Chapitre 1

Dilogarithme sur une surface de Riemann compacte

Soit X une surface de Riemann compacte connexe, de genre $g \geq 1$. La définition d'un dilogarithme explicite pour X est un problème important, lié en particulier aux conjectures de Beĭlinson sur les valeurs spéciales de fonctions L associées aux courbes projectives lisses sur $\mathbf{Q}$. Une telle définition est particulièrement intéressante car elle permet également d'envisager la formulation d'un analogue de la conjecture de Zagier pour ces mêmes valeurs spéciales.

La fonction que nous définissons dans ce chapitre se trouve déjà implicitement dans l'article de Deninger et Wingberg [11, §1]. D'autre part, elle a été définie explicitement par Goncharov dans [14, Def. 9.1, p. 390] (en utilisant ses notations, elle correspond au cas $a = 1$, $b = 2$ et $n = 2$). Le point de vue que nous adoptons ici n'est donc pas essentiellement nouveau. En revanche, la propriété différentielle (**??**) et le comportement vis-à-vis des morphismes finis (**??**) n'avaient à notre connaissance pas encore été écrits.

Notons $\Omega^{1,0}(X)$ l'espace vectoriel complexe des 1-formes différentielles holomorphes sur X. Pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$, nous allons construire une fonction continue

$$R_\omega : X \times X \to \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

de classe C^∞ hors de la diagonale de $X \times X$ et dépendant linéairement de ω. La fonction R_ω permet d'expliciter une application régulateur

$$K_2(\mathbf{C}(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^{1,0}(X), \mathbf{C}), \tag{1.2}$$

où $\mathbf{C}(X)$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur X (voir la proposition 9). Par ailleurs, dans le cas où X est une courbe elliptique, la fonction R_ω permet de retrouver le dilogarithme elliptique défini par Bloch (voir la proposition 12). Enfin, la fonction R_ω satisfait une propriété différentielle par rapport à chacune de ses variables (voir le théorème **??**). Nous montrons que cette propriété différentielle la caractérise (voir le théorème **??**).

1.1 Définition de la fonction R_ω

Une forme volume sur X est une 2-forme différentielle réelle de classe C^∞ sur X, partout non nulle et d'intégrale 1.

Il existe une forme volume canonique sur X. Nous en donnons maintenant la définition. Considérons le produit scalaire hermitien

$$(\alpha, \beta) := i \int_X \alpha \wedge \overline{\beta} \qquad (\alpha, \beta \in \Omega^{1,0}(X)) \tag{1.3}$$

sur l'espace vectoriel complexe $\Omega^{1,0}(X)$. Soit $(\omega_j)_{1 \leq j \leq g}$ une base orthonormale pour le produit scalaire (1.3). La forme différentielle

$$\mathrm{vol}_X = \frac{i}{g} \sum_{j=1}^{g} \omega_j \wedge \overline{\omega_j} \tag{1.4}$$

est une forme volume sur X qui ne dépend pas du choix de la base orthonormale $(\omega_j)_{1 \leq j \leq g}$. Nous verrons dans le chapitre **??** que cette forme volume provient en fait naturellement d'un diviseur thêta sur la jacobienne de X.

Nous rappelons maintenant la définition de la fonction de Green associée à X. Cette fonction classique joue le rôle de hauteur archimédienne en théorie d'Arakelov. Nous renvoyons à [15, Chap. II] pour les détails ou démonstrations omis ici. Notons

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X \tag{1.5}$$

la diagonale de $X \times X$.

Proposition 1 (Arakelov, [1])**.** *Il existe une unique fonction de classe C^∞*

$$G_X : X \times X - \Delta_X \to \mathbf{R} \tag{1.6}$$

vérifiant les trois conditions suivantes.

1. *Pour tout $x \in X$, nous avons*

$$\partial_y \overline{\partial}_y G_X(x,y) = \pi i \operatorname{vol}_X \qquad (y \in X - \{x\}). \tag{1.7}$$

2. *Pour tout $x \in X$ et pour toute coordonnée locale holomorphe $z(y)$ au point x vérifiant $z(x) = 0$, la fonction*

$$y \mapsto G_X(x,y) - \log|z(y)|, \tag{1.8}$$

définie sur un voisinage épointé de x dans X, s'étend en une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de x dans X.

3. *Pour tout $x \in X$, nous avons*

$$\int_{y \in X} G_X(x,y) \cdot \operatorname{vol}_X = 0. \tag{1.9}$$

La fonction G_X est appelée fonction de Green associée à X.

Démonstration. L'existence de G_X est démontrée par Arakelov dans [1, §1–2]. Coleman en a également donné une preuve [15, II, §4]. L'unicité de G_X résulte quant à elle facilement des propriétés 1, 2 et 3. □

Nous mentionnons maintenant, sans démonstration, quelques propriétés supplémentaires de la fonction G_X.

4. La fonction G_X est symétrique : nous avons

$$G_X(x,y) = G_X(y,x) \qquad (x, y \in X,\ x \neq y). \tag{1.10}$$

5. La fonction G_X a une singularité logarithmique le long de Δ_X. Cela signifie que pour tout $x_0 \in X$ et pour toute coordonnée locale holomorphe $z(x)$ au point x_0, la fonction

$$(x,y) \mapsto G_X(x,y) - \log|z(x) - z(y)| \tag{1.11}$$

s'étend en une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de (x_0, x_0) dans $X \times X$.

6. Pour toute fonction méromorphe $f \in \mathbf{C}(X)^*$, il existe une constante $C_f \in \mathbf{R}$ telle que

$$\log|f(y)| = C_f + \sum_{x \in (f)} \operatorname{ord}_x(f) \cdot G_X(x,y) \qquad (y \in X - (f)), \tag{1.12}$$

où (f) désigne l'ensemble des zéros et des pôles de f, et $\mathrm{ord}_x(f) \in \mathbf{Z}$ désigne l'ordre d'annulation de f en $x \in X$. Nous avons en outre

$$C_f = \int_X \log|f| \cdot \mathrm{vol}_X \,. \tag{1.13}$$

7. En utilisant le langage des courants, nous pouvons condenser les propriétés 1 et 2 de la fonction G_X en une seule équation : pour tout $x \in X$, nous avons

$$\frac{1}{\pi i}\partial\overline{\partial} G_X(x,\cdot) = \mathrm{vol}_X - \delta_x, \tag{1.14}$$

   où δ_x désigne le courant d'évaluation en x.

8. De manière encore plus intrinsèque, la fonction G_X est l'unique distribution sur $X \times X$ satisfaisant l'équation différentielle

$$\frac{1}{\pi i}\partial\overline{\partial} G_X = p^* \mathrm{vol}_X + q^* \mathrm{vol}_X - \Omega_X - \delta_{\Delta_X} \tag{1.15}$$

   et normalisée par la condition

$$\int_{X \times X} G_X \cdot p^* \mathrm{vol}_X \wedge q^* \mathrm{vol}_X = 0, \tag{1.16}$$

   où les applications $p, q : X \times X \to X$ sont les deux projections naturelles, la forme différentielle $\Omega_X \in \Omega^{1,1}(X \times X)$ est définie par

$$\Omega_X = i \sum_{j=1}^{g} (p^*\omega_j \wedge q^*\overline{\omega_j} + q^*\omega_j \wedge p^*\overline{\omega_j}) \tag{1.17}$$

   pour toute base orthonormale $(\omega_j)_{1 \leq j \leq g}$ de $\Omega^{1,0}(X)$ muni du produit scalaire (1.3), et δ_{Δ_X} désigne le courant d'intégration le long de Δ_X.

Remarque 2. *Dans la proposition 1, il est possible de remplacer* vol_X *par une forme volume quelconque* vol'_X *sur* X. *La fonction* G'_X *ainsi obtenue est liée à* G_X. *Nous renvoyons à l'article d'Arakelov [1, Prop. 3.2, p. 1177] pour une version précise de ce lien.*

Nous allons maintenant définir la fonction R_ω. Choisissons donc une forme différentielle $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$.

Définition 3. *Soit* R_ω *la fonction définie par*

$$\begin{aligned} R_\omega : X \times X &\to \mathbf{C} \\ (x,y) &\mapsto \int_{z\in X} G_X(x,z)\cdot \omega_z \wedge \overline{\partial}_z G_X(y,z). \end{aligned} \tag{1.18}$$

La convergence absolue de l'intégrale (1.18) résulte de la propriété 2 (p. 3) appliquée aux fonctions $G_X(x,\cdot)$ et $G_X(y,\cdot)$.

Proposition 4. *La fonction R_ω est antisymétrique :*

$$R_\omega(y,x) = -R_\omega(x,y) \qquad (x,y\in X). \tag{1.19}$$

Démonstration. Soient $x,y\in X$. Nous avons

$$\begin{aligned} R_\omega(x,y)+R_\omega(y,x) &= \int_{z\in X} \omega_z \wedge \big(G_X(x,z)\overline{\partial}_z G_X(y,z) + G_X(y,z)\overline{\partial}_z G_X(x,z)\big) \\ &= \int_{z\in X} \omega_z \wedge \overline{\partial}_z\big(G_X(x,z)G_X(y,z)\big) \\ &= \int_{z\in X} d\big(G_X(x,z)G_X(y,z)\omega_z\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'après la formule de Stokes et car la forme différentielle $G_X(x,z)G_X(y,z)\omega_z$ croît au plus comme le carré du logarithme en $z=x$ et $z=y$. □

Corollaire 5. *La fonction R_ω est nulle sur Δ_X.*

La définition (1.18) de la fonction R_ω est clairement linéaire en ω. Il est utile de fabriquer une fonction intrinsèque R_X à partir de la donnée des fonctions R_ω. Pour ce faire, nous procédons de la manière suivante.

Définition 6. *Soit R_X la fonction définie par*

$$\begin{aligned} R_X : X\times X &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^{1,0}(X),\mathbf{C}) \\ (x,y) &\mapsto (\omega \mapsto R_\omega(x,y)). \end{aligned} \tag{1.20}$$

1.2 Lien entre la fonction R_ω et le régulateur

La définition (1.18) de la fonction R_ω n'est peut-être pas très parlante. Elle trouve sa justification et son intérêt dans l'explicitation d'une application régulateur

$$r_X : K_2(\mathbf{C}(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^{1,0}(X), \mathbf{C}). \tag{1.21}$$

Rappelons la définition du groupe de K-théorie de Milnor $K_2(F)$ associé à un corps F.

Définition 7. *Soit F un corps. Le groupe $K_2(F)$ est le groupe abélien défini par*

$$K_2(F) = \frac{F^* \otimes_{\mathbf{Z}} F^*}{\langle x \otimes (1-x) \mid x \in F - \{0,1\} \rangle}. \tag{1.22}$$

Pour tous $x, y \in F^*$, nous appelons symbole de Milnor associé à x et y, et nous notons $\{x, y\}$, la classe de $x \otimes y$ dans $K_2(F)$.

Définition 8. *L'application régulateur r_X associée à X est définie par*

$$\begin{aligned} r_X : K_2(\mathbf{C}(X)) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^{1,0}(X), \mathbf{C}) \\ \{f, g\} &\mapsto \left(\omega \mapsto \int_X \log|f| \cdot \omega \wedge \overline{\partial} \log|g|\right). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Démonstration. Nous vérifions sans trop de peine que l'intégrale (1.23) converge absolument et est bilinéaire en $f, g \in \mathbf{C}(X)^*$. Le fait que (1.23) définisse une application de $K_2(\mathbf{C}(X))$ résulte de la formule de Stokes et de l'égalité

$$\log|f| \cdot \omega \wedge \overline{\partial} \log|1-f| = \frac{i}{2} d\Big((D \circ f + i \log|f| \log|1-f|)\, \omega\Big), \tag{1.24}$$

valable pour toute fonction méromorphe $f \in \mathbf{C}(X) - \{0,1\}$, et dans laquelle D désigne la fonction de Bloch-Wigner. □

Nous pouvons maintenant faire le lien entre l'application régulateur r_X et la fonction R_X.

