Périodes et valeurs de fonctions L

François Brunault
UMPA – ÉNS Lyon
brunault@umpa.ens-lyon.fr

7 janvier 2010

Définition (Kontsevich - Zagier)

Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont de la forme $\int_D \omega$ avec

1. $D = \{x \in \mathbf{R}^n ; P_1(x) \geq 0, \ldots, P_r(x) \geq 0\}$ avec $P_i \in \mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$.
2. $\omega = \sum F_i(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ avec $F_i \in \mathbf{Q}(X_1, \ldots, X_n)$.
3. $\int_D \omega$ absolument convergente.

Notation

$\mathcal{P} = \{\text{périodes}\} \subset \mathbf{C}$.

Remarque

$\mathcal{P}$ est un sous-anneau dénombrable de $\mathbf{C}$.

Exemples

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

$$\pi = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx\,dy$$

$$\log 2 = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k \geq 0} \iint_{[0,1]^2} x^k y^k dx\,dy = \iint_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy}$$

$$P(a,b) = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}dx \qquad (a, b \in \mathbf{Q}_{>0})$$

Problèmes (très difficiles)

1. Étant donné $z \in \mathbf{C}$, décider si $z \in \mathcal{P}$.
2. Étant données $z_1, z_2 \in \mathcal{P}$ explicites, décider si $z_1 = z_2$.

Conjecture (Kontsevich - Zagier)

Si deux intégrales définissent la même période, alors on peut passer d'une formule à l'autre en utilisant uniquement les règles du calcul (additivité, Fubini, Stokes, changements de variables).

Conjecture (forme vague)

Les valeurs spéciales aux entiers des fonctions ζ et fonctions L arithmétiques sont des périodes.

Exemples

1. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ pour $s \in \mathbf{C}$, $\Re(s) > 1$.
2. Soit $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$ un caractère.

$$L(\chi, s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,N)=1}}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \nmid N} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} \qquad (\Re(s) > 1).$$

3. Soit $\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n \in \mathbf{Z}[[q]]$.

$$L(\Delta, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}} \qquad \left(\substack{\Re(s) > \frac{13}{2} \\ \text{Deligne}}\right).$$

En général $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ avec a_n « d'origine arithmétique ».

Représentation intégrale : en posant $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2i\pi nz}$ pour $z \in \mathbf{C}$, $\mathfrak{I}(z) > 0$, on a sous réserve de convergence

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s) = \int_0^{\infty} f(iy)y^{s-1}dy.$$

Propriétés (conjecturales en général)

1. Prolongement méromorphe de $L(s)$ à $\mathbf{C}$.
2. Équation fonctionnelle reliant $L(s)$ et $L(k-s)$ pour $k \in \mathbf{N}$ convenable (hypothèse de Riemann : les zéros non triviaux de $L(s)$ vérifient $\mathfrak{R}(s) = \frac{k}{2}$).
3. Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, le coefficient dominant de $L(s)$ en $s = m$ appartient à $\mathcal{P}[\frac{1}{\pi}]$.

Notation

$\mathfrak{h} = \{z \in \mathbf{C} ; \Im(z) > 0\}$. Pour $z \in \mathfrak{h}$, posons $q = e^{2i\pi z}$ $(0 < |q| < 1)$.

Définition

$$f_{11}(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 (1-q^{11n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \qquad (z \in \mathfrak{h}).$$

Fait (non trivial !) : la fonction $L(f_{11}, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ se prolonge à $\mathbf{C}$ et on peut calculer sa valeur en 1.

$$L(f_{11}, 1) = \frac{1}{5} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 4x^2 + 1}} \in \mathcal{P}.$$

Idée de la démonstration

1. $L(f_{11},1) = 2\pi \int_0^\infty f_{11}(iy)dy = -\int_0^{i\infty} \omega$ avec $\omega := 2i\pi f_{11}(z)dz$.
2. La forme différentielle ω sur $\mathfrak{h}$ est invariante sous l'action de

$$\Gamma_0(11) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}); c \equiv 0 \pmod{11} \right\}.$$

