mathrm{div}\, f)$, on peut parler de $f(P) \in k(P)^* \subset \bar{k}^*$, où $k(P)$ est le corps résiduel de E en P. Par suite, si l est un diviseur dans $\mathrm{Div}_k(E)$ tel que l et $\mathrm{div}\, f$ sont étrangers, on peut poser

$$f(l) = \prod_{P \in E(\bar{k})} f(P)^{v_P(l)} \in k^*$$

puisque f et l sont k-rationnels.

Définition 2.1. *Soit L, M des k-fibrés en droite de degré zéro sur E. On note $[L, M]$ le k-espace vectoriel engendré par les symboles $\langle l, m\rangle$ où l (resp. m) parcourt l'ensemble des diviseurs représentant L (resp. M), avec l et m étrangers, et quotienté par les relations suivantes :*

$$\langle l + \mathrm{div}\, f, m\rangle = f(m)\ \langle l, m\rangle \qquad \textit{et} \qquad \langle l, m + \mathrm{div}\, g\rangle = g(l)\ \langle l, m\rangle \tag{7}$$

pour tous diviseurs l, m représentant L, M et toutes fonctions rationnelles $f, g \in k(E)^*$ tels que $l \cap m = \emptyset$, $\operatorname{div} f \cap m = \emptyset$ et $l \cap \operatorname{div} g = \emptyset$.

Remarquons que pour $c \in k^*$ et $l \in \mathrm{Div}_k(E)$, on a $c(l) = c^{\deg l}$. En particulier si $l \in \mathrm{Div}_k^0(E)$, on a $c(l) = 1$. Cela permet de lever l'ambiguïté dans (7).

Proposition 2.2. *$[L, M]$ est un k-espace vectoriel de dimension 1 et définit donc un k^*-torseur.*

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3. *Soient $l \in \mathrm{Div}_k^0(E)$ un diviseur k-rationnel sur E, et F un ensemble fini de points fermés du schéma E. Alors il existe $l' \in \mathrm{Div}_k^0(E)$ linéairement équivalent à l et tel que $(\operatorname{Supp} l') \cap F = \emptyset$.*

Démonstration. Nous noterons $\equiv$ l'équivalence linéaire des diviseurs k-rationnels sur E. On peut toujours choisir $P \in E(k)$ tel que $l \equiv \{P\} - \{0\}$ (cf. l'isomorphisme (8)).

Supposons que k est infini et fixons une équation de Weierstraß pour E. Notons $(x(Q) : y(Q) : 1) \in \mathbf{P}^2(\bar{k})$ les coordonnées d'un point $Q \in E(\bar{k})$. Soient a et b quelconques dans k. Considérons les fonctions k-rationnelles $x - a$ et $y - b$ sur E. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x - a) &= -2\{0\} + \{Q_a\} + \{Q'_a\} \\ \operatorname{div}(y - b) &= -3\{0\} + \{R_b\} + \{R'_b\} + \{R''_b\} \end{aligned}$$

avec $x(Q_a) = x(Q'_a) = a$ et $y(R_b) = y(R'_b) = y(R''_b) = b$. Puisque k est infini, on peut choisir a et b de telle sorte que $a \notin x(F \backslash \{0\})$ et $b \notin y(F \backslash \{0\})$. En posant $f = (x - a)/(y - b)$, il vient

$$\operatorname{div} f = \{0\} + D$$

où D est un diviseur k-rationnel évitant 0 et F. En particulier $\{0\} \equiv -D$. En considérant la translation k-rationnelle de f par P (et pour un nouveau choix de a et b), on trouve un diviseur D' évitant P et F tel que $\{P\} \equiv -D'$. On a alors $l \equiv \{P\} - \{0\} \equiv D - D'$ et ce dernier diviseur évite F.

Supposons maintenant que k est un corps fini. Rappelons que $l \equiv \{P\} - \{0\}$ avec $P \in E(k)$. Soit p un nombre premier quelconque ne divisant pas $\operatorname{Card} E(k)$. Notons k_p l'unique extension intermédiaire entre k et $\bar{k}$ de degré p. En utilisant les bornes de Hasse-Weil [Sil1, V, Thm 1.1], on montre que pour tout p assez grand, il existe $Q \in E(k_p) \backslash E(k)$. En particulier $[k(Q) : k] = p$. Notons $Q_1, \ldots, Q_p$ les conjugués de Q sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Par hypothèse sur p il existe $P' \in E(k)$ tel que $p\, P' = P$. Alors

$$\{P\} - \{0\} \equiv p\, (\{P'\} - \{0\}) \equiv \sum_{j=1}^{p} \{P' + Q_j\} - \{Q_j\}.$$

Il suffit maintenant de choisir p supérieur à tous les $[k(R) : k]$ lorsque R parcourt F.

$\square$

Démonstration de la proposition. Soit W le k-espace vectoriel engendré par les $\langle \lambda, \mu \rangle$ où λ et μ sont des diviseurs étrangers représentant respectivement L et M. Construisons une application k-linéaire

$$\phi : W \to k$$

telle que ϕ soit non nulle et telle que le noyau de ϕ contienne les relations (7). Fixons l, m représentant L, M tels que l, m soient étrangers (c'est possible d'après le lemme (2.3)). Posons $\phi(\langle l, m \rangle) = 1$. Définissons maintenant $\phi(\langle l', m' \rangle)$ où l', m' sont d'autres représentants de L, M étrangers. D'après le lemme (2.3), on peut trouver l_0 représentant L tel que $l_0 \cap m = l_0 \cap m' = \emptyset$. Écrivons $l' = l_0 + \operatorname{div} f'$, $m' = m + \operatorname{div} g$ et $l_0 = l + \operatorname{div} f$. On fait le calcul formel suivant, modulo les relations (7) :

$$\langle l', m' \rangle = f'(m') \ \langle l_0, m' \rangle = f'(m')g(l_0) \ \langle l_0, m \rangle = f'(m')g(l_0)f(m) \ \langle l, m \rangle.$$

Ce calcul peut se schématiser ainsi

$$\begin{array}{ccccc} \langle l, m \rangle & \longrightarrow & \langle l_0, m \rangle & & \\ & & \big\downarrow & & \\ & & \langle l_0, m' \rangle & \longrightarrow & \langle l', m' \rangle \end{array}$$

Suite à ce calcul on définit $\phi(\langle l', m' \rangle) = f'(m')g(l_0)f(m)$. Il est important de vérifier que cette définition ne dépend pas du l_0 choisi. Choisissons un autre représentant l_1 de L vérifiant $l_1 \cap m = l_1 \cap m' = \emptyset$. En écrivant $l' = l_1 + \operatorname{div} h'$, $m' = m + \operatorname{div} g$ et $l_1 = l + \operatorname{div} h$, il vient modulo (7) :

$$\langle l', m' \rangle = h'(m')g(l_1)h(m) \ \langle l, m \rangle.$$

Écrivons $l_1 = l_0 + \operatorname{div} \phi$. On a alors $f' = h'\phi$ et $h = f\phi$ (modulo k^*). Il suit

$$\begin{aligned} h'(m')g(l_1)h(m) &= h'(m')g(l_0)g(\operatorname{div} \phi)h(m) \\ &= h'(m')g(l_0)\phi(\operatorname{div} g)h(m) \\ &= h'(m')g(l_0)\frac{\phi(m')}{\phi(m)}h(m) \\ &= f'(m')g(l_0)f(m). \end{aligned}$$

L'égalité $g(\operatorname{div} \phi) = \phi(\operatorname{div} g)$ est une conséquence de la loi de réciprocité de Weil sur $E \times_k \bar{k}$ (pour une démonstration cf. [Sil1, II, Exercice 2.11]). Ainsi $\phi(\langle l', m' \rangle)$ ne dépend pas du choix de l_0. On vérifie ensuite que ϕ annule les relations (7). Pour la deuxième de ces relations, il est nécessaire d'utiliser à nouveau le lemme (2.3) et la loi de réciprocité de Weil.

□

Remarque. Nous avons en outre montré que pour tous diviseurs l, m étrangers, l'élément $\langle l, m \rangle$ est non nul dans le k-espace vectoriel $[L, M]$. Il définit donc un élément du k^*-torseur sous-jacent $[L, M]$.

Nous disposons maintenant d'une famille de k^*-torseurs $[L, M]$, où (L, M) parcourt $E(k) \times E(k)$. Nous avons pour cela fait l'identification entre les points k-rationnels de E et les classes d'isomorphisme de k-fibrés en droite de degré zéro sur E :

$$
\begin{aligned}
E(k) &\xrightarrow{\sim} Pic_k^0(E) \\
P &\mapsto [\{P\} - \{0\}].
\end{aligned} \tag{8}
$$

Nous allons maintenant appliquer la proposition de l'appendice pour construire le groupe $B_2(E/k)$. Montrons que l'isomorphisme de k^*-torseurs suivant est bien défini :

$$
\begin{aligned}
[L_1, M] \times^{k^*} [L_2, M] &\to [L_1 + L_2, M] \\
\langle l_1, m\rangle \times \langle l_2, m\rangle &\mapsto \langle l_1 + l_2, m\rangle
\end{aligned} \tag{9}
$$

où l_1, l_2, m sont des diviseurs vérifiant $l_1 \cap m = l_2 \cap m = \emptyset$ (d'après le lemme (2.3), il est clair que de tels diviseurs existent). Si l_1 et l_2 sont fixés, l'isomorphisme (9) ne dépend pas de m (choisi tel que $l_1 \cap m = l_2 \cap m = \emptyset$). Si m est fixé, (9) ne dépend pas non plus de (l_1, l_2). Or, si l'on considère deux triplets (l_1, l_2, m) et (l'_1, l'_2, m'), il existe, toujours par (2.3), un diviseur m_0 représentant M tel que $l_1 \cap m_0 = l_2 \cap m_0 = l'_1 \cap m_0 = l'_2 \cap m_0 = \emptyset$. Ainsi l'isomorphisme (9) est bien défini. On définit de même

$$
\begin{aligned}
[L, M_1] \times^{k^*} [L, M_2] &\to [L, M_1 + M_2] \\
\langle l, m_1\rangle \times \langle l, m_2\rangle &\mapsto \langle l, m_1 + m_2\rangle.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que les isomorphismes (9), (10) satisfont aux cinq conditions de compatibilité énoncées dans la proposition de l'appendice. On en déduit la définition suivante :

Définition 2.4. *Soit E une courbe elliptique définie sur un corps parfait k. On note $B_2(E/k)$ l'extension de $T^2E(k)$ par k^* déduite des k^*-torseurs $[L, M]$, avec $L, M \in E(k)$, et des isomorphismes de bilinéarité (9), (10), au moyen de la proposition de l'appendice. On obtient donc la suite exacte courte (5) cherchée :*

$$0 \to k^* \xrightarrow{i} B_2(E/k) \xrightarrow{p} T^2E(k) \to 0.$$

Nous allons maintenant définir le symbole $\langle l, m\rangle$ lorsque l et m ne sont pas nécessairement étrangers.