Proposition 9. *Pour toutes fonctions méromorphes $f, g \in \mathbf{C}(X)^*$, nous avons l'égalité*

$$r_X(\{f, g\}) = \sum_{x \in (f)} \sum_{y \in (g)} \mathrm{ord}_x(f) \, \mathrm{ord}_y(g) R_X(x, y), \tag{1.25}$$

où nous utilisons les notations de (1.12). Autrement dit, nous avons pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$ l'égalité

$$\int_X \log|f| \cdot \omega \wedge \overline{\partial} \log|g| = \sum_{x \in (f)} \sum_{y \in (g)} \mathrm{ord}_x(f)\, \mathrm{ord}_y(g) R_\omega(x,y). \tag{1.26}$$

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de démontrer (1.26). Pour cela, nous utilisons l'égalité (1.12) appliquée à f et g, ainsi que le calcul

$$\int_X C_f \cdot \omega \wedge \overline{\partial} \log|g| = -C_f \int_X d\left(\log|g| \cdot \omega\right) = 0$$

utilisant la formule de Stokes. La définition de R_ω permet de conclure. $\square$

Remarquons que l'antisymétrie de la fonction R_ω se traduit algébriquement par l'égalité bien connue dans $K_2(\mathbf{C}(X))$

$$\{g, f\} = -\{f, g\} \qquad (f, g \in \mathbf{C}(X)^*). \tag{1.27}$$

Nous pouvons enfin noter que la proposition 1.21 jointe à la relation de Steinberg $\{f, 1-f\} = 0$ entraîne la relation suivante pour la fonction R_X

$$\sum_{x \in (f)} \sum_{y \in (1-f)} \mathrm{ord}_x(f)\, \mathrm{ord}_y(1-f) R_X(x,y) = 0, \tag{1.28}$$

valable pour toute fonction méromorphe $f \in \mathbf{C}(X) - \{0, 1\}$.

1.3 Cas d'une courbe elliptique

Dans cette section seulement, nous faisons l'hypothèse que le genre g de X est égal à 1. Le choix d'un point base $0 \in X$ munit X d'une structure de courbe elliptique sur $\mathbf{C}$. Nous écrirons donc $X = E(\mathbf{C})$, où E est une courbe elliptique sur $\mathbf{C}$, et noterons $G_X = G_E$, $R_X = R_E$. Nous allons voir que la fonction R_E permet de retrouver le dilogarithme elliptique défini sur $E(\mathbf{C})$. Nous remarquons enfin que l'intérêt de la fonction R_E réside dans son caractère intrinsèque.

Rappelons maintenant la définition du dilogarithme elliptique, due à Bloch [6]. Choisissons un isomorphisme

$$\eta : E(\mathbf{C}) \xrightarrow{\cong} \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}}, \tag{1.29}$$

avec $\tau \in \mathbf{C}$ vérifiant $\Im(\tau) > 0$. Composons η avec l'application $z \mapsto \exp(2\pi i z)$. Nous obtenons un isomorphisme de groupes

$$E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}, \tag{1.30}$$

où nous avons posé $q = \exp(2\pi i \tau)$.

Définition 10. *Le dilogarithme elliptique $D_{E,\eta}$ associé à E et η est la fonction définie par*

$$\begin{aligned} D_{E,\eta} : E(\mathbf{C}) &\to \mathbf{R} \\ [x] &\mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(xq^n), \end{aligned} \tag{1.31}$$

où nous avons utilisé l'identification (1.30).

La série (1.31) définissant $D_{E,\eta}$, vue comme série de fonctions de la variable $x \in \mathbf{C}^*$, converge uniformément sur tout compact. La fonction $D_{E,\eta}$ est de classe C^∞ sur $E(\mathbf{C}) - \{0\}$, et continue en 0. Elle vérifie les relations suivantes, dites relations de distribution

$$D_{E,\eta}(nP) = n \sum_{Q \in E[n]} D_{E,\eta}(P+Q) \qquad (P \in E(\mathbf{C}),\ n \in \mathbf{Z} - \{0\}), \tag{1.32}$$

où $E[n]$ désigne le groupe des points de n-torsion de $E(\mathbf{C})$. En particulier, la fonction $D_{E,\eta}$ est impaire.

Remarque 11. *La fonction $D_{E,\eta}$ dépend du choix de l'isomorphisme η. Lorsque la courbe elliptique E est définie sur $\mathbf{R}$, il existe un dilogarithme elliptique D_E bien défini au signe près. Pour voir cela, choisissons une orientation de $E(\mathbf{R})$. Notons $H_1^+(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ le sous-groupe de $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ constitué des éléments invariants par la conjugaison complexe agissant sur $E(\mathbf{C})$. C'est un groupe abélien libre de rang 1. L'orientation de $E(\mathbf{R})$ induit un générateur canonique γ_1 de $H_1^+(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. Soit γ_2 un élément de $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ tel que (γ_1, γ_2) forme une base directe de $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ pour le produit d'intersection[1]. Nous posons alors*

$$\tau = \frac{\int_{\gamma_2} \omega}{\int_{\gamma_1} \omega} \in \mathcal{H} \qquad et \qquad \eta : P \mapsto \left[\frac{\int_0^P \omega}{\int_{\gamma_1} \omega} \right], \tag{1.33}$$

[1] L'orientation canonique de $\mathbf{C}$ induit via η une orientation canonique de $E(\mathbf{C})$, qui détermine à son tour le produit d'intersection sur $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$.

où ω désigne une forme différentielle holomorphe non nulle quelconque sur $E(\mathbf{C})$. Le nombre $q = \exp(2\pi i\tau)$ est un nombre réel non nul. Il vérifie $-1 < q < 1$ et ne dépend que de E. Nous vérifions que la fonction $D_E = D_{E,\eta}$ est bien définie au signe près, ce signe dépendant du choix initial de l'orientation de $E(\mathbf{R})$. La fonction D_E satisfait également les relations de distribution

$$D_E(nP) = n \sum_{Q \in E[n]} D_E(P+Q) \qquad (P \in E(\mathbf{C}),\ n \in \mathbf{Z} - \{0\}), \tag{1.34}$$

Le lien entre la fonction $D_{E,\eta}$ et la fonction R_E est donné par la proposition suivante.

Proposition 12. *Supposons que E est définie sur $\mathbf{R}$, choisissons une orientation de $E(\mathbf{R})$ et notons*

$$\eta : E(\mathbf{C}) \xrightarrow{\cong} \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}}$$

l'isomorphisme défini par (1.33). Posons $\omega = \eta^* dz$. Nous avons alors la formule

$$\Im(R_\omega(P,Q)) = -\frac{1}{2} D_E(P-Q) \qquad (P,Q \in E(\mathbf{C})). \tag{1.35}$$

De plus, lorsque $P, Q \in E(\mathbf{R})$, nous avons $R_\omega(P,Q) \in i\mathbf{R}$, de sorte que

$$R_\omega(P,Q) = -\frac{i}{2} D_E(P-Q) \qquad (P,Q \in E(\mathbf{R})). \tag{1.36}$$

Démonstration. L'idée de la preuve consiste à calculer les développements de Fourier des deux membres de (1.35). Le développement de Fourier de la fonction D_E a été calculé par Bloch [6]. Le développement de Fourier des fonctions G_E et R_E s'obtiennent sans difficulté à partir des définitions. □

Chapitre 2

Calculs explicites dans le cas modulaire

Soit Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et X_Γ la courbe modulaire (complète) associée à Γ. C'est une courbe projective lisse définie sur $\mathbf{Q}$. Nous avons défini une fonction dilogarithme

$$R_{X_\Gamma(\mathbf{C})} : X_\Gamma(\mathbf{C}) \times X_\Gamma(\mathbf{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^{1,0}(X_\Gamma(\mathbf{C})), \mathbf{C}). \tag{2.1}$$

Notons g le genre de X_Γ. La fonction $L(H^1(X_\Gamma), s)$ peut être exprimée en termes des fonctions L des formes modulaires primitives de poids 2 pour le groupe Γ. D'après les conjectures de Beĭlinson [17], les valeurs spéciales de ces fonctions L sont liées à des invariants arithmétiques intéressants de ces formes modulaires. Un théorème de Beĭlinson [2, 18] exprime la valeur spéciale $L^{(g)}(H^1(X_\Gamma), 0)$ en termes du régulateur de Beĭlinson

$$r_{X_\Gamma} : K_2^{(2)}(X_\Gamma)_{\mathbf{Z}} \to V_\Gamma := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\Omega^1(X_\Gamma), \mathbf{R}), \tag{2.2}$$

où $K_2^{(2)}(X_\Gamma)_{\mathbf{Z}}$ est un groupe de K-théorie de Quillen. Notons Λ_Γ l'image du morphisme donné par l'intégration

$$H_1^+(X_\Gamma(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \to V_\Gamma. \tag{2.3}$$

L'espace Λ_Γ est une $\mathbf{Q}$-structure de V_Γ. Beĭlinson [2] construit un sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel

$$\mathcal{P}_\Gamma \subset K_2^{(2)}(X_\Gamma) \tag{2.4}$$

dont l'image par l'application régulateur

$$L_\Gamma = r_{X_\Gamma}(\mathcal{P}_\Gamma) \tag{2.5}$$

est une $\mathbf{Q}$-structure de V_Γ, et tel que la comparaison des deux $\mathbf{Q}$-structures obtenues sur V_Γ donne

$$\det_{\Lambda_\Gamma} L_\Gamma = L^{(g)}(X_\Gamma, 0) \qquad \text{dans } \mathbf{R}^*/\mathbf{Q}^*. \tag{2.6}$$

D'autre part, Schappacher et Scholl [18, 1.1.2 (iii)] ont démontré que

$$\mathcal{P}_\Gamma \subset K_2^{(2)}(X_\Gamma)_{\mathbf{Z}}. \tag{2.7}$$

La formule de Beĭlinson n'est pas totalement explicite, dans le sens suivant. Elle fait intervenir, pour toute forme modulaire f primitive de poids 2 pour Γ, un caractère de Dirichlet auxiliaire χ, choisi parmi une infinité de caractères pour satisfaire

$$L(f, \chi, 1) \neq 0. \tag{2.8}$$

Dans le cas où $\Gamma = \Gamma_1(N)$, et sous certaines hypothèses sur N, nous montrons en utilisant des résultats de Merel que nous pouvons choisir χ parmi les caractères de niveau N, qui sont en nombre fini. Nous démontrons ainsi que l'espace d'arrivée de l'application régulateur est engendré, comme espace vectoriel réel, par l'image d'un nombre fini de symboles de Milnor *explicites*. Enfin, notre formule pour l'image de ces éléments possède l'avantage d'être exacte : il n'y a pas de facteur rationnel indéterminé. Cela est crucial pour démontrer les relations entre valeurs spéciales de fonctions L et mesures de Mahler.

2.1 Formulaire pour les séries d'Eisenstein

Dans cette section, nous suivons de près l'exposition remarquable de Siegel [19, pp. 1–73]. Le lecteur pourra y trouver les démonstrations que nous avons omises.

Soit N un entier ≥ 1. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, et donc les sous-groupes

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\} \text{ et} \tag{2.9}$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}, \tag{2.10}$$

opèrent sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$ par homographies :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), z \in \mathcal{H}). \tag{2.11}$$

Nous allons définir au moyen de séries d'Eisenstein des fonctions analytiques-réelles sur $\mathcal{H}$, invariantes sous l'action de $\Gamma_1(N)$ ou d'un sous-groupe conjugué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Pour tout $z \in \mathcal{H}$, nous noterons $y = \Im(z)$. Pour $x = (u,v) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$, $z \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(s) > 1$, définissons

$$E_x(z,s) = \sum_{\substack{m \equiv u \quad (N) \\ n \equiv v \quad (N)}}{}' \frac{y^s}{|mz+n|^{2s}}, \tag{2.12}$$

où le symbole $\sum'$ indique que la somme est étendue aux $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$, $(m,n) \neq (0,0)$. Nous allons aussi définir certaines combinaisons linéaires des séries E_x. Pour $(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$, $z \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(s) > 1$, définissons

$$\zeta_{a,b}(z,s) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}{}' \frac{e^{\frac{2\pi i}{N}(ma+nb)} \cdot y^s}{|mz+n|^{2s}}. \tag{2.13}$$

Les fonctions $\zeta_{a,b}(z,s)$ sont un cas très particulier de *fonctions zêta d'Epstein*. Remarquons l'identité

$$\zeta_{a,b}(z,s) = \sum_{(u,v) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} e^{\frac{2\pi i}{N}(au+bv)} E_{(u,v)}(z,s), \tag{2.14}$$

ainsi que la formule de transformée de Fourier inverse

$$E_{(u,v)}(z,s) = \frac{1}{N^2} \sum_{(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} e^{-\frac{2\pi i}{N}(au+bv)} \zeta_{a,b}(z,s). \tag{2.15}$$

Pour $(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$ et $z \in \mathcal{H}$ fixé, la fonction $s \mapsto \zeta_{a,b}(z,s)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe [19, Thm 3, p. 69]. Lorsque $(a,b) = (0,0)$, le prolongement a un unique pôle en $s = 1$, ce pôle est simple et son résidu (indépendant de z !) est égal à π. Lorsque $(a,b) \neq (0,0)$, le prolongement est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Nous définissons pour $z \in \mathcal{H}$

$$\zeta^*_{a,b}(z) = \begin{cases} \lim_{s \to 1} \big(\zeta_{a,b}(z,s) - \frac{\pi}{s-1}\big) & \text{si } (a,b) = (0,0), \\ \zeta_{a,b}(z,1) & \text{si } (a,b) \neq (0,0). \end{cases} \tag{2.16}$$

