Calcul explicite du régulateur de Beilinson associé à la courbe modulaire $X_1(N)$.

Motivation : étude de la fonction L d'une courbe elliptique.

Définition 1 (Fonction L). Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$. La fonction $L(E, s)$ de la variable $s \in \mathbf{C}$ est définie par le produit eulérien

$$L(E, s) = \prod_{p \text{ premier}} L_p(E, s) \qquad \left(\Re(s) > \frac{3}{2}\right), \tag{1}$$

où les facteurs d'Euler $L_p(E, s)$ sont définis comme suit.

Définition 2 (Bonne réduction). Soit p un nombre premier. On dit que E a bonne réduction en p s'il existe une équation de Weierstraß pour E, à coefficients entiers, telle que la réduction modulo p de cette équation définisse une courbe non-singulière sur $\mathbf{F}_p$.

Dans ce cas, on note $\tilde{E}_p$ cette réduction modulo p (c'est une courbe elliptique qui ne dépend pas de l'équation choisie) et l'on pose

$$a_p = p + 1 - |\tilde{E}_p(\mathbf{F}_p)|, \tag{2}$$

$$L_p(E, s) = \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}} \qquad \left(\Re(s) > \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Dans le cas de mauvaise réduction, on pose

$$L_p(E, s) = \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad \left(\text{resp. } \frac{1}{1 + p^{-s}}, \quad \text{resp. } 1\right), \tag{4}$$

suivant que E a réduction multiplicative déployée en p (resp. multiplicative non déployée, resp. additive).

Que peut-on dire de la valeur spéciale $L(E,2)$?

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{R}$. Bloch a construit une fonction *dilogarithme elliptique* sur $E(\mathbf{C})$:

$$D_E : E(\mathbf{C}) \to \mathbf{R} \tag{5}$$

généralisant le dilogarithme classique pour $\mathbf{C}^*$

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2} \qquad (|z| < 1). \tag{6}$$

Suposons maintenant E définie sur $\mathbf{Q}$. Une conjecture de Zagier, formulée dans le cas des corps de nombres et étendue aux courbes elliptiques, relie la valeur spéciale $L(E,2)$ aux valeurs de D_E aux points algébriques de E. Plus précisément, on sait démontrer le résultat suivant.

Théorème 3 (Goncharov, Levine, 1998). *Soit E une courbe elliptique* modulaire *définie sur $\mathbf{Q}$. Il existe un diviseur $l \in \mathrm{Div}(E(\overline{\mathbf{Q}}))$, globalement invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, et un nombre $\alpha \in \mathbf{Q}^*$ tels que*

$$L(E,2) = \alpha \pi D_E(l). \tag{7}$$

De plus, on peut choisir un diviseur l qui vérifie trois conditions supplémentaires, linéaires en l (non détaillées ici). Notons $\mathcal{A}(E) \subset \mathrm{Div}(E(\overline{\mathbf{Q}}))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})}$ le groupe des diviseurs satisfaisant ces trois conditions. On a la conjecture suivante :

Conjecture 4 (Conjecture de Zagier elliptique). *Pour tout diviseur $l \in \mathcal{A}(E)$, on a*

$$D_E(l) \in \frac{L(E,2)}{\pi}\mathbf{Q}. \tag{8}$$

La conjecture 4 a été testée numériquement pour nombre de courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$. On trouve des relations (conjecturales) de type (4). De plus, les facteurs rationnels qui interviennent sont assez simples, ce qui rassure quant à la validité de la conjecture.

Exemple. Soit E la courbe $37A1$, suivant la terminologie de Cremona. Elle admet l'équation de Weierstraß

$$y^2 + y = x^3 - x.$$

Son groupe de Mordell-Weil sur $\mathbf{Q}$ est libre de rang 1, engendré par le point $P = (0, 0)$. On trouve numériquement

$$L(E, 2) \stackrel{?}{=} \frac{-\pi}{37}\Big(D_E(3P) - 4D_E(2P) + 5D_E(P)\Big).$$

Lorsque E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ à multiplications complexes, on sait démontrer la conjecture pour certains diviseurs l, à supports dans l'ensemble des points de torsion. On utilise pour cela le fait que la fonction L de E coïncide avec la fonction L d'un caractère de Hecke du corps quadratique imaginaire associé à E.

Dans le cas général, on peut se débrouiller lorsque E est suffisamment "proche" d'une courbe modulaire (en un certain sens). Mais ceci ne permet de traiter que très peu de courbes elliptiques et de diviseurs.