Rappelons que nous notons $E_{(0)}$ l'ensemble des points fermés du schéma E. Pour $x \in E_{(0)}$, notons $\mathfrak{O}_{E,x}$ l'anneau local de E en x et $\mathfrak{M}_{E,x}$ son idéal maximal. Notons encore $k(x) = \mathfrak{O}_{E,x}/\mathfrak{M}_{E,x}$ le corps résiduel de E en x et $\operatorname{Cot}_x E = \mathfrak{M}_{E,x}/\mathfrak{M}_{E,x}^2$ l'espace cotangent à E en x. Cet espace cotangent définit un $k(x)^*$-torseur que nous noterons $\operatorname{Cot}_x^* E$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le $k(x)^*$-torseur sous-jacent à $\mathfrak{M}_{E,x}^n/\mathfrak{M}_{E,x}^{n+1}$ s'identifie canoniquement à $(\operatorname{Cot}_x^* E)^n$ (on utilise le fait que $\mathfrak{O}_{E,x}$ est un anneau local régulier). Pour $f \in k(E)^*$, nous pouvons donc définir

$$\widetilde{f}(x) \in (\operatorname{Cot}_x^* E)^{v_x(f)}.$$

C'est le *terme dominant de f en x*. On a la formule $\widetilde{fg}(x) = \widetilde{f}(x) \times \widetilde{g}(x)$.

Soient l, m des diviseurs k-rationnels sur E. On définit un k^*-torseur $V(l,m)$ par la formule

$$V(l,m) = \prod_{x \in E_{(0)}}^{k^*} (N_{k(x)/k}(\operatorname{Cot}_x^* E))^{v_x(l)v_x(m)}.$$

Dans cette formule $N_{k(x)/k}(\operatorname{Cot}_x^* E)$ désigne le k^*-torseur déduit de $\operatorname{Cot}_x^* E$ par l'homomorphisme norme $k(x)^* \to k^*$. Il est à noter que le produit ci-dessus ne fait intervenir qu'un nombre fini de k^*-torseurs non triviaux. De plus, la définition de $V(l,m)$ est bilinéaire en l, m.

Remarque. Il serait également possible de définir $V(l,m)$ par un produit tensoriel indexé par $x \in E(\bar{k})$. On obtiendrait alors un $\bar{k}^*$-torseur muni d'une structure k-rationnelle.

Soient $f \in k(E)^*$ et $l \in \operatorname{Div}_k(E)$. On définit

$$\widetilde{f}(l) = \prod_{x \in E_{(0)}} (N_{k(x)/k}(\widetilde{f}(x)))^{v_x(l)} \in V(\operatorname{div} f, l).$$

À titre d'exemple, la loi de réciprocité de Weil pour des fonctions $f, g \in k(E)^*$ dont les diviseurs ne sont pas nécessairement étrangers s'écrit

$$\widetilde{f}(\operatorname{div} g) = \left(\prod_{x \in E(\bar{k})} (-1)^{v_x(f)v_x(g)} \right) \widetilde{g}(\operatorname{div} f)$$

avec l'identification $V(\operatorname{div} f, \operatorname{div} g) = V(\operatorname{div} g, \operatorname{div} f)$. Pour une démonstration, cf. [Serre, III.1.4, Proposition 6].

Soient $l, m \in \operatorname{Div}_k^0(E)$ (non nécessairement étrangers) représentant respectivement $L, M \in \operatorname{Pic}_k^0(E)$. Nous allons définir $\langle l, m \rangle \in V(l,m) \times^{k^*} [L, M]$. Soit $l = l' + \operatorname{div} f$ tel que $l' \cap m = \emptyset$. On a $\widetilde{f}(m) \times \langle l', m \rangle \in V(\operatorname{div} f, m) \times^{k^*} [L, M]$. Or $V(l,m) \cong V(l',m) \times^{k^*} V(\operatorname{div} f, m) \cong V(\operatorname{div} f, m)$ puisque $V(l', m) \cong k^*$. On peut donc poser

$$\langle l, m \rangle = \widetilde{f}(m) \times \langle l', m \rangle \in V(l,m) \times^{k^*} [L, M].$$

Cette définition ne dépend pas du l' choisi. Les formules (7) se généralisent ainsi

$$\langle l + \operatorname{div} f, m \rangle = \widetilde{f}(m) \times \langle l, m \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle l, m + \operatorname{div} g \rangle = \epsilon \widetilde{g}(l) \times \langle l, m \rangle. \quad (11)$$

On a posé $\epsilon = \prod_{x \in E(\bar{k})} (-1)^{v_x(l)v_x(m)}$. Ces formules sont valables pour tous diviseurs l, m et toutes fonctions rationnelles f, g.

Lemme 2.5. *Soit*

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$$

une équation de Weierstraß pour E, avec $a_j \in k$. On note Δ le discriminant et ω la forme différentielle invariante associés à cette équation [Sil1, III, §1, p.46]. Alors pour tout $P \in E_{(0)}$, la trivialisation

$$\tau_P := \Delta\ \omega_P^{12} \in (\mathrm{Cot}_P^* E)^{12}$$

est indépendante du choix de l'équation de Weierstraß. De plus, les trivialisations τ_P ci-dessus sont compatibles aux translations k-rationnelles de E.

Démonstration. Soit $P \in E_{(0)}$. D'après [Sil1, III, Proposition 1.5], la forme différentielle rationnelle $\omega \in \Omega_{k(E)/k}$ induit un élément $\omega_P \in (\Omega_{E/k})_P \backslash \{0\} = \mathrm{Cot}_P^* E$. En utilisant [Sil1, III, Table 1.2], on constate que

$$\Delta\omega_P^{12} \in (\mathrm{Cot}_P^* E)^{12}$$

ne dépend pas du choix de l'équation de Weierstraß. La deuxième partie du lemme découle du fait que ω est une forme différentielle invariante.

□

Si T est un k^*-torseur, nous noterons $T \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$ l'image directe de T par l'homomorphisme $k^* \to k^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$. Ainsi $T \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$ est un $(k^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}])$-torseur.

Définition 2.6. *Soient $l, m \in \mathrm{Div}_k(E)$. On appelle* trivialisation canonique de $V(l,m) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$, *et on note $\tau_{\,l,m}$, l'élément*

$$\tau_{\,l,m} = \prod_{x \in E_{(0)}} (N_{k(x)/k} \tau_{\,x})^{v_x(l) v_x(m)} \times \frac{1}{12} \in V(l,m) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]. \tag{12}$$

Si de plus l, m sont de degré zéro et représentent respectivement $L, M \in \mathrm{Pic}_k^0(E)$, on définit le crochet $\langle l,m\rangle' \in [L,M] \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}] \subset B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$ par la formule

$$\langle l,m\rangle = \tau_{\,l,m} \times \langle l,m\rangle'. \tag{13}$$

On a immédiatement

$$\begin{aligned} \tau_{\,l_1+l_2,m} &\cong \tau_{\,l_1,m} \times \tau_{\,l_2,m} \\ \tau_{\,l,m_1+m_2} &\cong \tau_{\,l,m_1} \times \tau_{\,l,m_2}. \end{aligned}$$

On en déduit les relations suivantes, valables dans $B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$:

$$\begin{aligned} \langle l_1 + l_2, m\rangle' &= \langle l_1, m\rangle' + \langle l_2, m\rangle' \\ \langle l, m_1 + m_2\rangle' &= \langle l, m_1\rangle' + \langle l, m_2\rangle'. \end{aligned} \tag{14}$$

Définition 2.7. *Soient $f \in k(E)^*$ et $l \in \mathrm{Div}_k(E)$. On définit $\widehat{f}(l) \in k^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$ par la formule*

$$\widetilde{f}(l) = \widehat{f}(l)\ \tau_{\,\mathrm{div}\, f, l}. \tag{15}$$

On notera la similitude entre les définitions (13) et (15). Ce n'est pas un hasard : on a pour tous $f, g \in k(E)^*$ et $l, m \in \mathrm{Div}_k^0(E)$ les identités

$$\langle \operatorname{div} f, m\rangle' = i(\widehat{f}(m)) \qquad \text{et} \qquad \langle l, \operatorname{div} g\rangle' = i(\epsilon\widehat{g}(l)) \tag{16}$$

On a posé

$$\epsilon = \prod_{x \in E(\bar{k})} (-1)^{v_x(l)v_x(g)}.$$

Les identités (16) résultent de (11), (13) et (15).

Notons enfin que le symbole $\widehat{f}(l)$ est bilinéaire en f et l.

Nous pouvons maintenant définir l'homomorphisme $\mathbf{Z}[E(k)] \to B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$.

Définition 2.8. *Rappelons que nous faisons l'identification* $E(k) \cong \mathrm{Pic}_k^0(E)$*. On appelle* fonction thêta généralisée sur $E(k)$*, et l'on note* θ*, l'homomorphisme*

$$\begin{aligned} \theta : \mathbf{Z}[E(k)] &\to B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}] \\ \{P\} &\mapsto \langle \{P\} - \{0\}, \{P\} - \{0\}\rangle'. \end{aligned}$$

Pour tout $P \in E(k)$*, on pose* $\{P\}_2 = \theta(\{P\})$*.*

Si p désigne la surjection $B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}] \to T^2E(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$, on a par définition du crochet généralisé $p(\{P\}_2) = (P \otimes P) \otimes 1$ pour tout $P \in E(k)$.

3 Le complexe elliptique motivique.

Nous travaillerons dans toute cette section avec une courbe elliptique E sur un corps k *algébriquement clos de caractéristique zéro.*

Goncharov a défini dans [Gon] un groupe abélien $B_3(E/k)$ et un *complexe elliptique motivique* $B(E/k; 3)$:

$$B_3(E/k) \to B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k) \to E(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda^2 E(k) \to \Lambda^3 E(k) \to 0.$$

Il a calculé sa cohomologie (modulo 2-torsion) en fonction de la K-théorie de la courbe elliptique E [Gon, Thm 1.5]. Nous nous contenterons de définir ce complexe et de donner des éléments générateurs du noyau de la première flèche. Pour cela, nous utiliserons l'homomorphisme *symbole modéré* de la K-théorie de E:

$$\begin{aligned} K_2(k(E)) &\xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in E(k)} K_1(k(x)) \\ \{f, g\} &\mapsto \left((-1)^{v_x(f)v_x(g)} \frac{f^{v_x(g)}}{g^{v_x(f)}}(x) \right)_{x \in E(k)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Les résultats de cette section (Corollaire 3.13), associés à la proposition 5.1, permettent de faire apparaître les conditions (a), (b), (c) du théorème (1.5).

Nous commençons par quelques lemmes utiles par la suite.

Lemme 3.1. *Les groupes abéliens $B_2(E/k)$ et $E(k)$ sont divisibles. En conséquence le groupe abélien $B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k)$ est uniquement divisible : c'est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Rappelons que le produit tensoriel de deux groupes abéliens divisibles est uniquement divisible. Il suffit donc de démontrer que $E(k)$ et $B_2(E/k)$ sont divisibles. Puisque k est algébriquement clos de caractéristique zéro, le groupe $E(k)$ est divisible. En particulier $T^2E(k)$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel. En utilisant la suite exacte (5) et la divisibilité de k^*, on obtient la divisibilité de $B_2(E/k)$.