Nous déduisons des affirmations précédentes le prolongement méromorphe des fonctions $s \mapsto E_x(z,s)$ au plan complexe, avec un unique pôle en $s =$

1, simple et de résidu égal à $\frac{\pi}{N^2}$. En accord avec la notation (2.16), nous définissons

$$E_x^*(z) = \lim_{s\to 1}\Big(E_x(z,s) - \frac{\pi}{N^2(s-1)}\Big) \qquad (x \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2, z \in \mathcal{H}). \tag{2.17}$$

Passons maintenant aux deux *formules-limite de Kronecker*. Ces formules donnent une expression de $\zeta_{a,b}^*(z)$ dans le cas où $(a,b)=(0,0)$ (resp. $(a,b)\neq(0,0)$). La première formule-limite de Kronecker [19, Thm 1, p. 17] s'écrit

$$\zeta_{0,0}^*(z) = 2\pi\big(\gamma - \log 2 - \log\sqrt{y} - 2\log|\eta(z)|\big) \qquad (z \in \mathcal{H}), \tag{2.18}$$

où γ désigne la constante d'Euler et

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n z}) \qquad (z \in \mathcal{H}). \tag{2.19}$$

La deuxième formule-limite de Kronecker [19, Thm 2, p. 40] s'écrit de la façon suivante. Soit $(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$ avec $(a,b)\neq(0,0)$. Choisissons un couple de représentants $(\tilde{a},\tilde{b})$ de (a,b) dans $\mathbf{Z}^2$. Alors

$$\zeta_{a,b}^*(z) = \frac{2\pi^2\tilde{b}^2}{N^2}y - 2\pi\log\left|\vartheta\left(\frac{\tilde{a}-\tilde{b}z}{N}, z\right)\right|, \tag{2.20}$$

où nous avons posé, pour $w \in \mathbf{C}$ et $z \in \mathcal{H}$:

$$\vartheta(w,z) = e^{\frac{\pi i z}{6}}(e^{\pi i w} - e^{-\pi i w})\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i(w+nz)})(1 - e^{-2\pi i(w-nz)}). \tag{2.21}$$

Les fonctions E_x et E_x^* vérifient les propriétés de modularité suivantes. Pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, nous avons

$$E_x(gz,s) = E_{xg}(z,s) \qquad (z \in \mathcal{H}, s \in \mathbf{C}, s \neq 1), \tag{2.22}$$

$$E_x^*(gz) = E_{xg}^*(z) \qquad (z \in \mathcal{H}), \tag{2.23}$$

où nous avons noté $xg \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$ le produit du vecteur ligne x par la matrice g. En particulier, pour tout $x \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$, la fonction $z \mapsto E_x^*(z)$ est invariante par la transformation $z \mapsto z+N$, et admet donc un développement de Fourier (non holomorphe) en la variable $e^{\frac{2\pi i z}{N}}$. Il en va donc de même des fonctions $\zeta_{a,b}^*$, dont le développement de Fourier se déduit des formules-limite de Kronecker. Posons $q = e^{2\pi i z}$ et $q^{\frac{1}{N}} = e^{\frac{2\pi i z}{N}}$ pour $z \in \mathcal{H}$. Pour tout entier $r \geq 1$, notons $\sigma(r)$ la somme des diviseurs positifs de r. Nous avons alors

$$\zeta^*_{0,0}(z) = \frac{\pi^2 y}{3} - \pi \log y + 2\pi\Big(\gamma - \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sigma(r)}{r}(q^r + \overline{q}^r)\Big). \tag{2.24}$$

Écrivons ensuite le développement de Fourier de $\zeta^*_{a,0}$, avec $a \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$, $a \neq 0$. Notons $\zeta_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Nous avons alors

$$\zeta^*_{a,0}(z) = \frac{\pi^2 y}{3} - 2\pi \log|1 - \zeta_N^a| + \pi \sum_{r=1}^{\infty}\Big(\sum_{k\,|\,r} \frac{\zeta_N^{ka} + \zeta_N^{-ka}}{k}\Big)(q^r + \overline{q}^r). \tag{2.25}$$

Écrivons enfin le développement de Fourier de $\zeta^*_{a,b}$, avec $a \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$ et $b \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$, $b \neq 0$. Notons $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$ le deuxième polynôme de Bernoulli, et définissons une fonction 1-périodique $\overline{B_2}$ sur $\mathbf{R}$ par

$$\overline{B_2}(x) = B_2(x - \lfloor x \rfloor) \qquad (x \in \mathbf{R}), \tag{2.26}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier $\leq x$. Alors la quantité $\overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N})$ ne dépend pas du représentant $\tilde{b}$ de b dans $\mathbf{Z}$, et nous avons

$$\zeta^*_{a,b}(z) = 2\pi^2 \overline{B_2}\Big(\frac{\tilde{b}}{N}\Big) y + \pi \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cdot q^{\frac{r}{N}} + \overline{\alpha_r} \cdot \overline{q}^{\frac{r}{N}}, \tag{2.27}$$

où les coefficients α_r sont donnés par la formule

$$\alpha_r = \sum_{\substack{k\,|\,r \\ \frac{r}{k} \equiv b \pmod{N}}} \frac{\zeta_N^{-ka}}{k} + \sum_{\substack{k\,|\,r \\ \frac{r}{k} \equiv -b \pmod{N}}} \frac{\zeta_N^{ka}}{k} \qquad (r \geq 1). \tag{2.28}$$

Notons $E_N \subset (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$ l'ensemble des éléments d'ordre N du groupe additif $(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$. Nous avons une bijection

$$\begin{aligned} \Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\cong} E_N \\ \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] &\mapsto (c,d) \mod N. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Pour tout $x \in E_N$, notons $g_x \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ un représentant de l'image réciproque de x par la bijection (2.29). Il est alors facile de voir que la fonction E^*_x, définie sur $\mathcal{H}$, est invariante sous l'action du groupe $g_x^{-1}\Gamma_1(N)g_x$. Lorsque $x = (u,v) \notin E_N$, notons $d = (u,v,N) > 1$ et $x' = (\frac{u}{d}, \frac{v}{d}) \in (\mathbf{Z}/\frac{N}{d}\mathbf{Z})^2$. Alors $x' \in E_{\frac{N}{d}}$ et $E_x^* = d^{-2}E_{x'}^*$. En particulier, la fonction E_x^* sur $\mathcal{H}$ est invariante sous l'action d'un sous-groupe conjugué de $\Gamma_1(\frac{N}{d})$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$; elle est *a fortiori* invariante sous l'action d'un sous-groupe conjugué de $\Gamma_1(N)$.

Remarquons le comportement des séries d'Eisenstein vis-à-vis de la conjugaison complexe $z \mapsto -\overline{z}$ sur $\mathcal{H}$: pour tout $x = (u,v) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2$, nous avons

$$E_{(u,v)}(-\overline{z}, s) = E_{(-u,v)}(z,s)\,; \tag{2.30}$$
$$E^*_{(u,v)}(-\overline{z}) = E^*_{(-u,v)}(z). \tag{2.31}$$

Pour toute fonction $f : \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}$, nous définissons

$$E_f(z,s) = \sum_{v \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} f(v)\, E_{(0,v)}(z,s) \tag{2.32}$$
$$E_f^*(z) = \sum_{v \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} f(v)\, E^*_{(0,v)}(z). \tag{2.33}$$

L'application $f \mapsto E_f^*$ est clairement $\mathbf{C}$-linéaire. D'autre part, la notation E_f^* est en accord avec (2.16) et (2.17). La transformée de Fourier $\widehat{f} : \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}$ de f est définie par

$$\widehat{f}(b) = \sum_{v \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} f(v) \cdot e^{-\frac{2\pi i b v}{N}} \qquad (b \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}). \tag{2.34}$$

Rappelons que f et $\widehat{f}$ induisent des fonctions N-périodiques de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$. Le développement de Fourier de E_f^* se calcule aisément à l'aide des formules (2.24), (2.25) et (2.27). Nous avons en particulier la proposition suivante.

Proposition 13. *Soit $f : \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}$ une fonction de somme nulle. Lorsque f est impaire, nous avons $E_f^* = 0$. Lorsque f est paire, nous avons*

$$E_f^*(z) = 2L(f,2) \cdot y + \frac{2\pi}{N^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \Big(\sum_{k \mid r} k \widehat{f}(k) \Big) (q^r + \overline{q}^r) \qquad (z \in \mathcal{H}), \tag{2.35}$$

où nous avons posé $L(f,2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$.

Démonstration. D'après (2.23) appliqué à $g = -1$, nous avons $E^*_{(0,-v)} = E^*_{(0,v)}$. Si la fonction f est impaire, il suit donc $E^*_f = 0$. Supposons maintenant que f est paire. Puisque f est de somme nulle, nous avons $\widehat{f}(0) = 0$. Soit $z \in \mathcal{H}$. Nous avons

$$\begin{aligned} E^*_f(z) &= \sum_{v \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} f(v)\, E^*_{(0,v)}(z) \\ &= \sum_{v \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} f(v)\, \frac{1}{N^2} \sum_{(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} e^{-\frac{2\pi i b v}{N}} \zeta^*_{a,b}(z) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{b \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} \widehat{f}(b) \Big(\sum_{a \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} \zeta^*_{a,b}(z) \Big). \end{aligned}$$

Nous déduisons de (2.27) que pour $b \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$, $b \neq 0$, nous avons

$$\sum_{a \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} \zeta^*_{a,b}(z) = 2\pi^2 N \overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}) \cdot y + \pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \Big(\sum_{\substack{k \mid r \\ k \equiv b \quad (N)}} k + \sum_{\substack{k \mid r \\ k \equiv -b \quad (N)}} k \Big) (q^r + \overline{q}^r).$$

Il en résulte

$$E^*_f(z) = \frac{2\pi^2}{N} \Big(\sum_{b \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} \widehat{f}(b) \overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}) \Big) \cdot y + \frac{\pi}{N^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \Big(\sum_{k \mid r} k (\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)) \Big) (q^r + \overline{q}^r).$$

Par parité de f, nous avons $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$. La fonction $\overline{B_2}$ est donnée par la série de Fourier suivante, qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ [9, (1.56), p. 14]

$$\overline{B_2}(x) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ n \neq 0}} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Nous en déduisons aisément

$$\sum_{b \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} \widehat{f}(b) \overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}) = \frac{N}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^2} = \frac{N}{\pi^2} L(f, 2),$$

ce qui achève de montrer (2.35). □

Il est amusant de constater que le développement de Fourier de E^*_f fait intervenir naturellement la transformée de Fourier de f. Typiquement, nous utiliserons la série d'Eisenstein E^*_f dans le cas où f est un caractère de Dirichlet modulo N, ou la transformée de Fourier d'un tel caractère.

2.2 Lien avec les unités modulaires

Dans cette section, nous faisons le lien entre les séries d'Eisenstein définies précédemment et certaines unités modulaires.

L'ensemble quotient

$$Y_1(N)(\mathbf{C}) = \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H} \tag{2.36}$$

peut être muni d'une structure de surface de Riemann (non compacte), appelée courbe modulaire ouverte. L'ensemble quotient

$$X_1(N)(\mathbf{C}) = \Gamma_1(N)\backslash(\mathcal{H} \sqcup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})), \tag{2.37}$$

obtenu à partir de $Y_1(N)(\mathbf{C})$ en rajoutant l'ensemble

$$P_N = \Gamma_1(N)\backslash\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}), \tag{2.38}$$

peut être muni d'une structure de surface de Riemann compacte, appelée courbe modulaire complétée. L'ensemble P_N est appelé ensemble des pointes. La pointe infinie est par définition la classe de $\infty \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$; elle est encore notée ∞. Notons Γ_∞ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ engendré par les matrices $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le groupe Γ_∞ opère par multiplication à droite sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et sur E_N, et nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\Gamma_\infty &\xrightarrow{\cong} \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \\ \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] &\mapsto \frac{a}{c}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Nous en déduisons la suite de bijections

$$P_N \cong \Gamma_1(N)\backslash\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \cong \Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\Gamma_\infty \cong E_N/\Gamma_\infty. \tag{2.40}$$

En particulier, l'ensemble P_N est fini. Un système de représentants de $P_N = E_N/\Gamma_\infty$ dans E_N est donné par

$$\begin{cases} (0,v) & \text{avec } 0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \text{ et } (v,N) = 1\,; \\ (u,v) & \text{avec } 0 < u < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor,\ 0 \leq v < (u,N) \text{ et } (u,v,N) = 1\,; \\ (\frac{N}{2}, v) & \text{avec } 0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor \text{ et } (v, \frac{N}{2}) = 1 \text{ (pour } N \text{ pair).} \end{cases} \tag{2.41}$$

Pour tout $(u,v) \in E_N$, nous notons $[u,v]$ la classe de (u,v) dans $P_N = E_N/\Gamma_\infty$. Nous avons donc $\infty = [0,1]$.