Signalons enfin que la conjecture (4) découle de l'hypothèse suivante, relevant de la K-théorie de la courbe elliptique.

Conjecture 5. *Le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K_2(E)_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est de dimension 1.*

Dans cet énoncé, $K_2(E)$ désigne le groupe de K-théorie de Quillen, et $K_2(E)_{\mathbf{Z}}$ désigne le sous-groupe provenant d'un modèle entier de E (cf. plus loin).

Plus généralement, on conjecture que pour toute courbe projective lisse X définie sur $\mathbf{Q}$, le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K_2(X)_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est de dimension égale au genre de la courbe. Mais à l'heure actuelle, on ignore même si ces espaces vectoriels sont de dimension finie.

Théorie d'Eichler-Shimura

On note $J_1(N)$ la jacobienne de $X_1(N)$. C'est une variété abélienne définie sur $\mathbf{Q}$. Nous nous intéresserons à sa fonction L

$$L(J_1(N), s).$$

Elle est particulièrement importante pour l'étude de l'arithmétique des courbes elliptiques. Détaillons ce point.

Pour tout diviseur M de N, notons $\mathcal{B}_M$ l'ensemble des formes primitives de poids 2 pour $\Gamma_1(M)$. La théorie d'Eichler-Shimura et un théorème de Carayol permet de montrer le

Théorème 6. *On a*

$$L(J_1(N), s) = \prod_{M|N} \Big(\prod_{f \in \mathcal{B}_M} L(f, s) \Big)^{\sigma_0(\frac{N}{M})}, \tag{9}$$

où $\sigma_0(\frac{N}{M})$, le nombre de diviseurs de $\frac{N}{M}$, est la "multiplicité" des formes primitives de niveau M.

On sait depuis les travaux de Breuil, Conrad, Diamond, Taylor et Wiles que toute courbe elliptique E sur $\mathbf{Q}$ de conducteur N est paramétrée par $X_1(N)$. Il y a deux façons de voir les choses

$X_1(N) \to E$	$E \subset J_1(N)$
morphisme fini	sous-variété abélienne.

On en déduit que la fonction $L(E, s)$ attachée à E est un des facteurs du produit (9). Plus précisément, elle correspond à un unique élément $f_E \in \mathcal{B}_N$. En particulier, la fonction $L(E, s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ (fait nullement évident a priori).

Le régulateur de Beilinson.

En 1984, Beilinson a formulé des conjectures très générales reliant les valeurs spéciales de fonctions L de variétés algébriques sur $\mathbf{Q}$, à des objets appelés *régulateurs*. Ces conjectures se situent dans la lignée des résultats de Borel (corps de nombres) et de Bloch (courbes elliptiques).

Nous étudions ici le cas d'une courbe X définie sur $\mathbf{Q}$ (projective, lisse, géométriquement irréductible). Nous nous intéressons à la valeur spéciale $L(J_X, 2)$, où J_X est la jacobienne de X.

Définition 7. Le régulateur associé à X est le morphisme de groupes abéliens

$$\begin{aligned} \widetilde{R_X} : \mathbf{Q}(X)^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(X)^* &\to V_X := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\Omega^1_{\mathbf{Q}}(X), \mathbf{R}) \\ f \otimes g &\mapsto \left(\omega \mapsto \int_{X(\mathbf{C})} \omega \wedge \overline{\log|f| \partial \log|g|}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

où $\begin{cases} \mathbf{Q}(X) \text{ désigne le corps des fonctions rationnelles sur } X, \\ \Omega^1_{\mathbf{Q}}(X) \text{ est le } \mathbf{Q}\text{-espace vectoriel des sections globales de } \Omega^1_{X/\mathbf{Q}}. \end{cases}$

Remarque. Le régulateur est un objet purement archimédien : pour le définir, il suffit en fait que X soit définie sur $\mathbf{R}$.

Proposition 8. *Le régulateur annule les relations de Steinberg : pour toute fonction rationnelle* $f \in \mathbf{Q}(X) \backslash \{0, 1\}$, *on a*

$$\widetilde{R_X}(f \otimes (1-f)) = 0. \tag{11}$$

La démonstration de cette proposition passe par l'existence de la fonction de Bloch-Wigner $D : \mathbf{C}^* \to \mathbf{R}$, version univaluée du dilogarithme Li_2.

Quillen a associé à tout schéma (régulier) Y des groupes abéliens $K_i(Y)$, avec $i \geq 0$. Lorsque $i = 2$ et Y est le spectre d'un corps, on a une description explicite du groupe $K_2(Y)$. Nous la prendrons comme définition.