□

Le groupe $B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$ s'identifie donc au quotient de $B_2(E/k)$ par le sous-groupe des éléments annulés par une puissance de 6. En particulier, pour tout $P \in E(k)$, l'expression $\{P\}_2$ est définie dans $B_2(E/k)$ modulo un élément de torsion. Cela justifie la définition suivante.

Définition 3.2. *Soit*

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta_3} : \mathbf{Z}[E(k)] &\to B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k) \\ \{P\} &\mapsto \frac{1}{2}\{P\}_2 \otimes P. \end{aligned} \tag{18}$$

On note $*$ la convolution dans l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[E(k)]$, et $I_E = \mathrm{Div}_k^0 E$ l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[E(k)]$.

Lemme 3.3. *Soit A un groupe abélien, $\mathbf{Z}[A]$ son algèbre de groupe, et I_A l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[A]$. Alors, un diviseur $\sum_{a\in A} n_a\{a\}$ appartient à I_A^2 si et seulement si*

$$\sum_{a\in A} n_a = 0 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{a\in A} n_a a = 0.$$

Démonstration. On vérifie que le produit de deux éléments de I_A satisfait aux deux conditions ci-dessus. Réciproquement soit $D = \sum_{a\in A} n_a\{a\}$ satisfaisant aux deux conditions ci-dessus. On a de façon générale

$$\begin{aligned} \big(\{a\} - \{0\}\big) * \big(\{b\} - \{0\}\big) &= \{a+b\} - \{a\} - \{b\} + \{0\} \\ &= \big(\{a+b\} - \{0\}\big) - \big(\{a\} - \{0\}\big) - \big(\{b\} - \{0\}\big). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} D = \sum_{a\in A} n_a(\{a\} - \{0\}) &\equiv \sum_{a\in A} \{n_a a\} - \{0\} \pmod{I_A^2} \\ &\equiv \{\sum_{a\in A} n_a a\} - \{0\} \equiv 0 \pmod{I_E^2}. \end{aligned}$$

□

En appliquant cela à l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[E(k)]$, on voit qu'un diviseur $\sum_{j=1}^{r} n_j\{P_j\} \in \mathrm{Div}_k(E)$ appartient à I_E^2 si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{r} n_j = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{r} n_j P_j = 0. \tag{19}$$

Autrement dit, I_E^2 coïncide avec l'ensemble des diviseurs principaux. On peut résumer tout cela en disant que l'on a une suite exacte courte

$$\begin{aligned} 0 \to I_E^2 \to I_E \xrightarrow{s} E(k) \to 0 \\ \{P\} \mapsto P. \end{aligned} \tag{20}$$

Définition 3.4. *Pour tout diviseur $D = \sum_{j=1}^{r} n_j\{P_j\} \in \mathbf{Z}[E(k)]$, posons*

$$D^- = \sum_{j=1}^{r} n_j\{-P_j\}.$$

On appelle application de Bloch*, et on note $\widetilde{\beta}$, l'homomorphisme*

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta} : k(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} k(E)^* \to \mathbf{Z}[E(k)] \\ f \otimes g \mapsto (\operatorname{div} f) * (\operatorname{div} g)^-. \end{aligned} \tag{21}$$

Notons $s : I_E \to E(k)$ l'homomorphisme qui à $\{P\}$ associe P.

Puisque I_E est facteur direct de $\mathbf{Z}[E(k)]$, l'homomorphisme naturel $k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E \to k^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[E(k)]$ est injectif. Compte-tenu de l'identification

$$k^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[E(k)] \cong \bigoplus_{P \in E(k)} k^*,$$

on obtient un isomorphisme

$$k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E \cong \left\{ (\lambda_P) \in \bigoplus_{P \in E(k)} k^* : \prod_{P \in E(k)} \lambda_P = 1 \right\}.$$

En particulier, et d'après la loi de réciprocité de Weil, le symbole modéré induit un homomorphisme $\partial : k(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} k(E)^* \to k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E$ (voir définition du symbole modéré en (17)).

Le théorème fondamental de cette section est le suivant. Il relie le complexe elliptique motivique au symbole modéré.

Théorème 3.5. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} k(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} k(E)^* & \xrightarrow{\partial} & k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E \\ \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\beta}} & & \big\downarrow{\scriptstyle i \otimes s} \\ \mathbf{Z}[E(k)] & \xrightarrow{\widetilde{\delta}_3} & B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Soient $f, g \in k(E)^*$. On a d'une part

$$(i \otimes s) \circ \partial(f \otimes g) = \sum_{x \in E(k)} i(\partial_x(f,g)) \otimes x$$

avec $\partial_x(f,g) = (-1)^{v_x(f)v_x(g)} \frac{f^{v_x(g)}}{g^{v_x(f)}}(x) \in k^*$. D'autre part

$$\widetilde{\delta_3} \circ \widetilde{\beta}(f \otimes g) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in E(k)} v_x(f) v_y(g) \ \{x-y\}_2 \otimes (x-y).$$

Lemme 3.6. *Pour tous $x, y \in E(k)$, on a dans $B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$:*

$$\langle \{x-y\} - \{0\}, \{x-y\} - \{0\} \rangle' = \langle \{x\} - \{y\}, \{x\} - \{y\} \rangle'.$$

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} t_\alpha : E(k) &\to E(k) \\ x &\mapsto x + \alpha \end{aligned}$$

la translation par $\alpha \in E(k)$. L'application t_α induit un homomorphisme $\mathrm{Div}_k(E) \to \mathrm{Div}_k(E)$ et un isomorphisme de k^*-torseurs $V(l,m) \to V(t_\alpha l, t_\alpha m)$. D'autre part, pour tous $L, M \in \mathrm{Pic}^0_k(E)$, on a un isomorphisme de k^*-torseurs

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : [L,M] &\to [L,M] \\ \langle l, m \rangle &\mapsto \langle t_\alpha l, t_\alpha m \rangle. \end{aligned}$$

Puisque les trivialisations $\tau_{\,l,m}$ définies en (12) sont compatibles aux translations k-rationnelles, tout revient à démontrer que ϕ_α est l'identité.

Pour cela, fixons des représentants étrangers l, m de L, M. Remarquons que pour tout $\alpha \in E(k)$, les diviseurs $t_\alpha l$ et $t_\alpha m$ sont étrangers. Considérons l'application

$$\begin{aligned} h : E(k) &\to k^* \\ \alpha &\mapsto \frac{\langle t_\alpha l, t_\alpha m \rangle}{\langle l, m \rangle}. \end{aligned}$$

Si l'on montre que h est régulière, on aura par complétude de $E(k)$ l'égalité $h = h(0) = 1$. D'autre part, puisque ϕ_α est k^*-linéaire, on a, pour tous $\alpha, \alpha' \in E(k)$:

$$h(\alpha + \alpha') = \frac{\langle t_\alpha(t_{\alpha'} l), t_\alpha(t_{\alpha'} m) \rangle}{\langle t_{\alpha'} l, t_{\alpha'} m \rangle} \frac{\langle t_{\alpha'} l, t_{\alpha'} m \rangle}{\langle l, m \rangle} = h(\alpha) h(\alpha').$$

Il suffit donc de montrer que h est régulière sur un ouvert Zariski contenant 0. Soient O_1 et O_2 des points quelconques de $E(k)$. Écrivons

$$\begin{aligned} l &= \sum_{P \in E(k)} v_P(l) \ (\{P\} - \{O_1\}) \\ m &= \sum_{Q \in E(k)} v_Q(m) \ (\{Q\} - \{O_2\}). \end{aligned}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
t_\alpha l - l &= \sum_{P \in E(k)} v_P(l) \, \big(\{P+\alpha\} - \{O_1+\alpha\} - \{P\} + \{O_1\}\big) \\
t_\alpha m - m &= \sum_{Q \in E(k)} v_Q(m) \, \big(\{Q+\alpha\} - \{O_2+\alpha\} - \{Q\} + \{O_2\}\big).
\end{aligned}
$$

Soient $f_{P,\alpha}$ et $g_{Q,\alpha}$ des fonctions rationnelles vérifiant

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} f_{P,\alpha} &= \{P+\alpha\} - \{O_1+\alpha\} - \{P\} + \{O_1\} \\
\operatorname{div} g_{Q,\alpha} &= \{Q+\alpha\} - \{O_2+\alpha\} - \{Q\} + \{O_2\}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

En utilisant les relations (7), on peut écrire

$$
\langle t_\alpha l, t_\alpha m \rangle = \left(\prod_{P \in E(k)} f_{P,\alpha}(t_\alpha m)^{v_P(l)} \right) \left(\prod_{Q \in E(k)} g_{Q,\alpha}(l)^{v_Q(m)} \right) \langle l, m \rangle
$$

à la condition que pour tous $P \in \operatorname{Supp}(l)$ et $Q \in \operatorname{Supp}(m)$,

$$
\begin{aligned}
\{P+\alpha, O_1+\alpha, P, O_1\} \cap \{Q+\alpha, O_2+\alpha\} &= \emptyset \\
\{P, O_1\} \cap \{Q+\alpha, O_2+\alpha, Q, O_2\} &= \emptyset.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Il s'agit donc de montrer que les expressions $f_{P,\alpha}(t_\alpha m)$ et $g_{Q,\alpha}(l)$ sont régulières en α au voisinage de 0. Prenons une équation de Weierstrass pour E. Notons x et y les fonctions coordonnées relatives à cette équation. La fonction explicite suivante satisfait à (22) :

$$
f_{P,\alpha}(R) := \frac{\big(x(R-P) - x(\alpha)\big)\big(x(R - \frac{P+O_1}{2}) - x(\frac{P+O_1}{2} - O_1)\big)}{x(R - \frac{P+O_1}{2}) - x(\alpha + O_1 - \frac{P+O_1}{2})}.
$$

Ici $\frac{P+O_1}{2}$ est choisi arbitrairement pour vérifier $2\frac{P+O_1}{2} = P + O_1$. Cette expression explicite de $f_{P,\alpha}$ admet la conséquence importante suivante. L'expression $f_{P,\alpha}(t_\alpha m)$ est définie et régulière en α dès que les conditions suivantes sont remplies (pour tout $P \in \operatorname{Supp}(l)$ et $Q \in \operatorname{Supp}(m)$) :

$$
\Big\{P, P \pm \alpha, \frac{P+O_1}{2}, O_1, O_1+\alpha\Big\} \cap \{Q+\alpha, O_2+\alpha\} = \emptyset. \tag{24}
$$

De même, l'expression $g_{Q,\alpha}(l)$ est définie et régulière en α dès que les conditions suivantes sont remplies (pour tout $P \in \operatorname{Supp}(l)$ et $Q \in \operatorname{Supp}(m)$) :

$$
\Big\{Q, Q \pm \alpha, \frac{Q+O_2}{2}, O_2, O_2+\alpha\Big\} \cap \{P, O_1\} = \emptyset. \tag{25}
$$

On remarque que les conditions (24) et (25) entraînent les conditions (23). On se convainc ensuite, en remarquant que $E(k)$ est infini, que l'on peut trouver des points O_1 et O_2 dans $E(k)$ tels que pour tout α appartenant à un ouvert Zariski W contenant 0, les conditions (24) et (25) soient satisfaites. Par suite h est régulière sur W.