Nous notons $\mathbf{C}(X_1(N))$ le corps des fonctions méromorphes de la surface de Riemann compacte $X_1(N)(\mathbf{C})$. Les éléments de $\mathbf{C}(X_1(N))$ sont appelés fonctions modulaires pour $\Gamma_1(N)$. Par définition, le groupe des unités modulaires $\mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C}))$ est le sous-groupe de $\mathbf{C}(X_1(N))^*$ formé des fonctions u dont le diviseur est à support dans P_N, c'est-à-dire vérifiant $(u) \subset P_N$. Notons $\mathrm{Div}(P_N)$ (resp. $\mathrm{Div}^0(P_N)$) le groupe des diviseurs (resp. diviseurs de degré 0) sur P_N. Le diviseur d'une unité modulaire $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C}))$ vérifie $\mathrm{div}\, u \in \mathrm{Div}^0(P_N)$. D'après le théorème de Manin-Drinfel'd [13], l'application naturelle

$$\mathrm{div} \otimes \mathbf{Q} : \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{Q} \to \mathrm{Div}^0(P_N) \otimes \mathbf{Q} \tag{2.42}$$

est surjective. Nous en déduisons les suites exactes

$$0 \to \mathbf{C}^* \otimes \mathbf{Q} \to \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{Q} \to \mathrm{Div}^0(P_N) \otimes \mathbf{Q} \to 0\,; \tag{2.43}$$

$$0 \to \mathbf{C}^* \otimes \mathbf{C} \to \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C} \to \mathrm{Div}^0(P_N) \otimes \mathbf{C} \to 0\,, \tag{2.44}$$

où les flèches de gauche sont déduites de l'inclusion naturelle $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}(X_1(N))$. Toute unité modulaire $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C}))$ induit une fonction holomorphe $u : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ invariante par la transformation $z \mapsto z+1$ et admettant donc un développement de Fourier de la forme

$$u(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^n \qquad (z \in \mathcal{H}, q = e^{2\pi i z}) \tag{2.45}$$

avec $n_0 \in \mathbf{Z}$ et $a_{n_0} \neq 0$. Nous définissons alors

$$\widehat{u}(\infty) = a_{n_0}. \tag{2.46}$$

L'application $u \mapsto \widehat{u}(\infty)$ est un morphisme de groupes de $\mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C}))$ vers $\mathbf{C}^*$ qui, après tensorisation par $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{C}$, scinde les suites exactes (2.43) et (2.44). Toute unité modulaire $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C}))$ induit une fonction $\log|u| : \mathcal{H} \to \mathbf{R}$, invariante sous l'action de $\Gamma_1(N)$. L'application $u \mapsto \log|u|$ est un morphisme de groupes et s'étend par linéarité à $\mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C}$: pour tout $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C}$, nous disposons donc d'une fonction $\log|u| : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$, invariante sous l'action de $\Gamma_1(N)$. Enfin, nous étendons par linéarité les définitions de $\mathrm{div}\, u$ et $\mathrm{ord}_P(u)$, $P \in P_N$, au cas où $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C}$.

Proposition 14. *Soit $f : \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}$ une fonction de somme nulle. Il existe une unique unité modulaire $u_f \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C}$ vérifiant*

$$\log|u_f| = \frac{1}{\pi} \cdot E_f^* \qquad \textit{et} \qquad \widehat{u_f}(\infty) = 1 \otimes 0 \in \mathbf{C}^* \otimes \mathbf{C}. \tag{2.47}$$

Lorsque f est impaire, nous avons $u_f = 1 \otimes 0$. Lorsque f est paire, le diviseur de u_f s'obtient de la manière suivante : pour toute pointe $P = [u,v] \in P_N$, avec $(u,v) \in E_N$, nous avons

$$\operatorname{ord}_P(u_f) = -\frac{1}{N \cdot (u,N)} \sum_{(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} \widehat{f}(au+bv) \cdot \overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}). \tag{2.48}$$

De plus, l'application $f \mapsto u_f$ ainsi définie est $\mathbf{C}$-linéaire.

Démonstration. Puisque toute fonction de $\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$ dans $\mathbf{C}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, il suffit par linéarité de montrer le résultat dans le cas où f est paire ou impaire. Lorsque f est impaire, le résultat est évident puisque $E_f^* = 0$. Supposons donc maintenant que f est paire. Chacune des fonctions $E^*_{(0,v)}$, $v \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$ sur $\mathcal{H}$ est invariante sous l'action de $\Gamma_1(N)$ d'après (2.23). En conséquence E_f^* induit une fonction $\phi : Y_1(N)(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$. Montrons que ϕ est de classe C^∞ sur $Y_1(N)(\mathbf{C})$ et vérifie $\partial\overline{\partial}\phi = 0$. D'après (2.35), nous pouvons écrire $E_f^* = E_1 + E_2$, où E_1 (resp. E_2) est une fonction holomorphe (resp. antiholomorphe) sur $\mathcal{H}$. Notons $\pi : \mathcal{H} \to Y_1(N)(\mathbf{C})$ la projection naturelle. Soit $z_0 \in \mathcal{H}$. D'après [8, Ex. i), p. 75], nous pouvons trouver une coordonnée locale holomorphe u (resp. v) au point $z_0 \in \mathcal{H}$ (resp. $\pi(z_0) \in Y_1(N)(\mathbf{C})$), de telle sorte que la fonction π soit donnée au voisinage de z_0 par $v = \pi(u) = u^n$, où n est un entier ≥ 1. L'entier n n'est autre que l'indice de ramification de π en z_0. Dans ces coordonnées, nous avons donc

$$\phi(v) = E_1(u) + E_2(u). \tag{2.49}$$

Soit $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. D'après l'équation (2.49), nous avons $E_1(u\zeta_n) + E_2(u\zeta_n) = E_1(u) + E_2(u)$. Par conséquent, la fonction

$$u \mapsto E_1(u\zeta_n) - E_1(u) = E_2(u\zeta_n) - E_2(u)$$

est holomorphe et antiholomorphe, donc constante au voisinage de 0. Cette constante vaut $E_1(0) - E_1(0) = 0$, d'où $E_1(u\zeta_n) = E_1(u)$ et $E_2(u\zeta_n) = E_2(u)$. Donc E_1 (resp. E_2) induit une fonction holomorphe (resp. antiholomorphe) de v. D'après (2.49), la fonction ϕ est de classe C^∞ sur un voisinage de $\pi(z_0)$

dans $Y_1(N)(\mathbf{C})$ et vérifie $\partial\overline{\partial}\phi = 0$ sur ce voisinage. Le résultat étant vrai localement, la fonction ϕ est de classe C^∞ sur $Y_1(N)(\mathbf{C})$ et vérifie $\partial\overline{\partial}\phi = 0$.

Soit maintenant $P = [u, v] \in P_N$ et $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ un représentant de P via la bijection (2.40). Nous avons donc $\gamma \equiv u \pmod N$ et $\delta \equiv v \pmod N$. Soit $z \in \mathcal{H}$. D'après (2.23), nous avons

$$\begin{aligned}
E_f^*(gz) &= \sum_{w \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} f(w)\ E^*_{(0,w)}(gz) \\
&= \sum_{w \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} f(w)\ E^*_{(uw,vw)}(z) \\
&= \sum_{w \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} f(w)\ \frac{1}{N^2} \sum_{(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} e^{-\frac{2\pi i}{N}(auw+bvw)} \cdot \zeta^*_{a,b}(z) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} \widehat{f}(au+bv) \cdot \zeta^*_{a,b}(z).
\end{aligned}$$

Puisque $\widehat{f}(0) = 0$, nous pouvons omettre le terme $(a, b) = (0, 0)$ dans la somme précédente. D'après les développements de Fourier (2.25) et (2.27), nous voyons que $E_f^*(gz)$ admet un développement de Fourier de la forme

$$E_f^*(gz) = K_P \cdot y + \alpha_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r q^{\frac{r}{N}} + \beta_r \overline{q}^{\frac{r}{N}}, \tag{2.50}$$

avec $K_P, \alpha_r, \beta_r \in \mathbf{C}$. La constante K_P est donnée par

$$K_P = \frac{2\pi^2}{N^2} \sum_{(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} \widehat{f}(au+bv) \cdot \overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}) \tag{2.51}$$

et ne dépend que de la classe de (u, v) dans P_N. Rappelons qu'un paramètre local en la pointe $P \in P_N$ est donné par

$$q_P = q^{\frac{(u,N)}{N}} = e^{\frac{2\pi i(u,N)}{N} z}. \tag{2.52}$$

Soit $G_{X_1(N)(\mathbf{C})}$ la fonction de Green définie dans le premier chapitre. Pour $P = [u, v] \in P_N$ et $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ représentant P, considérons la fonction

$$z \in \mathcal{H} \mapsto G_{X_1(N)(\mathbf{C})}(P, \pi(gz)). \tag{2.53}$$

D'après (1.8) et (2.52), nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} G_{X_1(N)(\mathbf{C})}(P, \pi(gz)) &= \log|q_P| + O_{y\to\infty}(1) \\ &= -\frac{2\pi(u,N)}{N} \cdot y + O_{y\to\infty}(1) \qquad (z \in \mathcal{H}). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Définissons une fonction ψ sur $Y_1(N)(\mathbf{C})$ par

$$\psi = \phi + \frac{N}{2\pi} \sum_{P\in P_N} \frac{K_P}{(u,N)} \cdot G_{X_1(N)(\mathbf{C})}(P, \cdot). \tag{2.55}$$

D'après (2.50) et (2.54), la fonction ψ s'étend en une fonction de classe C^∞ sur $X_1(N)(\mathbf{C})$. Nous avons sur $Y_1(N)(\mathbf{C})$

$$\partial\overline{\partial}\psi = \partial\overline{\partial}\phi + \frac{N}{2\pi} \sum_{P\in P_N} \frac{K_P}{(u,N)} \cdot \pi i \operatorname{vol}_{X_1(N)(\mathbf{C})}.$$

Donc sur $X_1(N)(\mathbf{C})$, nous avons

$$\partial\overline{\partial}\psi = \frac{N}{2\pi} \sum_{P\in P_N} \frac{K_P}{(u,N)} \cdot \pi i \operatorname{vol}_{X_1(N)(\mathbf{C})}.$$

D'après la formule de Stokes $\int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \partial\overline{\partial}\psi = \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} d(\overline{\partial}\psi) = 0$. D'autre part $\int \operatorname{vol}_{X_1(N)(\mathbf{C})} = 1$, d'où nous déduisons

$$\sum_{P\in P_N} \frac{K_P}{(u,N)} = 0. \tag{2.56}$$

Il en résulte $\partial\overline{\partial}\psi = 0$, c'est-à-dire que ψ est constante sur $X_1(N)(\mathbf{C})$. D'après (2.56) et la suite exacte scindée (2.44), il existe une unique unité modulaire $u_f \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C}$ telle que

$$\operatorname{div} u_f = -\frac{N}{2\pi^2} \sum_{P\in P_N} \frac{K_P}{(u,N)} \cdot [P] \qquad \text{et} \qquad \widehat{u_f}(\infty) = 1 \otimes 0. \tag{2.57}$$

D'après (1.12), il existe une constante $C \in \mathbf{C}$ telle que

$$\log|u_f| = C - \frac{N}{2\pi^2} \sum_{P\in P_N} \frac{K_P}{(u,N)} \cdot G_{X_1(N)(\mathbf{C})}(P, \cdot). \tag{2.58}$$

Nous déduisons de (2.55) et (2.58) l'existence d'une constante $C' \in \mathbf{C}$ telle que

$$\log|u_f| = C' + \frac{E_f^*}{\pi}.$$

Pour déterminer la constante C', nous considérons les développements de Fourier des deux membres de l'égalité précédente. D'après la définition (2.46) de $\widehat{u_f}(\infty)$, le terme constant du développement de Fourier de $\log|u_f|$ vaut $\log|\widehat{u_f}(\infty)|$, c'est-à-dire 0. D'après le développement de Fourier (2.35) de E_f^*, nous en déduisons $C' = 0$, ce qui montre (2.47). L'égalité (2.48) résulte de la définition de u_f. Il est clair, d'après cette dernière égalité, que l'application $f \mapsto \operatorname{div} u_f$ est $\mathbf{C}$-linéaire. Or, u_f n'est autre que l'image de $\operatorname{div} u_f$ par l'application linéaire

$$\operatorname{Div}^0(P_N) \otimes \mathbf{C} \to \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C}$$

scindant la suite exacte (2.44). Donc $f \mapsto u_f$ est $\mathbf{C}$-linéaire. □

Nous appliquons maintenant la proposition précédente dans le cas où f est un caractère de Dirichlet, ou sa transformée de Fourier. Pour tout $d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*$, notons $\langle d \rangle \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ un représentant de l'image réciproque de $(0,d)$ par la bijection (2.29) ; un tel élément est appelé opérateur diamant. Ces derniers induisent une action du groupe $(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*/\pm 1$ sur P_N, par la règle

$$\langle d \rangle \cdot [u,v] = [du, dv] \qquad (d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*, (u,v) \in E_N). \tag{2.59}$$

Pour tout $d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*/\pm 1$, nous notons $P_d = [0,d] = \langle d \rangle \cdot \infty$. Nous obtenons ainsi une bijection naturelle entre $(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*/\pm 1$ et l'orbite de la pointe infinie sous l'action des opérateurs diamants.