Théorème - Définition 9 (Matsumoto). *Soit k un corps. Le groupe abélien $K_2(k)$ est défini par*

$$K_2(k) \cong \frac{k^* \otimes_{\mathbf{Z}} k^*}{\langle x \otimes (1-x),\ x \in k \backslash \{0,1\} \rangle}. \tag{12}$$

Pour tous $f, g \in k^*$, on note $\{f, g\}$ la classe de $f \otimes g$ dans $K_2(k)$.

Proposition 10. *Le régulateur $\widetilde{R_X}$ induit un morphisme*

$$K_2(\mathbf{Q}(X)) \to V_X. \tag{13}$$

Par fonctorialité de la K-théorie de Quillen, la restriction au point générique de X induit un morphisme $K_2(X) \to K_2(\mathbf{Q}(X))$.

Proposition 11. *L'application naturelle*

$$K_2(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to K_2(\mathbf{Q}(X)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \tag{14}$$

est injective et l'on a une suite exacte

$$\begin{array}{ccc} 0 \to K_2(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to K_2(\mathbf{Q}(X)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} & \xrightarrow{(\partial_P)_P} & \left(\bigoplus_{P \in X(\overline{\mathbf{Q}})} \overline{\mathbf{Q}}^* \right) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \\ \{f, g\} & \mapsto & \left(\frac{f^{\mathrm{ord}_P(g)}}{g^{\mathrm{ord}_P(f)}}(P) \right)_P . \end{array} \tag{15}$$

L'application ∂_P est appelée symbole modéré en P.

Définition 12. Soit $\mathcal{X}$ un modèle propre et régulier de X sur $\mathbf{Z}$ (il en existe d'après Abhyankar et Lipman). Le morphisme naturel de schémas $\mathcal{X} \to X$ induit un morphisme

$$K_2(\mathcal{X}) \to K_2(X). \tag{16}$$

Son image est notée $K_2(X)_{\mathbf{Z}}$. Elle est indépendante du choix de $\mathcal{X}$.

Remarque. On peut définir $K_2(X)_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ à l'aide d'une suite exacte analogue à (15), en faisant intervenir cette fois les symboles modérés aux places *non-archimédiennes* du corps de fonctions $\mathbf{Q}(X)$.

Le régulateur $\widetilde{R_X}$ défini en (10) induit un morphisme

$$R_X : K_2(X)_{\mathbf{Z}} \to V_X. \tag{17}$$

Proposition - Définition 13 (Covolume). *Soit* $\int$ *le morphisme*

$$\int : H_1^+(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to V_X \tag{18}$$

$$\gamma \mapsto \left(\omega \mapsto \int_\gamma \omega\right).$$

Il est injectif et son image, notée L_X, est un réseau de V_X. Pour tout réseau L de V_X, on définit le covolume de L par

$$\operatorname{Covol} L := |\det_{L_X}(L)| \in \mathbf{R}^*_{>0}. \tag{19}$$

Conjecture 14 (Beilinson, Schappacher, Scholl). *Le noyau de R_X est réduit au sous-groupe de torsion $(K_2(X)_{\mathbf{Z}})_{\mathrm{tors}}$. L'image de R_X est un réseau de V_X dont le covolume vérifie*

$$\operatorname{Covol} R_X \in \frac{L(J_X, 2)}{\pi^{2g}} \mathbf{Q}^*, \tag{20}$$

où J_X est la jacobienne de X et g la dimension de J_X. En particulier,

$$\dim_{\mathbf{Q}} K_2(X)_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = g. \tag{21}$$

Courbes modulaires : définition et exemple.

Nous rappelons ici la défintion de la courbe modulaire $X_1(N)$, pour un entier $N \geq 1$.

On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C},\ \Im(z) > 0\}$ et

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}),\ \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \quad (22)$$

Ce groupe agit sur $\mathcal{H}$ par la règle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}. \quad (23)$$

Les courbes modulaires ouvertes et fermées sont définies par

$$Y_1(N)(\mathbf{C}) = \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H} \qquad X_1(N)(\mathbf{C}) = \Gamma_1(N)\backslash(\mathcal{H} \sqcup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})). \quad (24)$$

Les pointes de $X_1(N)(\mathbf{C})$ sont définies par

$$X_1^{\infty}(N)(\mathbf{C}) := \Gamma_1(N)\backslash\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}). \quad (25)$$

L'ensemble des pointes va nous intéresser particulièrement. Il est fini et hérite des nombreuses structures de la courbe modulaire ouverte :

- correspondances de Hecke,
- involution d'Atkin-Lehner,
- action de Aut($\mathbf{C}/\mathbf{Q}$),
- opérateurs diamant,
- morphismes de dégénérescence.