$\square$

Suite de la démonstration du théorème (3.5).

On a $\{x-y\}_2 = \langle \{x-y\}-\{0\}, \{x-y\}-\{0\}\rangle' = \langle \{x\}-\{y\}, \{x\}-\{y\}\rangle'$. Nous continuerons à faire les calculs dans $B_2(E/k)\otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{6}]$. En écrivant $\{x\}-\{y\} = (\{x\}-\{0\})-(\{y\}-\{0\})$ et en utilisant (14) on obtient

$$\begin{aligned}
2\,\widetilde{\delta_3}\circ\widetilde{\beta}(f\otimes g) = &\sum_{x,y\in E(k)} v_x(f)v_y(g)\ \langle \{x\}-\{0\},\{x\}-\{0\}\rangle'\otimes x && (26)\\
&- \sum_{x,y\in E(k)} v_x(f)v_y(g)\ \langle \{x\}-\{0\},\{y\}-\{0\}\rangle'\otimes x && (27)\\
&- \sum_{x,y\in E(k)} v_x(f)v_y(g)\ \langle \{y\}-\{0\},\{x\}-\{0\}\rangle'\otimes x && (28)\\
&+ \sum_{x,y\in E(k)} v_x(f)v_y(g)\ \langle \{y\}-\{0\},\{y\}-\{0\}\rangle'\otimes x && (29)\\
&- \sum_{x,y\in E(k)} v_x(f)v_y(g)\ \langle \{x\}-\{0\},\{x\}-\{0\}\rangle'\otimes y && (30)\\
&+ \sum_{x,y\in E(k)} v_x(f)v_y(g)\ \langle \{x\}-\{0\},\{y\}-\{0\}\rangle'\otimes y && (31)\\
&+ \sum_{x,y\in E(k)} v_x(f)v_y(g)\ \langle \{y\}-\{0\},\{x\}-\{0\}\rangle'\otimes y && (32)\\
&- \sum_{x,y\in E(k)} v_x(f)v_y(g)\ \langle \{y\}-\{0\},\{y\}-\{0\}\rangle'\otimes y. && (33)
\end{aligned}$$

D'après

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in E(k)} v_x(f) &= \sum_{y\in E(k)} v_y(g) = 0\\
\sum_{x\in E(k)} v_x(f)\ x &= \sum_{y\in E(k)} v_y(g)\ y = 0,
\end{aligned}$$

les termes (26, 29, 30, 33) disparaissent. Il reste

$$\begin{aligned}
2\,\widetilde{\delta_3}\circ\widetilde{\beta}(f\otimes g) = &- \sum_{x\in E(k)} v_x(f)\ \langle \{x\}-\{0\},\operatorname{div} g\rangle'\otimes x\\
&- \sum_{x\in E(k)} v_x(f)\ \langle \operatorname{div} g,\{x\}-\{0\}\rangle'\otimes x\\
&+ \sum_{y\in E(k)} v_y(g)\ \langle \operatorname{div} f,\{y\}-\{0\}\rangle'\otimes y\\
&+ \sum_{y\in E(k)} v_y(g)\ \langle \{y\}-\{0\},\operatorname{div} f\rangle'\otimes y.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant appliquer les identités (16). On obtient :

$$
\begin{aligned}
2\ \widetilde{\delta_3} \circ \widetilde{\beta}(f \otimes g) = & - \sum_{x \in E(k)} v_x(f)\ i\left((-1)^{v_0(g)+v_x(g)} \widehat{g}(\{x\}-\{0\})\right) \otimes x \\
& - \sum_{x \in E(k)} v_x(f)\ i\Big(\widehat{g}(\{x\}-\{0\})\Big) \otimes x \\
& + \sum_{y \in E(k)} v_y(g)\ i\left(\widehat{f}(\{y\}-\{0\})\right) \otimes y \\
& + \sum_{y \in E(k)} v_y(g)\ i\left((-1)^{v_0(f)+v_y(f)} \widehat{f}(\{y\}-\{0\})\right) \otimes y.
\end{aligned}
$$

Utilisons maintenant la linéarité du symbole $\widehat{f}(l)$ par rapport à l. Il vient

$$
2\ \widetilde{\delta_3} \circ \widetilde{\beta}(f \otimes g) = \sum_{x \in E(k)} i\left(\widehat{f}(x)^{2v_x(g)} \widehat{g}(x)^{-2v_x(f)} (-1)^{2v_x(f)v_x(g)}\right) \otimes x \tag{34}
$$

$$
+ \sum_{x \in E(k)} i\left(\widehat{g}(0)^2 (-1)^{-v_0(g)}\right) \otimes (v_x(f)\ x) \tag{35}
$$

$$
+ \sum_{y \in E(k)} i\left(\widehat{f}(0)^{-2} (-1)^{v_0(f)}\right) \otimes (v_y(g)\ y). \tag{36}
$$

D'après $\sum_{x \in E(k)} v_x(f)\ x = \sum_{y \in E(k)} v_y(g)\ y = 0$, les termes (35) et (36) disparaissent. Pour calculer le terme (34), on utilise la linéarité du symbole $\widehat{f}(l)$ par rapport à f, et le fait que $\widehat{f}(l) = f(l)$ lorsque $\operatorname{div} f$ et l sont étrangers. Il vient

$$
\begin{aligned}
2\ \widetilde{\delta_3} \circ \widetilde{\beta}(f \otimes g) &= \sum_{x \in E(k)} i\left((-1)^{2v_x(f)v_x(g)} \frac{f^{2v_x(g)}}{g^{2v_x(f)}}(x)\right) \otimes x \\
&= 2 \sum_{x \in E(k)} i(\partial_x(f,g)) \otimes x
\end{aligned}
$$

par définition du symbole modéré. Cela achève de démontrer le théorème (3.5).

□

Définition 3.7. *On note* $R_3(E/k)$ *le sous-groupe de* $\operatorname{Div}_k(E)$ *engendré par les éléments*

- $\{0\}$*;*
- $(\operatorname{div} f) * (\operatorname{div}(1-f))^-$ $\qquad f \in k(E)\backslash\{0,1\}$*;*
- $m\left(\{P\} - m\sum_{mQ=P}\{Q\}\right)$ $\qquad P \in E(k), m \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ *(relations de distribution).*

On pose

$$
B_3(E/k) = \frac{\mathbf{Z}[E(k)]}{R_3(E/k)}.
$$

Théorème 3.8. *$\widetilde{\delta_3}$ induit un homomorphisme $\delta_3 : B_3(E/k) \to B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k)$.*

Démonstration. Il s'agit de démontrer que $\widetilde{\delta_3}(R_3(E/k)) = 0$. Il est clair que $\widetilde{\delta_3}(\{0\}) = 0$. D'autre part, si $f \in k(E)\backslash\{0, 1\}$, on a $\widetilde{\delta_3}((\operatorname{div} f) * (\operatorname{div}(1-f))^-) = (i \otimes s) \circ \partial(f \otimes (1-f))$ d'après (3.5). Puisque le symbole modéré vérifie la relation de Steinberg, on obtient $\widetilde{\delta_3}((\operatorname{div} f) * (\operatorname{div}(1-f))^-) = 0$. Enfin, si $P \in E(k)$, et $m \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta_3}\Bigg(m\Bigg(\{P\} - m \sum_{mQ=P} \{Q\}\Bigg)\Bigg) &= \frac{1}{2} m\Bigg(\{P\}_2 \otimes P - m \sum_{mQ=P} \{Q\}_2 \otimes Q\Bigg) \\ &= \frac{1}{2} m\Bigg(\{P\}_2 - \sum_{mQ=P} \{Q\}_2\Bigg) \otimes P.\end{aligned}$$

Or $m\Big(\{P\}_2 - \sum_{mQ=P}\{Q\}_2\Big) = 0$ d'après la proposition (6.1).

□

Définition 3.9. *Nous appellerons* complexe elliptique motivique*, et nous noterons $B(E/k; 3)$, le complexe suivant, placé en degrés 1 à 4 :*

$$B_3(E/k) \xrightarrow{\delta_3} B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k) \to E(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda^2 E(k) \to \Lambda^3 E(k) \to 0.$$

La deuxième flèche est par définition la composition de $B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k) \to T^2 E(k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k)$ et de $T^3 E(k) \to E(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda^2 E(k)$. La troisième flèche est par définition

$$\begin{aligned}E(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda^2 E(k) &\to \Lambda^3 E(k) \\ x \otimes (y \wedge z) &\mapsto x \wedge y \wedge z.\end{aligned}$$

Nous noterons $H^1 B(E/k; 3)$ le noyau de l'homomorphisme δ_3.

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.10. *L'application de Bloch $\widetilde{\beta} : k(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} k(E)^* \to \mathbf{Z}[E(k)]$ induit un homomorphisme surjectif*

$$\bar{\beta} : K_2(E) \to H^1 B(E/k; 3).$$

Remarque. Goncharov montre en fait un résultat plus précis que (3.10). Il décrit précisément la cohomologie du complexe $B(E/k; 3)$. Notons $H^0(E/k, K_2)$ (resp. $H^1(E/k, K_2)$) le noyau (resp. conoyau) de l'homomorphisme de K-théorie $K_2(k(E)) \xrightarrow{\partial} k^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[E(k)]$. Goncharov exprime $H^1 B(E/k; 3)$ (resp. $H^2 B(E/k; 3)$) en fonction de $H^0(E/k, K_2)$ (resp. $H^1(E/k, K_2)$). D'autre part, on montre facilement que $H^3 B(E/k; 3) = H^4 B(E/k; 3) = 0$.

Le diagramme du théorème (3.5) induit le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{array}{ccccc}
K_2(E) & \xrightarrow{\eta} & K_2(k(E)) & \xrightarrow{\partial} & k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E \\
\downarrow{\scriptstyle \bar\beta} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle i\otimes s} \\
H^1B(E/k;3) & \longrightarrow & B_3(E/k) & \xrightarrow{\delta_3} & B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k).
\end{array}
$$

La première ligne est la suite exacte de localisation de K-théorie [Qui, §5, Corollaire du théorème 5]. Il reste donc à montrer la surjectivité de $\bar\beta$. Il est à noter que seule la version forte de la conjecture de Zagier (1.6) utilise la surjectivité de $\bar\beta$.

Lemme 3.11. *Soit ϕ l'homomorphisme*

$$
\begin{aligned}
\phi : \mathbf{Z}[E(k)] &\to \mathbf{Z} \oplus E(k) \oplus S^2E(k) \oplus S^3E(k) \\
\{P\} &\mapsto (1, P, P^2, P^3).
\end{aligned}
$$

Alors ϕ est surjectif et $\operatorname{Ker}\phi = I_E^4$.