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes $\chi : (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^* \to \mathbf{C}^*$. Rappelons que χ s'étend (par 0) en une application $\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}$, que nous notons encore χ. La somme de Gauß $\tau(\chi)$ de χ est définie par

$$\tau(\chi) = \sum_{v \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} \chi(v) \cdot e^{\frac{2\pi i v}{N}}. \tag{2.60}$$

Nous disposons de séries d'Eisenstein E_χ^* et $E_{\widehat{\chi}}^*$. Remarquons les relations

$$E_\chi^*(\langle d \rangle \cdot z) = \overline{\chi}(d)\, E_\chi^*(z)\,; \tag{2.61}$$

$$E_{\widehat{\chi}}^*(\langle d \rangle \cdot z) = \chi(d)\, E_{\widehat{\chi}}^*(z) \qquad (d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*, z \in \mathcal{H}). \tag{2.62}$$

Lorsque χ (resp. $\widehat{\chi}$) vérifie les hypothèses de la proposition 14, nous en déduisons une unité modulaire u_χ (resp. $u_{\widehat{\chi}}$). Dans la proposition suivante, nous obtenons explicitement le diviseur de u_χ et $u_{\widehat{\chi}}$.

Proposition 15. *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N, pair et non trivial* i. e. *vérifiant $\chi(-1) = 1$ et $\chi \neq 1$. Alors u_χ est définie et nous avons*

$$\operatorname{div} u_\chi = -\frac{L(\chi, 2)}{\pi^2} \sum_{d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*/\pm 1} \overline{\chi}(d) \cdot P_d. \tag{2.63}$$

Soit χ un caractère de Dirichlet pair modulo N, avec $N > 1$. Alors $u_{\widehat{\chi}}$ est définie. Notons N_χ le conducteur de χ et, pour tout entier $d \geq 1$ vérifiant $N_\chi \mid d \mid N$, notons χ_d le caractère modulo d induit par χ. Pour toute pointe $P = [u, v] \in P_N$, avec $(u, v) \in E_N$, posons $d = (u, N)$; nous avons alors

$$\operatorname{ord}_P(u_{\widehat{\chi}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } N_\chi \nmid d\,; \\ -\frac{\phi(N)/N}{\phi(d)/d} \chi_d(v_d) \sum_{\beta \in (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*} \overline{B_2}(\frac{\tilde{\beta}}{d}) \chi_d(\beta) & \text{si } N_\chi \mid d, \end{cases} \tag{2.64}$$

où $v_d \in (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$ désigne l'image de v modulo d. Lorsque de plus χ est primitif i. e. *$N_\chi = N$, nous avons* $\operatorname{div} u_{\widehat{\chi}} = \tau(\chi) \cdot \operatorname{div} u_{\overline{\chi}}$.

Démonstration. Supposons d'abord χ pair et non trivial. La fonction $\chi : \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}$ est paire, et de somme nulle puisque le caractère est non trivial. Calculons $\operatorname{ord}_P(u_\chi)$ pour $P = [u, v] \in P_N$. Nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_P(u_\chi) &= -\frac{1}{N \cdot (u, N)} \sum_{(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} \widehat{\chi}(au + bv) \cdot \overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}) \\ &= -\frac{1}{N \cdot (u, N)} \sum_{(a,b) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2} \sum_{w \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*} \chi(w) e^{-\frac{2\pi i (au+bv)w}{N}} \cdot \overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}). \end{aligned}$$

Or nous avons $\sum_{a \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} e^{-\frac{2\pi i a u w}{N}} = 0$ si $u \neq 0$. Il en résulte $\operatorname{ord}_P(u_\chi) = 0$ si $u \neq 0$. Supposons maintenant $u = 0$, c'est-à-dire $P = [0, v]$ avec $v \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}_P(u_\chi) &= -\frac{1}{N}\sum_{b\in\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}}\ \sum_{w\in(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*} \chi(w)e^{-\frac{2\pi i bvw}{N}}\cdot\overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N})\\
&= -\frac{1}{N}\sum_{b\in\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}}\widehat{\chi}(bv)\cdot\overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N})\\
&= -\overline{\chi}(v)\frac{L(\chi,2)}{\pi^2},
\end{aligned}$$

comme dans la démonstration de la proposition 13. Il en résulte (2.63). Passons à la deuxième partie de la proposition. Soit χ un caractère de Dirichlet pair modulo $N>1$, de conducteur N_χ. Puisque $\widehat{\widehat{\chi}} = N\cdot\chi$ et d'après l'hypothèse $N>1$, la fonction $\widehat{\chi} : \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}$ est paire et de somme nulle. Il vient également

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}_P(u_{\widehat{\chi}}) &= -\frac{1}{(u,N)}\sum_{(a,b)\in(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2}\chi(au+bv)\cdot\overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N})\\
&= -\frac{1}{(u,N)}\sum_{w\in(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*}\chi(w)\sum_{\substack{(a,b)\in(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2\\ au+bv=w}}\overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N})\\
&= -\frac{1}{(u,N)}\sum_{w\in(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*}\chi(w)\sum_{\substack{(a,b)\in(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2\\ aw^{-1}u+bw^{-1}v=1}}\overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}).
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer la somme

$$S(u,v) = \sum_{\substack{(a,b)\in(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^2\\ au+bv=1}}\overline{B_2}(\frac{\tilde{b}}{N}) \qquad \big((u,v)\in E_N\big) \tag{2.65}$$

En posant $d=(u,N)$, nous avons clairement $S(u,v)=S(d,v)$. Soient $a_0, b_0 \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$ tels que $a_0d+b_0v=1$, ce qui est possible. La solution générale de l'équation $ad+bv=1$, $a,b\in\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$ s'écrit

$$\begin{cases} a = a_0 - kv\,;\\ b = b_0 + kd\,, \quad k\in\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}. \end{cases}$$

Par conséquent

$$S(d,v) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{B_2}\Big(\frac{\tilde{b_0}+kd}{N}\Big) = d \sum_{k=0}^{N/d-1} \overline{B_2}\Big(\frac{\tilde{b_0}/d+k}{N/d}\Big).$$

La fonction $\overline{B_2}$ satisfait la relation de distribution [9, (**), p. 22]

$$\overline{B_2}(x) = r \sum_{k=0}^{r-1} \overline{B_2}\Big(\frac{x+k}{r}\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}, r \geq 1). \tag{2.66}$$

Nous en déduisons

$$S(d,v) = \frac{d^2}{N} \overline{B_2}(\frac{\tilde{b_0}}{d}),$$

où $\tilde{b_0} \in \mathbf{Z}$ est un entier quelconque vérifiant $\tilde{b_0} v \equiv 1 \pmod{d}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_P(u_{\widehat{\chi}}) &= -\frac{1}{d} \sum_{w \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*} \chi(w)\ S(d, w^{-1}v) \\ &= -\frac{d}{N} \sum_{w \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*} \chi(w)\ \overline{B_2}(\frac{\tilde{w}\tilde{b_0}}{d}), \end{aligned}$$

où $\tilde{w}$ désigne un représentant quelconque de w dans $\mathbf{Z}$. Par conséquent

$$\mathrm{ord}_P(u_{\widehat{\chi}}) = -\frac{d}{N} \sum_{\beta \in (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*} \Big(\sum_{\substack{w \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^* \\ w \equiv \beta \ (d)}} \chi(w) \Big) \overline{B_2}(\frac{\tilde{\beta}\tilde{b_0}}{d}), \tag{2.67}$$

où $\tilde{\beta}$ désigne un représentant quelconque de β dans $\mathbf{Z}$. Nous distinguons maintenant deux cas. Si $N_\chi \nmid d$, c'est-à-dire χ ne se factorise pas par $(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$, la somme intérieure de (2.67) est nulle, donc $\mathrm{ord}_P(u_{\widehat{\chi}}) = 0$. Si $N_\chi \mid d$, notons χ_d le caractère modulo d induit par χ, alors la somme intérieure de (2.67) vaut $\frac{\phi(N)}{\phi(d)} \chi_d(\beta)$, d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_P(u_{\widehat{\chi}}) &= -\frac{\phi(N)/N}{\phi(d)/d} \sum_{\beta \in (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*} \chi_d(\beta)\ \overline{B_2}(\frac{\tilde{\beta}\tilde{b_0}}{d}) \\ &= -\frac{\phi(N)/N}{\phi(d)/d} \sum_{\beta' \in (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*} \chi_d(\beta' v_d)\ \overline{B_2}(\frac{\tilde{\beta}'}{d}), \end{aligned}$$

grâce au changement de variables $\beta = \beta' v_d$, ce qui montre (2.64). Lorsque χ est primitif (et pair), l'égalité $\widehat{\chi} = \tau(\chi) \cdot \overline{\chi}$ est classique. L'application $f \mapsto \operatorname{div} u_f$ étant $\mathbf{C}$-linéaire, nous en déduisons $\operatorname{div} u_{\widehat{\chi}} = \tau(\chi) \cdot \operatorname{div} u_{\overline{\chi}}$. $\square$

2.3 Calcul du régulateur par la méthode de Rankin-Selberg

Soit N un entier ≥ 1. Dans cette section, nous nous intéressons à l'application régulateur (1.23) définie sur le groupe $K_2(\mathbf{C}(X_1(N)))$. Nous calculons l'image par cette application des symboles de Milnor associés à certaines unités modulaires.

Notons $S_2(\Gamma_1(N))$ l'espace des formes paraboliques de poids 2 pour le groupe $\Gamma_1(N)$. Il s'identifie canoniquement à $\Omega^{1,0}(X_1(N)(\mathbf{C}))$, au moyen de l'application $f \mapsto \omega_f := 2\pi i f(z)dz$. Pour tout caractère de Dirichlet ψ modulo N, notons $S_2(\Gamma_1(N), \psi) \subset S_2(\Gamma_1(N))$ le sous-espace des formes de caractère ψ. D'autre part, notons $\mathbf{T} \subset \operatorname{End}_{\mathbf{C}} S_2(\Gamma_1(N))$ l'algèbre de Hecke, engendrée par tous les opérateurs de Hecke T_n, $n \geq 1$ et les opérateurs diamants $\langle d \rangle$, $d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*$. Nous avons un isomorphisme canonique [16, Lemma 9]

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \otimes \mathbf{C} &\xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(S_2(\Gamma_1(N)), \mathbf{C}) \\ T &\mapsto \big(f \mapsto a_1(Tf)\big), \end{aligned} \tag{2.68}$$

où $a_1(\cdot)$ désigne le premier coefficient de Fourier d'une forme modulaire. Pour tout caractère de Dirichlet ψ modulo N, nous notons

$$\mathbf{T}^{\psi} = \{T \in \mathbf{T} \otimes \mathbf{C} \mid \forall d \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*,\ T \circ \langle d \rangle = \psi(d) \cdot T\}. \tag{2.69}$$

Nous avons alors une décomposition canonique de $\mathbf{T} \otimes \mathbf{C}$ en produit de sous-algèbres

$$\mathbf{T} \cong \prod_{\psi} \mathbf{T}^{\psi}, \tag{2.70}$$

le produit étant étendu aux caractères de Dirichlet (pairs) modulo N. Pour tout caractère de Dirichlet χ de niveau arbitraire, posons

$$L(\mathbf{T}, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \otimes \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (s \in \mathbf{C}, \Re(s) > \frac{3}{2}). \tag{2.71}$$

Cette série converge absolument et la fonction $s \mapsto L(\mathbf{T}, \chi, s)$ admet un prolongement holomorphe au plan complexe. Lorsque χ est le caractère de niveau 1, nous retrouvons la série L usuelle

$$L(\mathbf{T}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{n^s} \qquad (s \in \mathbf{C}, \Re(s) > \frac{3}{2}). \tag{2.72}$$

Pour tout caractère ψ modulo N, nous définissons $L(\mathbf{T}^\psi, \chi, s)$ (resp. $L(\mathbf{T}^\psi, s)$) comme la composante de caractère ψ de $L(\mathbf{T}, \chi, s)$ (resp. $L(\mathbf{T}, s)$), via la décomposition (2.70).