$X_1(N)(\mathbf{C})$ est une surface de Riemann compacte. Il existe une courbe projective lisse "naturelle" définie sur $\mathbf{Q}$, notée $X_1(N)$, dont les points complexes sont donnés par (24). On peut définir alors des sous-$\mathbf{Q}$-schémas $Y_1(N)$ et $X_1^\infty(N)$.

Exemple. La courbe modulaire $X_0(37)$.

Notations. Le régulateur de Beilinson correspondant à la courbe $X = X_1(N)$ sera noté

$$R_N : K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to V_N := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\Omega^1_{\mathbf{Q}}(X_1(N)), \mathbf{R}). \tag{26}$$

Nous noterons $L_N \subset V_N$ le réseau canonique obtenu par l'intégration de l'homologie. Pour tout réseau $L \subset V_N$, son covolume est défini par rapport à L_N, comme en (19).

E g_N le genre de la courbe $X_1(N)$ et $J_1(N)$ la jacobienne de $X_1(N)$. C'est une variété abélienne sur $\mathbf{Q}$, de dimension g_N.

Définition 15 (Unités modulaires). Le groupe des unités modulaires, noté $\mathcal{O}^*(Y_1(N))$, est défini par

$$\mathcal{O}^*(Y_1(N)) = \{u \in \mathbf{Q}(X_1(N))^*, \ \mathrm{Support}(\mathrm{div}\, u) \subset X_1^\infty(N)\}. \tag{27}$$

Il est commode d'introduire le groupe $\mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. On a un morphisme naturel

$$\mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^0_{\mathbf{Q}}\Big(X_1^\infty(N)\Big). \tag{28}$$

Ce morphisme est surjectif : c'est le théorème de Manin-Drinfel'd. On peut écrire une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^0_{\mathbf{Q}}\Big(X_1^\infty(N)\Big) \to 0. \tag{29}$$

Le théorème de Beilinson.

Pour toutes unités modulaires $u, v \in \mathcal{O}^*(Y_1(N))$, nous pouvons former le symbole $\{u, v\} \in K_2(\mathbf{Q}(X_1(N)))$.

A priori, $\{u, v\}$ ne définit pas un élément de $K_2(X_1(N))$: il faut pour cela vérifier la condition de trivialité du symbole modéré aux pointes de $X_1(N)$. D'où la définition

Définition 16. On note $\mathcal{Q}_N \subset K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ le sous-groupe

$$\mathcal{Q}_N := \langle \{u, v\};\ u, v \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \rangle \cap K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}, \tag{30}$$

où l'intersection est définie en utilisant l'injection (14).

La construction (30) reste en fait valable pour n'importe quel sous-groupe de congruence $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{Z})$. Ainsi, on dispose d'un sous-groupe

$$\mathcal{Q}_\Gamma \subset K_2(X(\Gamma))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}, \tag{31}$$

où $X(\Gamma)$ est la courbe modulaire (définie sur $\mathbf{Q}$) associée à Γ.

Définition 17. Soit $\Gamma \subset \Gamma_1(N)$ un sous-groupe de congruence et

$$\alpha_\Gamma : X(\Gamma) \to X_1(N) \tag{32}$$

le morphisme de dégénérescence associé. Par fonctorialité, le morphisme fini α_Γ induit un morphisme de trace

$$\alpha_{\Gamma,*} : K_2(X(\Gamma))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}. \tag{33}$$

On pose

$$\mathcal{P}_N := \langle \alpha_{\Gamma,*}(\mathcal{Q}_\Gamma),\ \Gamma \subset \Gamma_1(N) \rangle \subset K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}. \tag{34}$$

Remarque. Il est clair que $\mathcal{Q}_N \subset \mathcal{P}_N$.

Le régulateur, rappelons-le, s'écrit

$$R_N : K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to V_N = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\Omega^1_{\mathbf{Q}}(X_1(N)), \mathbf{R}).$$

Théorème 18 (Beilinson, Schappacher, Scholl, 1988). *L'image $R_N(\mathcal{P}_N)$ est un réseau de V_N. De plus, le covolume de ce réseau vérifie*

$$\mathrm{Covol}\, R_N(\mathcal{P}_N) \in \mathbf{Q}^* \frac{L(J_1(N),2)}{\pi^{2g_N}}. \tag{35}$$

Remarque. Ce théorème ne précise pas le facteur rationnel apparaissant dans (35). Les conjectures de Bloch-Kato déterminent la valeur de la fonction L au signe près, mais le formalisme de ces conjectures est plus évolué.