Démonstration. En utilisant la caractérisation (19) des éléments de I_E^2, on vérifie que $I_E^4 \subset \operatorname{Ker}\phi$. Il est important de remarquer ensuite que $E(k)$ est divisible, et que par conséquent $S^2E(k)$ et $S^3E(k)$ sont uniquement divisibles. De plus, $S^2E(k)$ (resp. $S^3E(k)$) est engendré par les éléments P^2 (resp. P^3), avec $P \in E(k)$. La surjectivité de ϕ résulte des identités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\phi(\{0\}) &= (1,0,0,0) \\
\phi(\{P\} - \{0\}) &= (0, P, P^2, P^3) \\
\phi(\{2P\} - 2\{P\} + \{0\}) &= (0,0,2P^2, 6P^3) \\
\phi(\{3P\} - 3\{2P\} + 3\{P\} - \{0\}) &= (0,0,0,6P^3)
\end{aligned}
$$

Montrons l'injectivité de ϕ. Posons $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Soit $l \in \mathbf{Z}[E(k)]$ tel que $\phi(l) = 0$. D'après $l \in \operatorname{Ker}\phi_0 \cap \operatorname{Ker}\phi_1$ et la caractérisation (19), on a $l \in I_E^2$. La convolution dans $\mathbf{Z}[E(k)]$ induit un homomorphisme

$$
\frac{I_E}{I_E^2} \otimes_{\mathbf{Z}} \frac{I_E}{I_E^2} \to \frac{I_E^2}{I_E^3}.
$$

Compte-tenu de $E(k) \cong I_E/I_E^2$, on obtient ainsi un homomorphisme

$$
\psi_2 : S^2E(k) \to \frac{I_E^2}{I_E^3}.
$$

On a de même un homomorphisme

$$
\psi_3 : S^3E(k) \to \frac{I_E^3}{I_E^4}.
$$

Or on a les relations suivantes, pour tout $m \in I_E^2$ et tout $m' \in I_E^3$:

$$\psi_2\left(\frac{\phi_2(m)}{2}\right) = m + I_E^3$$
$$\psi_3\left(\frac{\phi_3(m')}{6}\right) = m' + I_E^4.$$

Ces relations se démontrent en utilisant le fait que I_E^2 (resp. I_E^3) est engendré par les éléments de la forme $(\{P\} - \{0\}) * (\{Q\} - \{0\})$ (resp. $(\{P\} - \{0\}) * (\{Q\} - \{0\}) * (\{R\} - \{0\})$), avec $P, Q, R \in E(k)$. On en déduit $l \in I_E^4$.

$\square$

Lemme 3.12. *On a l'égalité* $\phi(R_3(E/k)) = \mathbf{Z} \oplus E(k) \oplus S^2E(k)$.

Démonstration. On a tout d'abord $\phi(\{0\}) = (1, 0, 0, 0)$ et

$$\phi((\operatorname{div} f) * (\operatorname{div}(1-f))^-) = 0 \text{ pour tout } f \in k(E)\backslash\{0, 1\}.$$

On a ensuite

$$\phi\left(m\left(\{P\} - m\sum_{mQ=P}\{Q\}\right)\right) = m\left(1 - m^3, (1-m^2)P, (1-m)P^2, 0\right)$$

d'où l'inclusion directe. Les relations de distribution associées à $m = -1$ permettent d'atteindre $2\mathbf{Z} \oplus S^2E(k)$. En utilisant celles asociées à $m = 2$ on complète la démonstration du lemme.

$\square$

Démonstration du théorème (3.10). Soit $l \in \mathbf{Z}[E(k)]$ tel que la classe de l dans $B_3(E/k)$ appartienne à $H^1B(E/k;3)$. Posons $l = \sum_{j=1}^r n_j\{P_j\}$.

Montrons que l vérifie la condition (a) du théorème (1.5), c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^r n_jP_j^3 = 0$ dans $S^3E(k)$. Considérons les homomorphismes

$$B_3(E/k) \to B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k) \to T^2E(k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k) \to S^3E(k).$$

La composition de ces homomorphismes envoie $[l]$ sur $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^r n_jP_j^3$, d'où le fait que l vérifie la condition (a).

D'après les deux lemmes précédents, il existe $l' \in I_E^4$ tel que

$$l \equiv l' \pmod{R_3(E/k)}.$$

On a donc $[l] = [l']$. Par surjectivité de $\widetilde{\beta} : k(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} k(E)^* \to I_E^4$, il existe $\tilde{x} \in k(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} k(E)^*$ tel que $\widetilde{\beta}(\tilde{x}) = l'$. Par suite l'image x de $\tilde{x}$ dans $K_2(k(E))$ vérifie $\beta(x) = [l']$ (égalité dans $B_3(E/k)$). Le diagramme suivant résume la situation :

$$\begin{tikzcd}
 & k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"] & k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E^2 \arrow[d] \\
K_2(E) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\bar{\beta}"] & \frac{K_2(k(E))}{K_2(k)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta"] & k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E \arrow[d, "i\otimes s"] \\
H^1B(E/k;3) \arrow[r] & B_3(E/k) \arrow[r, "\delta_3"] & B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k).
\end{tikzcd} \tag{37}$$

Ici $K_2(k)$ désigne le sous-groupe de $K_2(k(E))$ engendré par les $\{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda, \mu \in k^*$. L'application α est définie par

$$\begin{aligned} \alpha : k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E^2 &\to \frac{K_2(k(E))}{K_2(k)} \\ \lambda \otimes (\operatorname{div} f) &\mapsto [\{\lambda, f\}]. \end{aligned}$$

Remarquons que si $\operatorname{div} f' = \operatorname{div} f$, i.e. $f' = \mu f$, avec $\mu \in k^*$, alors on a $\{\lambda, f'\} = \{\lambda, f\} + \{\lambda, \mu\}$; donc α est bien définie. La commutativité du diagramme résulte de l'égalité

$$\partial(\{\lambda, f\}) = \sum_{x \in E(k)} \lambda^{v_x(f)} \otimes (\{x\} - \{0\}) = \lambda \otimes (\operatorname{div} f).$$

Remarquons aussi que $\operatorname{Im} \alpha \subset \operatorname{Ker} \beta$, puisque $\beta(\{\lambda, f\}) = 0$. Remarquons enfin que la dernière colonne du diagramme (37) est exacte. En effet, $i \otimes s$ se factorise en $k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E \to k^* \otimes_{\mathbf{Z}} E(k) \to B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k)$, la dernière flèche étant injective; et par exactitude du produit tensoriel à droite, la suite $k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E^2 \to k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E \to k^* \otimes_{\mathbf{Z}} E(k)$ est exacte.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème. Par hypothèse sur l, on a

$$(i \otimes s) \circ \partial(x) = 0.$$

Par exactitude en $k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E$, il existe $y \in k^* \otimes_{\mathbf{Z}} I_E^2$ tel que

$$\partial(x) = \partial \circ \alpha(y).$$

Par exactitude en $K_2(k(E))$, il existe $z \in K_2(E)$ tel que

$$\eta(z) = x - \alpha(y).$$

On a alors $\beta(\eta(z)) = \beta(x - \alpha(y)) = \beta(x) = [l]$.

□

Corollaire 3.13. *Soit E une courbe elliptique sur un corps k* algébriquement clos de caractéristique zéro. *On a une suite exacte*

$$K_2(E) \xrightarrow{\bar{\beta}} B_3(E/k) \xrightarrow{\delta_3} B_2(E/k) \otimes_{\mathbf{Z}} E(k). \tag{38}$$

4 Démonstration de la conjecture de Zagier pour $L(E, 2)$.

On considère dans cette section une courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$. On note $E_{\bar{\mathbf{Q}}}$ (resp. $E_{\mathbf{C}}$) l'extension des scalaires de E à $\bar{\mathbf{Q}}$ (resp. à $\mathbf{C}$).

Nous avons la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc}
K_2(E) & \xrightarrow{\eta} & K_2(\mathbf{Q}(E)) & \longleftarrow & \mathbf{Q}(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(E)^* \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & K_2(\bar{\mathbf{Q}}(E)) & \longleftarrow & \bar{\mathbf{Q}}(E)^* \otimes_{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{Q}}(E)^* \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{\beta}} \\
 & & B_3(E/\bar{\mathbf{Q}}) & \longleftarrow & \mathbf{Z}[E(\bar{\mathbf{Q}})]
\end{array}$$

Pour tout élément γ de $K_2(E)$, son image $\eta(\gamma)$ dans $K_2(\mathbf{Q}(E))$ peut s'écrire

$$\eta(\gamma) = \sum_{j=1}^{r} \{f_j, g_j\}$$

avec $f_j, g_j \in \mathbf{Q}(E)^*$. Une fois que l'on a choisi une telle écriture, on peut considérer, au moyen de l'application de Bloch, le diviseur

$$l := \widetilde{\beta}\left(\sum_{j=1}^{r} f_j \otimes g_j\right).$$

C'est un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel sur E.

Le régulateur de Beilinson est donné par la formule (cf. [Bei1, Bei2]) :

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{D},q} : K_2(E) &\to \mathbf{C} \\ \gamma &\mapsto \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{r} \int_{E(\mathbf{C})} \log|f_j| d\arg(g_j) \wedge dz. \end{aligned} \tag{39}$$

On a ici fixé un isomorphisme $E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ et $E(\mathbf{C})$ est orientée en choisissant comme base directe $(1, \tau)$. Montrons que l'intégrale ci-dessus converge. Soient $f, g \in \mathbf{C}(E)^*$ et $F = \mathrm{Supp}(\mathrm{div}\, f) \cup \mathrm{Supp}(\mathrm{div}\, g)$. Considérons la 2-forme C^∞ complexe suivante sur $E(\mathbf{C}) \backslash F$:

$$\omega = \log|f| d\arg(g) \wedge dz.$$

Examinons la convergence de l'intégrale $\int_{E(\mathbf{C})} \omega$ au voisinage d'un point $x \in F$. Posons $n = v_x(f)$ et $p = v_x(g)$. Supposons $n \neq 0$ et $p \neq 0$ (les autres cas sont similaires). Choisissons une coordonnée locale z s'annulant en x. On a

$$f(z) \sim \alpha z^n \qquad \text{et} \qquad g(z) \sim \alpha' z^p.$$

Introduisons les coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$. On a

$$\log|f| \simeq n \log r \qquad \text{et} \qquad d\arg g \simeq p\ d\theta.$$

L'intégrale en question s'écrit

$$\iint (n \log r)\ p\ d\theta \wedge dz = -\iint (n \log r)\ p\ e^{i\theta} dr \wedge d\theta$$

puisque $dz = e^{i\theta}dr + ire^{i\theta}d\theta$. La dernière intégrale converge absolument ce qui justifie la convergence de $\int_{E(\mathbf{C})} \omega$.