Grâce à la définition 8 et après tensorisation par $\mathbf{C}$, nous disposons d'une application régulateur

$$r_{X_1(N)(\mathbf{C})} : K_2(\mathbf{C}(X_1(N))) \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{T} \otimes \mathbf{C}. \tag{2.73}$$

Nous noterons pour abréger $r_N = r_{X_1(N)(\mathbf{C})}$. L'inclusion naturelle

$$\mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \subset \mathbf{C}(X_1(N))^*$$

induit une application bilinéaire antisymétrique

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C}))^{\otimes 2} &\to K_2(\mathbf{C}(X_1(N))) \\ u \otimes v &\mapsto \{u, v\}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Notons I_N l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe $\mathbf{C}[\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}]$. Nous avons construit dans la proposition 14 une application $\mathbf{C}$-linéaire $I_N \to \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C}$. Par composition avec r_N, nous en déduisons une application $\mathbf{C}$-bilinéaire aletrnée

$$\begin{aligned} \widetilde{r}_N : I_N \times I_N &\to \mathbf{T} \otimes \mathbf{C} \\ (f, g) &\mapsto r_N\big(\{u_f, u_g\}\big). \end{aligned} \tag{2.75}$$

Théorème 16. *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N, pair et non trivial, $M > 1$ un diviseur de N et χ' un caractère de Dirichlet pair modulo M. Notons χ'_N le caractère modulo N induit par χ', et posons $\psi = \chi\overline{\chi'_N}$. Notons $\alpha : Y_1(N)(\mathbf{C}) \to Y_1(M)(\mathbf{C})$ la projection naturelle, induite par l'inclusion $\Gamma_1(N) \subset \Gamma_1(M)$. Nous avons alors*

$$r_N\big(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\big) = \frac{\phi(N)}{2\pi i \cdot M} \cdot L(\mathbf{T}^\psi, 2) \cdot L(\mathbf{T}^\psi, \chi', 1) \in \mathbf{T}^\psi. \tag{2.76}$$

En particulier, si χ' est un caractère de Dirichlet pair modulo N, et $\psi = \chi\overline{\chi'}$, nous avons

$$\widetilde{r}_N(\chi, \widehat{\chi'}) = \frac{\phi(N)/N}{2\pi i} \cdot L(\mathbf{T}^\psi, 2) \cdot L(\mathbf{T}^\psi, \chi', 1) \in \mathbf{T}^\psi. \tag{2.77}$$

Ce théorème peut être vu comme une version partielle, mais explicite, du théorème de Beilinson sur les régulateurs associés aux courbes modulaires [3, 18]. Il est intéressant de remarquer que ce calcul permet d'obtenir explicitement le facteur de proportionnalité liant le régulateur $r_N\bigl(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\bigr)$ au produit de valeurs spéciales $L(\mathbf{T}^\psi, 2) L(\mathbf{T}^\psi, \overline{\chi'}, 1)$.

Corollaire 17. *Soient χ et χ' deux caractères de Dirichlet pairs modulo N, avec χ non trivial et χ' primitif. Posant $\psi = \chi\chi'$, nous avons*

$$\widetilde{r}_N(\chi, \chi') = \frac{\phi(N)/N}{2\pi i \cdot \tau(\overline{\chi'})} \cdot L(\mathbf{T}^\psi, 2) \cdot L(\mathbf{T}^\psi, \overline{\chi'}, 1) \in \mathbf{T}^\psi. \tag{2.78}$$

Remarque 18. *Sans l'hypothèse χ' primitif, nous n'avons pas trouvé de formule satisfaisante pour $\widetilde{r}_N(\chi, \chi')$.*

Démonstration du théorème 16. La démonstration consiste en deux grandes étapes. La première étape, de nature globale, utilise la méthode de Rankin-Selberg et exprime le régulateur en termes d'une convolution de séries de Dirichlet (2.88). Pour une introduction à la méthode de Rankin-Selberg, voir [20, 3. B.]. La seconde étape, de nature locale, exprime cette série de Dirichlet comme produit eulérien (2.90). Il est à noter que jusqu'au bout du calcul, nous tiendrons compte des facteurs locaux aux mauvaises places, c'est-à-dire aux nombres premiers divisant N.

L'égalité (2.77) est clairement conséquence de (2.76) : elle correspond au cas particulier $M = N$. Il suffit donc de montrer (2.76). L'application régulateur r_N en (2.73) peut s'exprimer élégamment à l'aide de la forme modulaire universelle

$$\Omega = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot e^{2\pi i n z} dz \in S_2(\Gamma_1(N)) \otimes \mathbf{T}. \tag{2.79}$$

Par naturalité de l'application régulateur, nous avons

$$r_N\bigl(\{f, g\}\bigr) = \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \log|f| \cdot \Omega \wedge \overline{\partial} \log|g| \qquad (f, g \in \mathbf{C}(X_1(N))^* \otimes \mathbf{C}). \tag{2.80}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} r_N\big(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\big) &= \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \log|u_\chi| \cdot \Omega \wedge \overline{\partial} \log|\alpha^* u_{\widehat{\chi'}}| \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{Y_1(N)(\mathbf{C})} E_\chi^* \cdot \Omega \wedge \overline{\partial} E^*_{\widehat{\chi'}}, \end{aligned} \tag{2.81}$$

où nous considérons $\overline{\partial} E^*_{\widehat{\chi'}}$ comme une forme différentielle sur $\mathcal{H}$ invariante par $\Gamma_1(M)$, et donc par $\Gamma_1(N)$. Montrons que l'intégrale (2.81) appartient à $\mathbf{T}^\psi$. Les opérateurs diamants $\langle d \rangle$, $d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*$ induisent des automorphismes de $Y_1(N)(\mathbf{C})$ et $X_1(N)(\mathbf{C})$. Si nous effectuons le changement de variables $z \to \langle d \rangle z$ dans (2.81), nous obtenons grâce à (2.61) et (2.62)

$$r_N\big(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\big) = \overline{\chi}(d)\, \chi'_N(d)\, \frac{1}{\pi^2} \int_{Y_1(N)(\mathbf{C})} E_\chi^* \cdot \langle d \rangle^* \Omega \wedge \overline{\partial} E^*_{\widehat{\chi'}},$$

où $\langle d \rangle^* \Omega$ désigne l'image réciproque de la forme différentielle Ω par l'automorphisme $\langle d \rangle$. L'isomorphisme (2.68) étant compatible à l'action des opérateurs diamants, nous avons $\langle d \rangle^* \Omega = \Omega \otimes \langle d \rangle$, où à droite $\langle d \rangle$ agit par multiplication sur le facteur $\mathbf{T}$ du produit tensoriel. Il en résulte que $r = r_N\big(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\big)$ vérifie

$$r \circ \langle d \rangle = \chi(d)\, \overline{\chi'_N}(d)\, r = \psi(d)\, r \qquad (d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*),$$

c'est-à-dire exactement $r \in \mathbf{T}^\psi$. L'isomorphisme (2.68) induit une décomposition $\Omega = \sum_\alpha \Omega^\alpha$, avec $\Omega^\alpha \in S_2(\Gamma_1(N)) \otimes \mathbf{T}^\alpha$, la somme portant sur les caractères α modulo N. La composante de caractère ψ de l'intégrale (2.81) s'obtient en remplaçant Ω par Ω^ψ. Grâce à la relation $\langle d \rangle^* \Omega = \Omega \otimes \langle d \rangle$, il est facile de voir que

$$\Omega^\psi \in S_2(\Gamma_1(N), \psi) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{T}^\psi. \tag{2.82}$$

L'intégrale (2.81) est étendue à $Y_1(N)(\mathbf{C}) = \Gamma_1(N) \backslash \mathcal{H}$. Pour utiliser la méthode de Rankin-Selberg, nous allons écrire $E_\chi^*(z)$, $z \in \mathcal{H}$ comme une somme indexée par $\langle T \rangle \backslash \Gamma_0(N)$, où $\langle T \rangle$ désigne le sous-groupe engendré par la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque χ est non trivial et en utilisant (2.17), il vient $E_\chi^*(z) = \lim_{s \to 1} E_\chi(z, s)$. D'autre part,

$$E_\chi(z,s) = \sum_{v \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*} \chi(v)\ E_{(0,v)}(z,s) = \sum_{\substack{m \equiv 0 \quad (N) \\ (n,N)=1}} \frac{\chi(n)\ y^s}{|mz+n|^{2s}}.$$

Nous pouvons réécrire cette somme en distinguant les valeurs de $d = (m, n)$, qui est ≥ 1 et premier à N. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
E_\chi(z,s) &= \sum_{\substack{d \geq 1 \\ (d,N)=1}} \sum_{\substack{m \equiv 0 \ (N) \\ (n,N)=1 \\ (m,n)=d}} \frac{\chi(n)\, y^s}{|mz+n|^{2s}} = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ (d,N)=1}} \sum_{\substack{(\mu,\nu)=1 \\ d\mu \equiv 0 \ (N) \\ (d\nu,N)=1}} \frac{\chi(d)}{d^{2s}} \cdot \frac{\chi(\nu)\, y^s}{|\mu z+\nu|^{2s}} \\
&= L(\chi, 2s) \sum_{\substack{(\mu,\nu)=1 \\ \mu \equiv 0 \ (N) \\ (\nu,N)=1}} \frac{\chi(\nu)\, y^s}{|\mu z+\nu|^{2s}} = L(\chi,2s) \sum_{\gamma \in \langle T \rangle \backslash \Gamma_0(N)} \chi(\gamma)\, \Im(\gamma z)^s,
\end{aligned}$$

où nous avons posé $\chi(\gamma) = \chi(d)$ pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Posons $z = x+iy$ pour $z \in \mathcal{H}$ et

$$\Omega^\psi \wedge \overline{\partial} E^*_{\widehat{\chi'}} = F(z) \cdot \frac{dx\, dy}{y^2}, \tag{2.83}$$

avec $F : \mathcal{H} \to \mathbf{T}^\psi$ de classe C^∞. La forme différentielle $dx\, dy/y^2$ étant invariante par $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, nous avons

$$F(\gamma z) = \chi(\gamma)\, F(z) \qquad (\gamma \in \Gamma_0(N)). \tag{2.84}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
r_N\big(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\big) &= \frac{L(\chi,2)}{\pi^2} \left(\int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma \in \langle T \rangle \backslash \Gamma_0(N)} \chi(\gamma)\, \Im(\gamma z)^s \cdot F(z) \cdot \frac{dx\, dy}{y^2} \right)_{s=1} \\
&= \frac{L(\chi,2)}{\pi^2} \left(\int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma \in \langle T \rangle \backslash \Gamma_0(N)} \Im(\gamma z)^s \cdot F(\gamma z) \cdot \frac{dx\, dy}{y^2} \right)_{s=1}
\end{aligned}$$

Le morphisme $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H} \to \Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}$ est fini, de degré $\phi(N)/2$ (d'après l'hypothèse sur χ, nous avons $N \geq 3$). Il suit

$$\begin{aligned}
r_N\big(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\big) &= \frac{\phi(N)\, L(\chi,2)}{2\pi^2} \left(\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma \in \langle T \rangle \backslash \Gamma_0(N)} \Im(\gamma z)^s \cdot F(\gamma z) \cdot \frac{dx\, dy}{y^2} \right)_{s=1} \\
&= \frac{\phi(N)\, L(\chi,2)}{2\pi^2} \left(\int_{\langle T \rangle\backslash\mathcal{H}} \Im(z)^s \cdot F(z) \cdot \frac{dx\, dy}{y^2} \right)_{s=1}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant le point-clé de la méthode de Rankin-Selberg. La fonction F admet un développement de Fourier

$$F(x+iy) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \widehat{F}_m(y)\, e^{2\pi i m x} \tag{2.85}$$

et un calcul simple utilisant (2.79) et (2.35) donne

$$\widehat{F}_0(y) = -\frac{16\pi^3 i}{M} y^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-4\pi n y}, \tag{2.86}$$

$$\text{avec } a_n = \Big(T_n \otimes \sum_{k\,|\,n} k\chi'(k)\Big)^{\psi} \in \mathbf{T}^{\psi}. \tag{2.87}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} r_N\big(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\big) &= \frac{\phi(N)\, L(\chi,2)}{2\pi^2} \left(\int_0^\infty y^s \cdot \widehat{F}_0(y) \cdot \frac{dy}{y^2}\right)_{s=1} \\ &= -\frac{8\pi i\, \phi(N)\, L(\chi,2)}{M} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\infty y^s e^{-4\pi n y}\, dy\right)_{s=1}. \end{aligned}$$

Puisque $\int_0^\infty y^s e^{-4\pi n y}\, dy = \frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi n)^{s+1}}$, nous obtenons au final

$$r_N\big(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}\big) = \frac{\phi(N)\, L(\chi,2)}{2\pi i \cdot M} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right)_{s=2}, \tag{2.88}$$

les coefficients a_n étant donnés par (2.87).