Remarque. On peut reformuler le théorème en disant que $R_N \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ est *surjectif*. En revanche, on ne sait rien sur l'injectivité de $R_N \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. C'est un problème difficile, équivalent à la conjecture sur le rang du groupe de K-théorie $K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}}$.

Une question naturelle.

Le théorème 18 reste-t-il vrai en remplaçant $\mathcal{P}_N$ par $\mathcal{Q}_N$?

On peut d'ailleurs se poser cette question en remplaçant $\Gamma_1(N)$ par n'importe quel sous-groupe de congruence Γ : avec des notations évidentes,

$$R_\Gamma(\mathcal{Q}_\Gamma) \text{ est-il un réseau de } V_\Gamma ? \tag{36}$$

Quelques cas connus.

- **La réponse est négative pour $\Gamma = \Gamma_0(p)$, avec p premier.**
  En effet, la courbe modulaire $X_0(p)$ possède deux pointes, toutes les deux définies sur $\mathbf{Q}$:
  $$X_0^\infty(\mathbf{Q}) = X_0^\infty(\mathbf{C}) = \{[0], [\infty]\}. \tag{37}$$
  Il existe donc une unité modulaire u telle que
  $$\mathcal{O}^*(Y_0(p)) = \mathbf{Q}^* \cdot u^{\mathbf{Z}}. \tag{38}$$
  Or on a $\{u, u\} = 0$ et
  $$R_\Gamma(\{c, f\}) = 0 \qquad (c \in \mathbf{Q}^*, f \in \mathbf{Q}(X(\Gamma))^*). \tag{39}$$
  Par conséquent $R_\Gamma(\mathcal{Q}_\Gamma) = 0$ pour $\Gamma = \Gamma_0(p)$.

- **La réponse est positive pour $\Gamma = \Gamma_0(27)$.**
  En effet, la courbe modulaire $X_0(27)$ est la célèbre courbe de Fermat
  $$x^3 + y^3 = 1. \tag{40}$$
  C'est une courbe elliptique à multiplications complexes par l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. Les résultats de Rohrlich sur les courbes elliptiques à multiplications complexes montrent que $R_\Gamma(\mathbf{Q}_\Gamma) \neq 0$, et par conséquent $R_\Gamma(\mathcal{Q}_\Gamma)$ est un réseau de V_Γ.

- **La réponse est positive pour $\Gamma = \Gamma_0(20)$.**
  En effet, la courbe modulaire $X_0(20)$ est une courbe elliptique (qui n'a pas de multiplication complexe). Les calculs à l'ordinateur de Bloch et Grayson *montrent* que $R_\Gamma(\mathcal{Q}_\Gamma) \neq 0$ dans ce cas.

Regardons maintenant ce qui se passe pour $\Gamma = \Gamma_1(N)$, avec $N \geq 1$. Par linéarité, le régulateur induit un accouplement $\mathbf{C}$-bilinéaire

$$<,>: \Big(K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}\Big) \times \Omega^1(X_1(N)(\mathbf{C})) \to \mathbf{C}. \tag{41}$$

Proposition 19. *Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N, pair et non-trivial, il existe une unique unité modulaire*

$$u_\chi \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\chi) \tag{42}$$

vérifiant une certaine condition de normalisation et

$$\operatorname{div} u_\chi = \sum_{a \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*} \chi(a)[\langle a \rangle \infty] \in \mathrm{Div}^0_{\mathbf{Q}(\chi)}(X_1^\infty(N)), \tag{43}$$

où $\langle a \rangle$ désigne l'opérateur diamant associé à a.