Définition 4.1. *Posons* $\Gamma = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau \subset \mathbf{C}$*. Pour tout* $z = u + v\tau \in \mathbf{C}$*, avec* $u, v \in \mathbf{R}$*, et tout* $\nu = m + n\tau \in \Gamma$*, posons*

$$\chi_\nu(z) = \exp\left(\frac{\pi}{\operatorname{Im}\tau}(z\bar{\nu} - \bar{z}\nu)\right) = \exp 2i\pi(-un + vm).$$

χ_ν *induit un homomorphisme* $E(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}^*$*. Lorsque* ν *parcourt* Γ*,* χ_ν *parcourt l'ensemble des caractères continus de* $E(\mathbf{C})$*.*

On appelle série d'Eisenstein-Kronecker-Lerch *la série suivante, normalement convergente sur* $E(\mathbf{C})$ *:*

$$K_{2,1,\tau}(z) = \frac{(\operatorname{Im}\tau)^2}{\pi} \sum_{\nu \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{\chi_\nu(z)}{\nu^2 \bar{\nu}}.$$

La proposition suivante permet de calculer le régulateur de Beilinson en fonction de la série d'Eisenstein-Kronecker-Lerch.

Proposition 4.2. *Soient* $f, g \in \mathbf{C}(E)^*$*. On a*

$$\int_{E(\mathbf{C})} \log|f| d\arg(g) \wedge dz = -\frac{1}{2} \sum_{P,Q \in E(\mathbf{C})} v_P(f) v_Q(g) \overline{K_{2,1,\tau}(P-Q)}.$$

Lemme 4.3. *Soit* $f \in \mathbf{C}(E)^*$ *et* $F = \operatorname{Supp}(\operatorname{div} f)$*. Il existe* $C \in \mathbf{C}$ *tel que pour tout* $z \in E(\mathbf{C}) \setminus F$*, on ait*

$$\log|f(z)| = -\frac{\operatorname{Im}\tau}{2\pi} \sum_{P \in F} v_P(f) \sum_{\nu \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{\chi_\nu(z-P)}{|\nu|^2} \quad + C.$$

Démonstration. (cf. [Wei, Chap VIII, §18])

Nous poserons $y = \operatorname{Im}\tau$ et

$$\phi(z) = -\frac{y}{2\pi} \sum_{P \in F} v_P(f) \sum_{\nu \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{\chi_\nu(z-P)}{|\nu|^2}.$$

La série intervenant dans ϕ converge au sens ordinaire, mais ne converge pas absolument. $\log|f|$ et ϕ sont des distributions sur le tore complexe $E(\mathbf{C})$. D'autre part, $\log|f|$ et ϕ sont des fonctions continues sur $E(\mathbf{C}) \setminus F$. Puisque toute distribution D sur le tore complexe vérifiant $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} D = 0$ est constante, il suffit de vérifier que $\log|f|$ et ϕ ont même image par l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$.

Nous avons d'une part

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log|f| = -i\pi \sum_{P \in F} v_P(f)\ \delta_P.$$

Cette égalité se déduit de l'harmonicité de $\log|f|$ sur $E(\mathbf{C}) \setminus F$ et du fait que $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log|z| = -i\pi\delta_0$ sur $\mathbf{C}$.

Nous avons d'autre part

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \chi_\nu = -\left(\frac{\pi}{y}\right)^2 |\nu|^2 \chi_\nu$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\ \phi(z) = \frac{\pi}{2y} \sum_{P \in F} v_P(f) \sum_{\nu \in \Gamma \setminus \{0\}} \chi_\nu(z-P).$$

Or on a l'égalité suivante au sens des distributions

$$\sum_{\nu \in \Gamma} \chi_\nu = \left(\int_{E(\mathbf{C})} dz \wedge d\overline{z} \right) \delta_0 = -2iy\ \delta_0$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\ \phi = -i\pi \sum_{P \in F} v_P(f)\ \delta_P.$$

$\square$

Démonstration de la proposition. Soit $y = \operatorname{Im} \tau$. On a

$$\frac{dg}{g} = d \log g = d \log |g| + i d \arg g.$$

Puisque $dg \wedge dz = 0$, il vient

$$I := \int_{E(\mathbf{C})} \log |f| d \arg(g) \wedge dz = i \int_{E(\mathbf{C})} \log |f| d \log |g| \wedge dz.$$

On peut maintenant utiliser le lemme précédent :

$$\begin{aligned} I &= \frac{iy^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{P,Q \in E(\mathbf{C}) \\ \nu,\nu' \in \Gamma \setminus \{0\}}} \frac{v_P(f) v_Q(g)}{|\nu|^2 |\nu'|^2} \int_{E(\mathbf{C})} \chi_\nu(z-P) d\chi_{\nu'}(z-Q) \wedge dz \\ &= \frac{iy}{4\pi} \sum_{\substack{P,Q \in E(\mathbf{C}) \\ \nu,\nu' \in \Gamma \setminus \{0\}}} \frac{v_P(f) v_Q(g)}{|\nu|^2 \overline{\nu'}} \chi_\nu(-P) \chi_{\nu'}(-Q) \int_{E(\mathbf{C})} \chi_{\nu+\nu'}(z) dz \wedge d\overline{z}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_{E(\mathbf{C})} \chi_{\nu+\nu'}(z) dz \wedge d\overline{z} = -2iy\ \delta_{\nu+\nu',0}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} I &= -\frac{y^2}{2\pi} \sum_{\substack{P,Q \in E(\mathbf{C}) \\ \nu \in \Gamma \setminus \{0\}}} \frac{v_P(f) v_Q(g)}{|\nu|^2 \overline{\nu}} \chi_\nu(P-Q) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{P,Q \in E(\mathbf{C})} v_P(f) v_Q(g) \overline{K_{2,1,\tau}(P-Q)}. \end{aligned}$$

$\square$

On peut maintenant achever le calcul de $r_{\mathcal{D},q}$. Soit $\gamma \in K_2(E)$. Écrivons $\eta(\gamma) = \sum_{j=1}^r \{f_j, g_j\} \in K_2(\mathbf{Q}(E))$. Alors

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{D},q}(\gamma) &= -\frac{1}{4i\pi} \sum_{P,Q \in E(\mathbf{C})} v_P(f) v_Q(g) \overline{K_{2,1,\tau}(P-Q)} \\ &= -\frac{1}{4i\pi} \overline{K_{2,1,\tau}(l)} \end{aligned}$$

où $l = \widetilde{\beta}(\sum_{j=1}^r f_j \otimes g_j)$ est un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel sur E. Notons que le nombre complexe $K_{2,1,\tau}(l)$ est bien défini (par linéarité), puisque l est $\mathbf{Q}$-rationnel.

Proposition 4.4. *Pour tout $P \in E(\mathbf{C})$ on a*

$$\operatorname{Re} K_{2,1,\tau}(P) = -D_q(P).$$

Démonstration. Le résultat est essentiellement démontré dans [Blo]. Il suffit de démontrer la proposition lorsque P est un point de torsion de $E(\mathbf{C})$. Posons $P = u + v\tau$, avec $u, v \in \{0, \frac{1}{C}, \ldots, \frac{C-1}{C}\}$ et $C \in \mathbf{N}^*$. Soit $f : \mathbf{Z}/C\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/C\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par

$$f(m,n) = 2i \sin 2\pi(vm - un).$$

On utilise la forme (10.3.1) du théorème 10.2.1 de [Blo]. Il en résulte après calculs

$$K_{2,1,\tau}(P) = iR_q(P)$$

où R_q est le régulateur $E(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ construit par Bloch. On a par définition $\operatorname{Im} R_q = D_q$. La proposition s'ensuit.

□

Corollaire 4.5. *Soit $\gamma \in K_2(E)$. Écrivons $\eta(\gamma) = \sum_{j=1}^r \{f_j, g_j\} \in K_2(\mathbf{Q}(E))$. Soit*

$$l = \widetilde{\beta}\left(\sum_{j=1}^r f_j \otimes g_j\right) \in \operatorname{Div}_{\mathbf{Q}} E.$$

Alors

$$\operatorname{Im} r_{\mathcal{D},q}(\gamma) = -\frac{1}{4\pi} D_q(l).$$

Démonstration du théorème (1.5). D'après le travail de Beilinson [Bei1, Bei2] (cf. aussi celui de Schappacher et Scholl [Sch1]), et puisque E est une courbe elliptique modulaire sur $\mathbf{Q}$, il existe $\gamma_0 \in K_2(E)_{\mathbf{Z}}$ tel que

$$r_{\mathcal{D},q}(\gamma_0) = \frac{i\alpha}{\pi^2} L(E,2)$$

avec $\alpha \in \mathbf{Q}^*$. Posons $\eta(\gamma_0) = \sum_{j=1}^r \{f_j, g_j\}$ avec $f_j, g_j \in \mathbf{Q}(E)^*$. Soit $l_0 = \widetilde{\beta}(\sum_{j=1}^r f_j \otimes g_j) \in \operatorname{Div}_{\mathbf{Q}} E$. Montrons que l_0 satisfait à toutes les conditions du théorème (1.5). Il est clair que l_0 est $\mathbf{Q}$-rationnel sur E.

l_0 satisfait à (a) et (b) si et seulement si son image $[l_0] \in B_3(E_{\bar{\mathbf{Q}}}/\bar{\mathbf{Q}})$ est annulée par δ_3 (cf. Définition 3.2 et Proposition 5.1). Or on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
K_2(E) & \longrightarrow & K_2(\mathbf{Q}(E)) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
K_2(E_{\bar{\mathbf{Q}}}) & \longrightarrow & K_2(\bar{\mathbf{Q}}(E)) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \bar{\beta}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\
H^1B(E/\bar{\mathbf{Q}};3) & \longrightarrow & B_3(E/\bar{\mathbf{Q}}) & \xrightarrow{\delta_3} & B_2(E/\bar{\mathbf{Q}}) \otimes_{\mathbf{Z}} E(\bar{\mathbf{Q}}).
\end{array}$$

Il en résulte que l_0 satisfait à (a) et (b). Le fait que l_0 satisfait à (c) vient du fait que $\gamma_0 \in K_2(E)_{\mathbf{Z}}$ (cf. [Gon, Sch2]). Enfin on a

$$L(E,2) = \frac{\pi^2}{i\alpha} r_{\mathcal{D},q}(\gamma_0) = \mathrm{Re}(\frac{\pi^2}{i\alpha} r_{\mathcal{D},q}(\gamma_0)) = \frac{\pi^2}{\alpha} \operatorname{Im} r_{\mathcal{D},q}(\gamma_0) = -\frac{\pi}{4\alpha} D_q(l_0).$$