Lemme 19 (Une convolution de séries de Dirichlet)**.** *Soient ψ un caractère de Dirichlet modulo N et χ_1, χ_2 des caractères de Dirichlet de niveaux arbitraires. Posons*

$$\sigma_{\chi_1,\chi_2}(n) = \sum_{d\,|\,n} d\, \chi_1(d)\, \chi_2\big(\frac{n}{d}\big) \qquad (n \geq 1). \tag{2.89}$$

Nous avons alors pour $s \in \mathbf{C}$, $\Re(s) > \frac{5}{2}$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n \otimes \frac{\sigma_{\chi_1,\chi_2}(n)}{n^s}\right)^{\psi} = \frac{L(\mathbf{T}^{\psi}, \chi_2, s) \cdot L(\mathbf{T}^{\psi}, \chi_1, s-1)}{L(\psi\chi_1\chi_2, 2s-2)}, \tag{2.90}$$

où $(\cdot)^{\psi}$ représente la composante de caractère ψ, et

$$L(\psi\chi_1\chi_2, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)\chi_1(n)\chi_2(n)}{n^s} \qquad \big(\Re(s) > 1\big). \tag{2.91}$$

Démonstration. Nous avons les estimations $T_n = O(n^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ et $\sigma_{\chi_1,\chi_2}(n) = O(n^{1+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$, d'où il suit que la série du membre de gauche de (2.90) converge absolument pour $\Re(s) > \frac{5}{2}$. La fonction arithmétique σ_{χ_1,χ_2} est convolution de deux fonctions multiplicatives. Elle est donc faiblement multiplicative *i. e.* vérifie

$$\sigma_{\chi_1,\chi_2}(mn) = \sigma_{\chi_1,\chi_2}(m) \cdot \sigma_{\chi_1,\chi_2}(n) \qquad (m, n \geq 1 \text{ premiers entre eux}).$$

Il en va de même de la fonction $n \mapsto T_n \otimes \frac{1}{n^s}$. Il suit que le membre de gauche admet l'expression en produit eulérien

$$\prod_{p \text{ premier}} \left(\sum_{a=0}^{\infty} T_{p^a} \otimes \frac{\sigma_{\chi_1,\chi_2}(p^a)}{p^{as}} \right)^{\psi}. \tag{2.92}$$

D'autre part, nous avons formellement

$$L_p(\mathbf{T}^{\psi}, X) := \Big(\sum_{a=0}^{\infty} T_{p^a} \cdot X^a \Big)^{\psi} = \frac{1}{1 - T_p \cdot X + p\psi(p) \cdot X^2}, \tag{2.93}$$

où 1 désigne l'élément unité de $\mathbf{T} \otimes \mathbf{C}$. Nous pouvons calculer $\sigma_{\chi_1,\chi_2}(p^a)$ grâce à la multiplicativité de χ_1 et χ_2. Nous trouvons

$$\sigma_{\chi_1,\chi_2}(p^a) = \begin{cases} \frac{\chi_2(p)^{a+1} - (p\chi_1(p))^{a+1}}{\chi_2(p) - p\chi_1(p)} & \text{si } \chi_1(p) \neq 0 \text{ ou } \chi_2(p) \neq 0\,; \\ 1 & \text{si } \chi_1(p) = \chi_2(p) = 0 \text{ et } a = 0\,; \\ 0 & \text{si } \chi_1(p) = \chi_2(p) = 0 \text{ et } a \geq 1. \end{cases}$$

Il en résulte que, pour p premier tel que $\chi_1(p) \neq 0$ et $\chi_2(p) \neq 0$, le facteur local en p du produit eulérien (2.92) est donné par

$$\frac{\chi_2(p)}{\chi_2(p) - p\chi_1(p)} \cdot \frac{1}{1 - T_p \cdot \chi_2(p)p^{-s} + \psi(p)\chi_2(p)^2 p^{1-2s}} \\ - \frac{p\chi_1(p)}{\chi_2(p) - p\chi_1(p)} \cdot \frac{1}{1 - T_p \cdot \chi_1(p)p^{1-s} + \psi(p)\chi_1(p)^2 p^{3-2s}},$$

soit après simplifications

$$(1 - \psi(p)\chi_1(p)\chi_2(p) \cdot p^{2-2s}) \cdot L_p(\mathbf{T}^{\psi}, \chi_2(p)p^{-s}) \cdot L_p(\mathbf{T}^{\psi}, \chi_1(p)p^{1-s}), \tag{2.94}$$

et ce dernier résultat est encore valable lorsque $\chi_1(p) = \chi_2(p) = 0$. Pour tout caractère de Dirichlet α (de niveau arbitraire), nous avons

$$\prod_{p \text{ premier}} L_p(\mathbf{T}^\psi, \alpha(p)p^{-s}) = L(\mathbf{T}^\psi, \alpha, s) \qquad (\Re(s) > \frac{3}{2}). \tag{2.95}$$

En prenant le produit sur tous les nombres premiers à partir de l'expression (2.94), nous obtenons le résultat souhaité. □

Nous pouvons maintenant terminer le calcul de $r_N(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\})$, en reprenant (2.88). Utilisons le lemme 19 avec $\chi_1 = \chi'$ et χ_2 égal au caractère modulo 1. Il vient, grâce au prolongement analytique de (2.90) en $s = 2$

$$\begin{aligned} r_N(\{u_\chi, \alpha^* u_{\widehat{\chi'}}\}) &= \frac{\phi(N)\, L(\chi, 2)}{2\pi i \cdot M} \frac{L(\mathbf{T}^\psi, 2) \cdot L(\mathbf{T}^\psi, \chi', 1)}{L(\psi\chi', 2)} \\ &= \frac{\phi(N)}{2\pi i \cdot M} L(\mathbf{T}^\psi, 2) \cdot L(\mathbf{T}^\psi, \chi', 1), \end{aligned}$$

puisque $L(\psi\chi', s) = L(\psi\chi'_N, s) = L(\chi, s)$. □

2.4 Corps de rationalité des unités modulaires

Les courbes modulaires $Y_1(N)(\mathbf{C})$ et $X_1(N)(\mathbf{C})$ admettent des modèles canoniques sur $\mathbf{Q}$ [12, II. 8.], notés $Y_1(N)$ et $X_1(N)$. La courbe $X_1(N)$ est projective, lisse et géométriquement irréductible ; la courbe $Y_1(N)$ peut être vue comme un ouvert affine de $X_1(N)$. Notons $\mathbf{Q}(X_1(N))$ le corps des fonctions rationnelles de $X_1(N)$. Par extension des scalaires, nous avons une inclusion naturelle $\mathbf{Q}(X_1(N)) \subset \mathbf{C}(X_1(N))$.

Lemme 20. *La composition*

$$K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \to K_2(\mathbf{C}(X_1(N))) \xrightarrow{r_N} \mathbf{T} \otimes \mathbf{C} \tag{2.96}$$

est à valeurs dans $\mathbf{T} \otimes \mathbf{R}$.

Démonstration. Soient $f, g \in \mathbf{Q}(X_1(N))^*$ des fonctions rationnelles. L'image du symbole $\{f, g\} \in K_2(\mathbf{Q}(X_1(N)))$ par la composition (2.96) est donnée par

$$r_N(\{f, g\}) = \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \log|f| \cdot \Omega \wedge \overline{\partial} \log|g| \in \mathbf{T} \otimes \mathbf{C},$$

où Ω est la forme modulaire universelle (2.79). Notons $c : X_1(N)(\mathbf{C}) \to X_1(N)(\mathbf{C})$ la conjugaison complexe, induite par l'involution $z \mapsto -\overline{z}$ sur $\mathcal{H}$. Notons $\bar{\cdot}$ la conjugaison complexe sur les coefficients de $\mathbf{T} \otimes \mathbf{C}$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\overline{r_N(\{f,g\})} &= \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \log|f| \cdot \overline{\Omega} \wedge \partial \log|g| \\
&= \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \log|c^* f| \cdot c^*\overline{\Omega} \wedge \overline{\partial} \log|c^* g| \\
&= \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \log|f| \cdot c^*\overline{\Omega} \wedge \overline{\partial} \log|g|,
\end{aligned}
$$

puisque $c^* f = \overline{f}$ et $c^* g = \overline{g}$. D'autre part, l'expression (2.79) de Ω entraîne

$$c^*\overline{\Omega} = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \overline{e^{-2\pi i n \overline{z}} d(-\overline{z})} = \Omega.$$

Par conséquent $\overline{r_N(\{f,g\})} = r_N(\{f,g\})$, c'est-à-dire $r_N(\{f,g\}) \in \mathbf{T} \otimes \mathbf{R}$. $\square$

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})$ agit sur les ensembles $Y_1(N)(\mathbf{C})$ et $X_1(N)(\mathbf{C})$, et donc sur l'ensemble des pointes P_N. D'après [18, 3.0.2], nous pouvons décrire explicitement cette action. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})$, définissons $\epsilon(\sigma) \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*$ par l'égalité $\sigma(\zeta_N) = \zeta_N^{\epsilon(\sigma)}$, avec $\zeta_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Alors $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})$ agit sur P_N par la règle

$$[u,v]^\sigma = [\epsilon(\sigma)^{-1} u, v] \qquad \big((u,v) \in E_N,\, \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})\big), \tag{2.97}$$

où nous avons utilisé l'identification (2.40). En particulier, la conjugaison complexe c envoie $[u,v]$ sur $[-u,v]$. Le groupe $\mathcal{O}^*(Y_1(N))$ des unités de $Y_1(N)$ est de façon naturelle un sous-groupe de $\mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C}))$, le groupe des unités modulaires pour $\Gamma_1(N)$. Nous montrons maintenant que les unités modulaires u_f introduites dans la proposition 14 sont définies sur $\mathbf{Q}$, dans le sens suivant.

Lemme 21. *Soit $f : \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}$ une fonction de somme nulle. Notons K le sous-corps de $\mathbf{C}$ engendré par les valeurs de $\widehat{f}$. Nous avons alors*

$$u_f \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes K \subset \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{C}. \tag{2.98}$$

Démonstration. Notons $\mathrm{Div}^0_{\mathbf{Q}} P_N$ le sous-groupe de $\mathrm{Div}^0 P_N$ formé des diviseurs qui sont définis sur $\mathbf{Q}$. Nous avons un diagramme commutatif

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}^* \otimes K & \longrightarrow & \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes K & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0_{\mathbf{Q}} P_N \otimes K & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \otimes K & \longrightarrow & \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes K & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0 P_N \otimes K & \longrightarrow & 0,
\end{array}
$$

où les flèches verticales sont injectives et les lignes sont exactes (l'exactitude à droite de la ligne du haut résulte du théorème Hilbert 90). L'application $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \mapsto \widehat{u}(\infty) \in \mathbf{C}^*$ scinde la suite exacte du bas du diagramme. Lorsque $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N))$, nous avons $\widehat{u}(\infty) \in \mathbf{Q}^*$, puisque le développement de Fourier (2.45) de u est à coefficients rationnels. L'application $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \mapsto \widehat{u}(\infty) \in \mathbf{Q}^*$ scinde la suite exacte du haut du diagramme, de manière compatible à la scission de celle du bas.