Proposition 20. *Pour tous caractères χ, χ' modulo N, pairs et non-triviaux, le symbole $\{u_\chi, u_{\chi'}\}$ vérifie*

$$\{u_\chi, u_{\chi'}\} \in K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\chi). \tag{44}$$

Théorème 21. *Soit $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in S_2(\Gamma_1(N), \psi)$ une forme modulaire primitive (propre pour tous les opérateurs de Hecke, normalisée, de caractère ψ). Posons $\omega_f = 2\pi i f(z) dz$. Soit χ (resp. χ') un caractère de Dirichlet modulo N, pair et non-trivial (resp. pair et primitif). Alors on a*

$$< \{u_\chi, u_{\chi'}\}, \omega_f >= \begin{cases} \frac{-\pi i \tau(\chi')\phi(N)}{4L(\chi,2)L(\chi',2)N} L(f,2)L(f,\overline{\chi'},1) & \text{si } \psi = \chi\chi', \\ 0 & \text{si } \psi \neq \chi\chi', \end{cases} \tag{45}$$

avec les notations

$$\tau(\chi') = \sum_{a=0}^{N-1} \chi'(a) e^{\frac{2\pi i a}{N}} \qquad \text{et} \qquad L(f, \overline{\chi'}, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \overline{\chi'}(n)}{n^s}.$$

Idée de la démonstration.

Le régulateur à calculer s'interprète comme un produit de Petersson sur la courbe modulaire $X_1(N)(\mathbf{C})$. On calcule ce produit de Petersson en suivant la méthode de Rankin-Selberg. On est ramenés au calcul de la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n b_n}{n^s} \tag{46}$$

avec $a_n = a_n(f)$, $b_n = \sum_{d|n} d\overline{\chi'}(d)$.

Puisque f est propre pour tous les opérateurs de Hecke T_p, la série de Dirichlet (46) admet un produit eulérien. Un calcul donne

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n b_n}{n^s} = \frac{L(f,s)L(f,\overline{\chi'},s-1)}{L(\psi\overline{\chi'},2s-2)}. \tag{47}$$

L'évaluation en $s = 2$ donne le résultat.

Théorème 22. *Soit p un nombre premier. Pour $\Gamma = \Gamma_1(p)$, le groupe $R_\Gamma(\mathcal{Q}_\Gamma)$ est un réseau de V_Γ.*

La réponse à la question (36) est donc positive pour $\Gamma = \Gamma_1(p)$.

Idée de la démonstration.

On considère les éléments explicites du groupe de K-théorie

$$\{u_\chi, u_{\chi'}\}, \tag{48}$$

où χ et χ' parcourent les caractères modulo p, pairs et non-triviaux. On considère également les symboles

$$\{u_\chi, u_p\} \tag{49}$$

où $u_p \in \mathcal{O}^*(Y_0(p))$ est l'unité modulaire définie par

$$u_p(z) = \frac{\Delta(pz)}{\Delta(z)}. \tag{50}$$

On calcule l'image de ces symboles par le régulateur, grâce au théorème 21.

Enfin, on montre que ces images engendrent l'espace d'arrivée du régulateur (sur $\mathbf{R}$). Pour cela, on utilise la description explicite due à Manin du groupe d'homologie $H_1(X_1(p), \mathbf{Z})$.

Qu'en est-il pour $\Gamma_0(N)$ et $\Gamma_1(N)$?

Les résultats précédents montrent que la réponse à la question (36) est connue pour $\Gamma_0(p)$ et $\Gamma_1(p)$.

Nous n'avons pas fait les calculs permettant de décider quelle est la réponse pour $\Gamma_0(N)$ et $\Gamma_1(N)$, lorsque N est quelconque.

Une heuristique...

Soit Γ un sous-groupe de congruence. Notons c_Γ le cardinal de $X^\infty(\Gamma)$, c'est-à-dire le nombre de pointes de la courbe modulaire $X(\Gamma)$ modulo l'action de Galois. Notons encore g_Γ le genre de la courbe X_Γ.

Le nombre d'unités modulaires indépendantes vaut $c_\Gamma - 1$. Le nombre de symboles de Milnor, a priori non équivalents, que l'on peut former vaut donc

$$m_\Gamma = \frac{(c_\Gamma - 1)(c_\Gamma - 2)}{2}, \tag{51}$$

par antisymétrie du symbole de Milnor.

Proposition 23. *Si $R_\Gamma(\mathcal{Q}_\Gamma)$ est un réseau de V_Γ, alors $m_\Gamma \geq g_\Gamma$.*

La réciproque est d'autant plus plausible que m_Γ est supérieur à g_Γ !

Pour $\Gamma = \Gamma_1(N)$, on a les estimations

$$m_{\Gamma_1(N)} \sim \frac{N^2}{8} \qquad \text{lorsque } N \to \infty, \tag{52}$$

$$g_{\Gamma_1(N)} \leq \frac{N^2}{24} \qquad (N \geq 1), \tag{53}$$

qui montrent que la réponse a de bonnes chances d'être positive.