□

Démonstration du théorème (1.6). Considérons un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel l sur E, vérifiant les conditions (a), (b), (c) du théorème (1.5). Soit $[l]$ l'image de l dans $B_3(E/\bar{\mathbf{Q}})$. Soit G le groupe profini $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. En prenant les invariants de la suite exacte (38) par G, on obtient le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
K_2(E_{\bar{\mathbf{Q}}})^G & \longrightarrow & B_3(E/\bar{\mathbf{Q}})^G & \longrightarrow & (B_2(E/\bar{\mathbf{Q}}) \otimes_{\mathbf{Z}} E(\bar{\mathbf{Q}}))^G \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K_2(E_{\bar{\mathbf{Q}}}) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & B_3(E/\bar{\mathbf{Q}}) & \xrightarrow{\delta_3} & B_2(E/\bar{\mathbf{Q}}) \otimes_{\mathbf{Z}} E(\bar{\mathbf{Q}}).
\end{array}$$

La ligne du bas est une suite exacte de G-modules continus. Soit donc $\bar{\gamma} \in K_2(E_{\bar{\mathbf{Q}}})$ tel que $\bar{\beta}(\bar{\gamma}) = [l]$. Le stabilisateur H de $\bar{\gamma}$ est d'indice fini n' dans G. On note γ' la somme (finie) des conjugués de γ par rapport à l'action de G. On a donc $\gamma' \in K_2(E_{\bar{\mathbf{Q}}})^G$ et $\bar{\beta}(\gamma') = n'\,[l]$. Enfin, l'homomorphisme canonique $K_2(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to (K_2(E_{\bar{\mathbf{Q}}})^G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ étant surjectif, on a finalement l'existence de $\gamma \in K_2(E)$ et $n \geq 1$ tels que

$$\bar{\beta}(\gamma) = n\,[l].$$

D'après le corollaire (4.5), il existe un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel l' sur E tel que

$$[l'] = n\,[l] \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} r_{\mathcal{D},q}(\gamma) = -\frac{1}{4\pi} D_q(l').$$

Puisque l satisfait (c), on a $\gamma \in K_2(E)_{\mathbf{Z}}$ [Gon, Sch1], et par la conjecture de Bloch-Beilinson, on en déduit $r_{\mathcal{D},q}(\gamma) \in \frac{i}{\pi^2} L(E,2)\mathbf{Q}$. D'après le lemme ci-dessous, le dilogarithme elliptique $D_q : \mathbf{Z}[E(\mathbf{C})] \to \mathbf{R}$ annule $R_3(E/\mathbf{C})$. On en déduit

$$D_q(l) = \frac{1}{n} D_q(l') = -\frac{4\pi}{n} \operatorname{Im} r_{\mathcal{D},q}(\gamma) \in \frac{1}{\pi} L(E,2)\mathbf{Q}.$$

□

Lemme 4.6. *Le dilogarithme elliptique* $D_q : \mathbf{Z}[E(\mathbf{C})] \to \mathbf{R}$ *annule le sous-groupe* $R_3(E/\mathbf{C})$.

Démonstration. On a $D_q(0) = 0$. Pour tout $f \in \mathbf{C}(E)\backslash\{0,1\}$, on a $D_q \circ \widetilde{\beta}(f \otimes (1-f)) = 0$ (cf. [Blo, Thm 8.1.2]). Enfin, le fait que D_q annule les relations de distribution se déduit du résultat analogue pour le dilogarithme classique (cf. [Oes, 3.2, (21)]).

□

Remarque. Il serait intéressant de démontrer le résultat $D_q \circ \widetilde{\beta}(f \otimes (1-f)) = 0$ à partir du théorème (3.5), sans avoir recours à la démonstration analytique de Bloch.

5 Une reformulation des conditions (a) et (b).

Proposition 5.1. *Les conditions (a) et (b) du théorème (1.5) pour un diviseur* $\mathbf{Q}$*-rationnel* $l = \sum_{j=1}^r n_j\{P_j\}$ *sur* E *sont équivalentes à l'unique condition suivante (ab) :*

$$(ab) : \sum_{j=1}^{r} n_j\{P_j\}_2 \otimes P_j = 0 \ \text{dans } B_2(E/\bar{\mathbf{Q}}) \otimes_{\mathbf{Z}} E(\bar{\mathbf{Q}}).$$

Nous fixons $l = \sum_{j=1}^r n_j\{P_j\}$, un diviseur $\mathbf{Q}$-rationnel sur E. Soit $K = \mathbf{Q}(l)$ le corps de nombres engendré par les coordonnées des points P_j tels que $n_j \neq 0$. La proposition résulte des deux lemmes suivants.

Lemme 5.2. *Les conditions (a) et (b) sont respectivement équivalentes aux conditions (a') et (b') suivantes :*

$$(a') : \sum_{j=1}^{r} n_j P_j^3 = 0 \ \text{dans } S^3E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q};$$

$$(b') : \text{Pour toute place } v \text{ de } K, \text{ on a } \sum_{j=1}^{r} n_j h_v(P_j) \otimes P_j = 0 \ \text{dans } \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} E(K).$$

La condition (ab) est équivalente à la condition suivante (ab') :

$$(ab') : \sum_{j=1}^{r} n_j\{P_j\}_2 \otimes P_j = 0 \ \text{dans } B_2(E/K) \otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

Démonstration. Considérons la condition (a). Le groupe $S^3E(\bar{\mathbf{Q}})$ est uniquement divisible. Il s'agit de montrer que l'homomorphisme canonique

$$(S^3E(K)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to S^3E(\bar{\mathbf{Q}})$$

est injectif. Si M est un groupe abélien, on vérifie qu'on a un isomorphisme (fonctoriel) $(S^3M) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong S^3_{\mathbf{Q}}(M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})$. On est donc ramenés à montrer l'injectivité de $S^3_{\mathbf{Q}}(E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}) \to S^3_{\mathbf{Q}}(E(\bar{\mathbf{Q}})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q})$. Cela résulte de l'injectivité de $E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \to E(\bar{\mathbf{Q}})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ et des propriétés de l'algèbre symétrique des espaces vectoriels.

Pour la condition (b), il suffit de constater que l'homomorphisme canonique $\mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \to \mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}} E(\bar{\mathbf{Q}})$ est injectif.

Considérons la condition (ab). La construction du groupe $B_2(E/k)$ et de la suite exacte (5) étant fonctorielle en k (nous l'admettrons dans ce mémoire), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^* & \longrightarrow & B_2(E/K) & \longrightarrow & T^2E(K) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{\mathbf{Q}}^* & \longrightarrow & B_2(E/\bar{\mathbf{Q}}) & \longrightarrow & T^2E(\bar{\mathbf{Q}}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On déduit de ce diagramme que $B_2(E/K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \to B_2(E/\bar{\mathbf{Q}})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ est injectif. Par conséquent $B_2(E/K)\otimes_{\mathbf{Z}} E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \to B_2(E/\bar{\mathbf{Q}})\otimes_{\mathbf{Z}} E(\bar{\mathbf{Q}})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ est injectif, ce qui démontre l'équivalence des conditions (ab) et (ab').

□

Lemme 5.3. *La condition (ab') est équivalente à la conjonction des conditions (a') et (b').*

Démonstration. En tensorisant la suite exacte (5) définissant $B_2(E/K)$ par le $\mathbf{Z}$-module plat $E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ on obtient la suite exacte :

$$0 \to K^*\otimes_{\mathbf{Z}} E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \xrightarrow{i\otimes\mathrm{id}} B_2(E/K)\otimes_{\mathbf{Z}} E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \xrightarrow{p\otimes\mathrm{id}} T^2E(K)\otimes_{\mathbf{Z}} E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \to 0. \quad (40)$$

On en déduit un homomorphisme

$$\begin{gathered} B_2(E/K)\otimes_{\mathbf{Z}} E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \to S^3E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \\ \sum_{j=1}^r n_j\{P_j\}_2\otimes P_j \mapsto \sum_{j=1}^r n_jP_j^3. \end{gathered}$$

Donc $(ab') \Rightarrow (a')$. D'autre part, par fonctorialité de l'homomorphisme $\mathbf{Z}[E(k)] \to B_2(E/k)$ défini dans la section (2) (admise), on a pour toute place v de K le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}[E(K_v)] & \longrightarrow & B_2(E_{K_v}/K_v) & \longrightarrow & \mathbf{R}. \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{Z}[E(K)] & \longrightarrow & B_2(E/K) & & \end{array}$$

Notons que dans ce diagramme, $E(K_v) \cong E_{K_v}(K_v))$. De plus $\{P\} \in \mathbf{Z}[E(K)]$ est envoyé sur $h_v(P) \in \mathbf{R}$. On a donc un homomorphisme

$$\begin{gathered} B_2(E/K)\otimes_{\mathbf{Z}} E(K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \to \mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \\ \sum_{j=1}^r n_j\{P_j\}_2\otimes P_j \mapsto \sum_{j=1}^r n_jh_v(P_j)\otimes P_j. \end{gathered}$$

Donc $(ab') \Rightarrow (b')$.

Réciproquement, supposons (a') et (b') vérifiées. Soit $x = \sum_{j=1}^r n_j \{P_j\}_2 \otimes P_j \in B_2(E/K) \otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. On a un homomorphisme

$$\begin{aligned} S^3 E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} &\to T^3 E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \\ xyz \otimes 1 &\mapsto \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \sigma(x \otimes y \otimes z) \right) \otimes \frac{1}{6} \\ \sum_{j=1}^r n_j P_j^3 &\mapsto \sum_{j=1}^r n_j P_j \otimes P_j \otimes P_j. \end{aligned}$$

La condition (a') entraîne $(p \otimes \mathrm{id})(x) = 0$. D'après (40), il existe $y \in K^* \otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ tel que $x = (i \otimes \mathrm{id})(y)$. Considérons la composition

$$\begin{gathered} K^* \otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}} B_2(E/K) \otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \xrightarrow{h_v \otimes \mathrm{id}} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \\ y \mapsto x \mapsto \sum_{j=1}^r n_j h_v(P_j) \otimes P_j = 0. \end{gathered}$$

Le dernier terme est égal à 0 d'après la condition (b'). Or d'après la proposition (6.2), cette composition s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} K^* \otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} &\to \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} E(K) \\ \lambda \otimes m &\mapsto \log |\lambda|_v \otimes m. \end{aligned}$$

Or on a le résultat classique suivant sur le noyau du plongement logarithmique de K. L'homomorphisme

$$\begin{aligned} K^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} &\to \bigoplus_{v \text{ place de } K} \mathbf{R} \\ \lambda \otimes 1 &\mapsto (\log |\lambda|_v)_v \end{aligned}$$

est injectif. On en déduit $y = 0$, d'où $x = 0$, et la condition (ab') est vérifiée. $\square$

6 Calculs explicites dans $B_2(E/k)$.

Proposition 6.1. *Soit E une courbe elliptique sur un corps algébriquement clos k. Pour tout $P \in E(k)$ et $m \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}$ on a la relation*

$$m \left(\{P\}_2 - \sum_{mQ=P} \{Q\}_2 \right) = 0.$$

Références. [Gon, §4.4, Corollary 4.3, pp. 425-428].