3. Fricke : $\mathfrak{h}/\Gamma_0(11)$ est une courbe elliptique (moins 2 points) définie par une équation *à coefficients rationnels*.

$$\widehat{\mathfrak{h}/\Gamma_0(11)} \cong E_0(\mathbf{C}) = \{y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20\} \cup \{\infty\}$$

$$\omega \leftrightarrow \frac{dx}{2y+1}.$$

Théorème (Beilinson, Deninger-Scholl)

Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2i\pi nz}$ une forme modulaire. On suppose $a_n \in \overline{\mathbf{Q}}$ pour tout n. Alors pour tout $m \geq 1$, on a $L(f,m) \in \mathcal{P}[\frac{1}{\pi}]$.

Question : peut-on trouver une écriture « simple » pour $L(f,m)$?

De nombreuses conjectures « explicites » sont ou attendent d'être formulées :

$$\begin{matrix}\text{Valeurs de} \\ \text{fonctions } L\end{matrix} \overset{?}{\longleftrightarrow} \begin{cases} \text{Régulateurs (Bloch, Beilinson...)} \\ \text{Polylogarithmes (Zagier, Wildeshaus...)} \\ \text{Mesures de Mahler (Deninger, Boyd...)} \\ \ldots \end{cases}$$

La *mesure de Mahler* de $P \in \mathbf{Q}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ est donnée par

$$m(P) := \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|z_1| = \ldots = |z_n| = 1} \log |P(z_1, \ldots, z_n)| \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n} \in \mathcal{P}[\frac{1}{\pi}].$$

Théorème (B.)

Pour $f_{11}(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2 (1 - q^{11n})^2$, *on a*

$$L(f_{11}, 2) = \frac{4\pi^2}{55} m(Y^2 + (X^2 + 2X - 1)Y + X^3).$$

Pour $f_{15}(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{3n})(1 - q^{5n})(1 - q^{15n})$, *on a*

$$L(f_{15}, 2) = \frac{4\pi^2}{15} m(X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} + 1).$$

Le *dilogarithme de Bloch-Wigner* $D : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ est donné par

$$\begin{cases} D(z) = \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}\right) + \log|z| \arg(1-z) \text{ si } |z| \leq 1, \\ D(z) = -D(1/z) \text{ si } |z| \geq 1. \end{cases}$$

Définition (Bloch)

Soit $E(\mathbf{C}) = \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z}) \cong \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ avec $\tau \in \mathfrak{h}$, $q = e^{2i\pi\tau}$.
Pour $P = [x] \in E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$, on pose

$$D_E(P) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(xq^n).$$

On obtient $D_E : E(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$.

Soit $E : y^2 + y = x^3 - x^2$, de sorte que $L(E, s) = L(f_{11}, s)$.
Soit $t = 2\cos(2\pi/11)$, $x = t(t-1)(t+2)$ et $P := (x, tx) \in E$.

Soit $K = \mathbf{Q}(\cos(\frac{2\pi}{11}))$ et $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}) \cong (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$.
On note $\widehat{G}$ le groupe des caractères $G \to \mathbf{C}^*$.
Pour $\chi \in \widehat{G}$, $\chi \neq 1$, posons $L(E \otimes \chi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \chi(n)}{n^s}$.

$$\prod_{\chi \in \widehat{G}} L(E \otimes \chi, 2) \stackrel{?}{=} \frac{2^{10}5^9}{11^{11}} \pi^5 \prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)\big(2D_E(2P^\sigma) - D_E(P^\sigma)\big).$$

Conséquence : $L(E_K, 2) \stackrel{?}{\sim} \pi^5 \det M$ avec $M \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ définie par $M_{i,j} = 2D_E(2P + 2(i-j)Q) - D_E(P + (i-j)Q)$ où $Q = (0,0) \in E$.