Proposition 6.2. *Soit K_v la complétion d'un corps de nombres K en une place v. Soit E une courbe elliptique sur K. Il existe un homomorphisme*

$$\phi_v : B_2(E/K_v) \to \mathbf{R}$$

tel que pour tout $P \in E(K_v) \backslash \{0\}$, on ait

$$\phi_v(\{P\}_2) = h_v(P)$$

et tel que pour tout $\lambda \in K_v^*$, on ait

$$\phi_v(i(\lambda)) = \log |\lambda|_v$$

(cf. les notations de la section (2)).

Remarque. Cette proposition résulte de l'existence d'un *accouplement local de Néron.*

Références. [Gon, §2.3], [Ner].

Appendice : torseurs et biextensions.

Définition. *Soit G un groupe abélien. On appelle G-*torseur*, tout espace homogène principal sur G.*

Remarque. Si G est le groupe multiplicatif d'un corps k, les notions de k^*-torseur et de k-espace vectoriel de dimension 1 sont équivalentes.

Définition. *Soient T et U deux G-torseurs. On appelle* produit tensoriel de T et U*, et l'on note $T \times^G U$, le quotient de $T \times U$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par*

$$(t, u) \sim (gt, g^{-1}u).$$

Notons $t \times u$ l'image de (t, u) dans $T \times^G U$. On munit $T \times^G U$ de l'unique structure de G-torseur telle que pour tous $t \in T, u \in U, g \in G$, on ait :

$$g(t \times u) = (gt) \times u = t \times (gu).$$

On définit le G-torseur T^{-1} par la propriété universelle suivante : c'est un G-torseur T' muni d'un isomorphisme de G-torseurs $\phi : T \times^G T' \cong G$. Le couple (T', ϕ) est unique à isomorphisme unique près.

Cela permet de définir, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le G-torseur T^n. On dispose, pour tous $n, n' \in \mathbf{Z}$, d'isomorphismes canoniques

$$T^n \times^G T^{n'} \cong T^{n+n'} \qquad \textit{et} \qquad (T^n)^{n'} \cong T^{nn'}.$$

Définition. *Soit T un G-torseur et $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes abéliens. On appelle* image directe de T par f*, et l'on note $f(T)$ ou $T \times^G H$, le quotient de $T \times H$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par*

$$(t, h) \sim (gt, h - f(g)).$$

L'ensemble $f(T)$ est de façon naturelle un H-torseur.

Définition. *Soient G et M des groupes abéliens. Une* extension de M par G *est la donnée d'un groupe abélien T et d'une suite exacte courte de groupes abéliens*

$$0 \to G \to T \to M \to 0.$$

Remarque. Si l'on a une telle suite exacte, alors pour tout $m \in M$, la préimage de m dans T est un G-torseur. En fait, on peut montrer que la donnée d'une extension de M par G équivaut à la donnée d'une famille de G-torseurs $(T_m)_{m \in M}$ et d'isomorphismes de G-torseurs

$$\phi_{m_1, m_2} : \qquad T_{m_1+m_2} \xrightarrow{\sim} T_{m_1} \times^G T_{m_2} \tag{41}$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
T_{m_1+m_2+m_3} & \longrightarrow & T_{m_1+m_2} \times^G T_{m_3} \\
\downarrow & & \downarrow \\
T_{m_1} \times^G T_{m_2+m_3} & \longrightarrow & T_{m_1} \times^G T_{m_2} \times^G T_{m_3},
\end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}
T_{m_1+m_2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{m_1} \times^G T_{m_2} \arrow[d] \\
T_{m_2+m_1} \arrow[r] & T_{m_2} \times^G T_{m_1}.
\end{tikzcd}
$$

Expliquons brièvement d'où viennent ces diagrammes. Le noyau de

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}[M] &\to M \\
\{m\} &\mapsto m
\end{aligned}
$$

est engendré par les éléments $h_{m_1,m_2} := \{m_1+m_2\} - \{m_1\} - \{m_2\} \in \mathbf{Z}[M]$. À chacun des éléments h_{m_1,m_2} est associé de façon naturelle l'isomorphisme d'addition ϕ_{m_1,m_2}. D'autre part, les relations existant entre les h_{m_1,m_2}, lorsque (m_1, m_2) parcourt M^2, entraînent des conditions de compatibilité entre les isomorphismes ϕ_{m_1,m_2}. Ces conditions se résument aux diagrammes commutatifs ci-dessus.

La proposition suivante est utilisée dans la section (2), pour la définition du groupe $B_2(E/k)$.

Proposition. *Soient G et M des groupes abéliens. On suppose donnés une famille $(T_{m,n})_{(m,n)\in M\times M}$ de G-torseurs et des isomorphismes de G-torseurs*

$$
T_{m,n_1+n_2} \cong T_{m,n_1} \times^G T_{m,n_2} \qquad \textit{et} \qquad T_{m_1+m_2,n} T_{m_1,n} \cong \times^G T_{m_2,n} \tag{42}
$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$
\begin{tikzcd}
T_{m_1+m_2,n_1+n_2} \arrow[r] \arrow[d] & T_{m_1+m_2,n_1} \times^G T_{m_1+m_2,n_2} \arrow[d] \\
T_{m_1,n_1+n_2} \times^G T_{m_2,n_1+n_2} \arrow[r] & \prod^G_{i,j\in\{1,2\}} T_{m_i,n_j}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T_{m_1+m_2+m_3,n} \arrow[r] \arrow[d] & T_{m_1+m_2,n} \times^G T_{m_3,n} \arrow[d] \\
T_{m_1,n} \times^G T_{m_2+m_3,n} \arrow[r] & T_{m_1,n} \times^G T_{m_2,n} \times^G T_{m_3,n}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T_{m_1+m_2,n} \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{m_1,n} \times^G T_{m_2,n} \arrow[d] \\
T_{m_2+m_1,n} \arrow[r] & T_{m_2,n} \times^G T_{m_1,n}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T_{m,n_1+n_2+n_3} \arrow[r] \arrow[d] & T_{m,n_1+n_2} \times^G T_{m,n_3} \arrow[d] \\
T_{m,n_1} \times^G T_{m,n_2+n_3} \arrow[r] & T_{m,n_1} \times^G T_{m,n_2} \times^G T_{m,n_3}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T_{m,n_1+n_2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{m,n_1} \times^G T_{m,n_2} \arrow[d] \\
T_{m,n_2+n_1} \arrow[r] & T_{m,n_2} \times^G T_{m,n_1}.
\end{tikzcd}
$$

Alors il existe une extension U de $M \otimes_{\mathbf{Z}} M$ par G et des isomorphismes de G-torseurs

$$\psi_{m,n} : T_{m,n} \xrightarrow{\sim} U_{m \otimes n}$$

compatibles avec les isomorphismes (42). Ici on a noté U_a le G-torseur au-dessus de $a \in M \otimes_{\mathbf{Z}} M$. Le couple $(U, (\psi_{m,n})_{(m,n) \in M \times M})$ est bien déterminé à isomorphisme unique près.

Démonstration. On commence par construire une extension $\widetilde{U}$ du groupe abélien libre $\mathbf{Z}[M \times M]$ par G. Par définition, la fibre de $\widetilde{U}$ au-dessus de $\sum a_{m,n}\{(m,n)\}$ est

$$\widetilde{U}_{\sum a_{m,n}\{(m,n)\}} = \prod_{(m,n) \in M \times M}^{G} T_{m,n}^{a_{m,n}}.$$

Les isomorphismes d'addition (41) sont définis de manière naturelle et l'on vérifie qu'ils sont compatibles entre eux. On obtient donc bien une extension $\widetilde{U}$ de $\mathbf{Z}[M \times M]$ par G.

Soit H le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathbf{Z}[M \times M] \to M \otimes_{\mathbf{Z}} M$. Par définition du produit tensoriel, H est engendré par les éléments $\{(m, n_1 + n_2)\} - \{(m, n_1)\} - \{(m, n_2)\}$ et $\{(m_1 + m_2, n)\} - \{(m_1, n)\} - \{(m_2, n)\}$. Les isomorphismes (42) et le fait qu'ils soient compatibles entre eux permettent de définir un homomorphisme de groupes abéliens $\phi : H \to \widetilde{U}$ qui est une section de $\widetilde{U} \to \mathbf{Z}[M \times M]$. C'est là le point essentiel : on pourra consulter [Serpe, Satz 2.3.1]. Le groupe abélien quotient $U := \widetilde{U}/\phi(H)$ est alors de façon naturelle une extension de $M \otimes_{\mathbf{Z}} M = \mathbf{Z}[M \times M]/H$ par G et satisfait à toutes les conditions demandées.

□

Remarque. Conservons les notations de la proposition précédente. Le groupe abélien U est appelé *biextension* de (M, M) par G. Pour une autre introduction à la notion de biextension, cf. [Mum, §2].

Remerciements.

Je tiens à remercier M. Loïc Merel pour avoir accepté d'encadrer mon stage de DEA, et pour ses conseils dans la rédaction de ce mémoire. Je remercie également MM. A. Goncharov, B. Kahn, J. Wildeshaus et D. Bertrand pour leurs réponses à de nombreuses questions.

Références.

[Bei1] Beilinson A., Higher regulators and values of L-functions. *Journal of Soviet Mathematics* **30** (1985), pp. 2036-2070.

[Bei2] Beilinson A., Higher regulators of modular curves. *Contemporary Mathematics* **55** I (1986), pp. 1-34.

[Blo] Bloch S., *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*. CRM monograph series 11, American Mathematical Society (2000).

[Bou] Bourbaki N., *Éléments de mathématique*, Masson.

[Gon] Goncharov A., Levin A., Zagier's conjecture on $L(E,2)$. *Inventiones Mathematicae* (1998), pp. 393-432.

[Mum] Mumford D., Biextensions of formal groups. In *Proceedings of the Bombay Colloquium on Algebraic Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics 4, Oxford University Press (1968), pp. 307-322.

[Ner] Néron A., Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes. *Annals of Mathemetics* **82** (1965), pp. 249-331.

[Oes] Oesterlé J., Polylogarithmes. *Séminaire Bourbaki* 762 (1992).

[Qui] Quillen D., Higher algebraic K-theory : I. In *Algebraic K-theory I : Higher K-theories*, Lecture Notes in Mathematics 341, Springer-Verlag (1973), pp. 85-147.

[Sch1] Schappacher N., Scholl A., Beilinson's theorem on modular curves. In *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspective in Mathematics **4**, New York Academic Press (1988), pp. 273-304.

[Sch2] Schappacher N., Scholl A., The boundary of the Eisenstein symbol. *Mathematische Annalen* **290** (1991), pp. 303-321.

[Serpe] Serpé C., *Zur zweiten Stufe der Zagier Vermutung* (Diplomarbeit).

[Serre] Serre J-P., *Groupes algébriques et corps de classes*. Hermann, 2^e édition (1959).

[Sil1] Silverman J., *The arithmetic of elliptic curves*. Graduate Texts in Mathematics 106, Springer-Verlag, 2^e impression (1986).

[Sil2] Silverman J., *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*. Graduate Texts in Mathematics 151, Springer-Verlag, 2^e impression (1994).

[Wei] Weil A., *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 88, Springer-Verlag (1976).