D'après (2.48), nous avons $\mathrm{ord}_P(u_f) \in K$ pour toute pointe $P \in P_N$. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})$. Le changement de variables $a = \epsilon(\sigma)a'$ dans la formule (2.48) montre que

$$\mathrm{ord}_{P^\sigma}(u_f) = \mathrm{ord}_P(u_f) \qquad (P \in P_N,\ \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})).$$

En conséquence $D = \operatorname{div} u_f \in \mathrm{Div}^0_{\mathbf{Q}} P_N \otimes K$, et u_f n'est autre que l'image de D par l'une des deux compositions du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Div}^0_{\mathbf{Q}} P_N \otimes K \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes K \arrow[d] \\
\mathrm{Div}^0 P_N \otimes K \arrow[r] & \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes K.
\end{tikzcd}$$

Par suite, nous avons $u_f \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes K$. $\square$

Nous nous intéressons au groupe de K-théorie de Quillen $K_2(X_1(N))$ associé à la courbe $X_1(N)$. Il est possible de donner une description de ce groupe (au moins après tensorisation par $\mathbf{Q}$) en termes de symboles de Milnor. La localisation en K-théorie algébrique permet d'écrire une suite exacte

$$0 \to K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\eta^*} K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{P \in X_1(N)(\overline{\mathbf{Q}})} \overline{\mathbf{Q}}^* \otimes \mathbf{Q}, \quad (2.99)$$

où l'application η^* est la restriction au point générique de $X_1(N)$, et l'application ∂ est définie comme suit. Nous avons $\partial = (\partial_P \otimes \mathbf{Q})_{P \in X_1(N)(\overline{\mathbf{Q}})}$ et, pour tout $P \in X_1(N)(\overline{\mathbf{Q}})$, l'application ∂_P, appelée *symbole modéré en* P, est définie par

$$\begin{aligned}
\partial_P : K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) &\to \overline{\mathbf{Q}}^* \\
\{f, g\} &\mapsto (-1)^{\mathrm{ord}_P(f)\,\mathrm{ord}_P(g)} \Big(\frac{f^{\mathrm{ord}_P(g)}}{g^{\mathrm{ord}_P(f)}}\Big)(P).
\end{aligned} \qquad (2.100)$$

En composant l'application η^* de (2.99) et l'application (2.96), nous obtenons une application régulateur

$$r_N : K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{T} \otimes \mathbf{R} \tag{2.101}$$

L'application (2.74) induit une application bilinéaire alternée

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{O}^*(Y_1(N))^{\otimes 2} \to K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \otimes \mathbf{Q}. \tag{2.102}$$

Nous cherchons à former des éléments de $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q}$ à partir des symboles $\{u,v\}$, $u,v \in \mathcal{O}^*(Y_1(N))$. Une construction de Bloch, valable d'ailleurs dans un cadre plus général, permet de le faire. L'idée consiste à retrancher au symbole $\{u,v\}$ des éléments de la forme $\{\lambda, f\}$, avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $f \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{Q}$, de manière à tomber dans le noyau de l'application ∂ de (2.99). Pour cela, il faut exploiter le fait (démontré par Manin et Drinfel'd) que les pointes de $X_1(N)$ engendrent un sous-groupe fini de la jacobienne de $X_1(N)$. Puisque les symboles $\{\lambda, f\}$ ont un régulateur nul, nous obtenons ainsi un élément de $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q}$ ayant la vertu d'avoir la même image que le symbole $\{u,v\}$ par l'application régulateur. Tout ceci est résumé dans le lemme suivant.

Lemme 22 (Bloch)**.** *Notons $\{\mathcal{O}^*(Y_1(N)), \mathcal{O}^*(Y_1(N))\}$ l'image de l'application (2.102). Il existe un morphisme naturel π faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \{\mathcal{O}^*(Y_1(N)), \mathcal{O}^*(Y_1(N))\} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "r_N"'] & K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q} \arrow[d, "r_N"] \\ & \mathbf{T} \otimes \mathbf{R}, \end{tikzcd} \tag{2.103}$$

où les applications r_N sont définies respectivement par (2.96) et (2.101).

Définition 23. *Le sous-groupe $K_N \subset K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q}$ est l'image du morphisme π du lemme 22, c'est-à-dire l'ensemble des éléments que l'on peut former à partir des symboles $\{u,v\}$, $u,v \in \mathcal{O}^*(Y_1(N))$.*

Notons maintenant $X_1(N)_{\mathbf{Z}}$ le modèle (propre et) régulier minimal de $X_1(N)$ sur $\mathbf{Z}$. Lorsque le genre de $X_1(N)(\mathbf{C})$ est supérieur ou égal à 1, il existe et est unique à isomorphisme près [**?**, à préciser]. Lorsque le genre de $X_1(N)$ vaut 0, nous avons $X_1(N) \cong \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ et nous pouvons prendre $X_1(N)_{\mathbf{Z}} := \mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}$ (ce cas nous intéresse peu car l'espace d'arivée du régulateur est alors réduit à $\{0\}$). Dans tous les cas, nous pouvons définir un sous-groupe $K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}}$ de $K_2(X_1(N))$ par

$$K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} := \mathrm{Im}\big(K_2(X_1(N)_{\mathbf{Z}}) \to K_2(X_1(N))\big). \tag{2.104}$$

L'inclusion $K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \subset K_2(X_1(N))$ identifie $K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$ à un sous-espace vectoriel de $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q}$.

Théorème 24 (Schappacher, Scholl)**.** *Nous avons* $K_N \subset K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$.

Le régulateur de Beilinson

$$\rho_N : K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{T} \otimes \mathbf{R} \tag{2.105}$$

est défini en composant l'inclusion $K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q} \subset K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q}$ et (2.101). Beilinson a démontré que la valeur spéciale $L(H^1(X_1(N)), 2)$ peut s'exprimer en termes des régulateurs associés aux symboles $\{u, v\}$, où u et v sont des unités modulaires de niveau non précisé. Nous nous posons maintenant la question suivante : est-il possible de choisir u et v parmi les unités modulaires de niveau N ? Plus précisément, pour quelles valeurs de N l'image $\rho_N(K_N)$ du groupe K_N par l'application régulateur engendre-t-elle $\mathbf{T} \otimes \mathbf{R}$ comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel ?

2.5 Application à la conjecture de Zagier pour les courbes elliptiques

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$. Le dilogarithme elliptique D_E de (1.31) est bien défini au signe près. Par linéarité, la fonction D_E s'étend aux diviseurs sur $E(\mathbf{C})$. Soit $L(E,s)$ la fonction L associée à E. Goncharov et Levine ont démontré qu'il existe un diviseur l sur $E(\overline{\mathbf{Q}})$, invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, et un nombre $\alpha \in \mathbf{Q}^*$ tels que

$$L(E,2) = \alpha\pi D_E(l). \tag{2.106}$$

Nous nous posons maintenant la question suivante : comment expliciter l ? Des calculs numériques de Bloch et Grayson et le travail de Goncharov et Levin ont donné une idée très précise des diviseurs l qui conviennent. On obtient de cette façon une quantité de relations numériques de type (2.106). Comment démontrer ces relations ?

Nous démontrons dans cette section les relations conjecturées par Bloch et Grayson dans [7] pour les courbes elliptiques $X_1(N)$, avec $N = 11, 14, 15$. Il est intéressant de noter que notre calcul permet de déterminer le facteur rationnel α apparaissant dans (2.106).

En utilisant des résultats de Deninger [10] et Bertin [5, 4], nous en déduisons le lien entre la valeur spéciale $L(E,2)$ et la mesure de Mahler d'un polynôme en deux variables dépendant étroitement de l'équation de la courbe elliptique E.

Notons enfin qu'il serait intéressant d'étudier le cas où $X_1(N)$ est de genre 2, ce qui arrive pour $N = 13, 16, 18$. Dans chacun de ces cas, la jacobienne $J_1(N)$ de $X_1(N)$ est une variété abélienne de dimension 2, simple sur $\mathbf{Q}$ mais pas absolument simple.

Commençons par le cas $N = 11$ (les autres cas sont traités de manière analogue). Posons $E_{11} = X_1(11)$. O. Lecacheux m'a communiqué l'équation de E_{11} :

$$E_{11} : y^2 + y = x^3 - x^2 \tag{2.107}$$

et les coordonnées des pointes $[0, v]$, $1 \leq v \leq 5$ dans cette équation

$$[0,1]=\infty \quad [0,2]=(1,0) \quad [0,3]=(0,-1) \quad [0,4]=(0,0) \quad [0,5]=(1,-1). \tag{2.108}$$

Notons $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ le diviseur $\sum_{i=1}^5 a_i[0,i]$. Les diviseurs des fonctions $x, x-1, y, y+1$ sont donnés par

$$(x) = -2\ 0\ 1\ 1\ 0 \tag{2.109}$$
$$(x-1) = -2\ 1\ 0\ 0\ 1 \tag{2.110}$$
$$(y) = -3\ 1\ 0\ 2\ 0 \tag{2.111}$$
$$(y+1) = -3\ 0\ 2\ 0\ 1. \tag{2.112}$$

D'autre part, la fonction $f = x^2 + (x+1)y$ vérifie

$$(f) = -5\ 0\ 0\ 5\ 0. \tag{2.113}$$

Proposition 25. *Le symbole de Milnor $\{x,y\}$ définit un élément de $K_2(E_{11}) \otimes \mathbf{Q}$.*

Démonstration. Nous avons a priori $\{x,y\} \in K_2(\mathbf{Q}(E_{11}))$. Considérons la suite exacte (2.99). On vérifie que pour chacune des pointes $[0,v]$, $1 \leq v \leq 5$, on a $\partial_{[0,v]}\{x,y\} = 1$. Par conséquent $\{x,y\} \otimes 1$ définit un élément de $K_2(E_{11}) \otimes \mathbf{Q}$. □

Remarque 26. *Cette proposition est un cas particulier d'un phénomène plus général. On peut montrer que si $u_1, u_2 \in \mathcal{O}^*(Y_1(N))$ sont deux unités modulaires à supports dans les pointes $[0,v]$, $v \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*/\pm 1$, alors $\{u_1,u_2\}$ définit un élément de $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q}$ au moyen de la suite exacte (2.99). D'autre part, le théorème 24 de Schappacher et Scholl montre qu'en fait $\{u_1,u_2\} \in K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$.*

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo 11, pair et non trivial. Alors χ est primitif et déterminé par $\zeta := \chi(2) \in \mu_5$, $\zeta \neq 1$. Utilisons le corollaire 17 avec le caractère χ, $\chi' = \overline{\chi}$ et $\psi = 1$. En utilisant les notations de la section en question, nous avons $\mathbf{T} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{T}^{\psi}$ et

$$\widetilde{r}_{11}(\chi,\overline{\chi}) = \frac{10/11}{2\pi i \tau(\chi)} L(\mathbf{T},2) L(\mathbf{T},\chi,1).$$

En utilisant l'identification (2.68), nous pouvons appliquer l'égalité précédente à l'unique forme primitive f de poids 2 pour $\Gamma_1(11)$. Nous trouvons

$$\langle \widetilde{r}_{11}(\chi, \overline{\chi}), f \rangle = \frac{10/11}{2\pi i \tau(\chi)} L(f,2) L(f,\chi,1).$$

D'après la définition 8, nous avons

$$\langle \widetilde{r}_{11}(\chi, \overline{\chi}), f \rangle = \int_{E_{11}(\mathbf{C})} \log|u_\chi| \cdot \omega_f \wedge \overline{\partial} \log|u_{\overline{\chi}}|,$$

avec $\omega_f = 2\pi i f(z) dz$. D'après la proposition 15, le diviseur de u_χ est donné par

$$\operatorname{div} u_\chi = -\frac{L(\chi,2)}{\pi^2} \sum_{v \in (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*/\pm 1} \overline{\chi}(v) \cdot [0,v],$$

et $\operatorname{div} u_{\overline{\chi}}$ est la formule analogue en remplaçant χ par $\overline{\chi}$. D'après (1.26), qui reste valable par linéarité pour $f, g \in \mathbf{C}(X)^* \otimes \mathbf{C}$, nous avons donc

$$\langle \widetilde{r}_{11}(\chi, \overline{\chi}), f \rangle = \frac{L(\chi,2) L(\overline{\chi},2)}{\pi^4} \sum_{v,w \in (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*/\pm 1} \overline{\chi}(v) \chi(w) R_{\omega_f}([0,v],[0,w]).$$

L'espace $E_{11}(\mathbf{R})$ est connexe. Choisissons l'orientation de $E_{11}(\mathbf{R})$ de telle sorte que

$$\Omega_f^+ := \int_{E_{11}(\mathbf{R})} \omega_f > 0, \tag{2.114}$$

Le dilogarithme elliptique $D_{E_{11}}$ est alors défini sans ambiguité, et on voit facilement que $\omega_f = \Omega_f^+ \cdot \eta^* dz$ en utilisant les notations de la remarque 11. Puisque $[0,v] \in E_{11}(\mathbf{R})$ et d'après (1.36), nous en déduisons

$$R_{\omega_f}([0,v],[0,w]) = -\frac{i\Omega_f^+}{2} \cdot D_{E_{11}}([0,v]-[0,w]) = -\frac{i\Omega_f^+}{2} \cdot D_{E_{11}}([0,\frac{v}{w}]).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{r}_{11}(\chi, \overline{\chi}), f \rangle &= -\frac{i\Omega_f^+}{2} \cdot \frac{L(\chi,2) L(\overline{\chi},2)}{\pi^4} \sum_{v,w \in (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*/\pm 1} \overline{\chi}(v) \chi(w) D_{E_{11}}([0,\frac{v}{w}]) \\
&= -\frac{i\Omega_f^+}{2} \cdot \frac{L(\chi,2) L(\overline{\chi},2)}{\pi^4} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*/\pm 1} \Big(\sum_{w \in (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*/\pm 1} \overline{\chi}(aw) \chi(w) \Big) D_{E_{11}}([0,a]) \\
&= -\frac{5i\Omega_f^+}{2} \cdot \frac{L(\chi,2) L(\overline{\chi},2)}{\pi^4} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*/\pm 1} \overline{\chi}(a) D_{E_{11}}([0,a]).
\end{aligned}$$

D'un autre côté, des calculs utilisant les symboles modulaires pour $\Gamma_0(11)$ montrent que

$$L(f,\chi,1) = \frac{\Omega_f^+}{5\tau(\overline{\chi})}\alpha \qquad \text{avec } \alpha = 2\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - 2\zeta \in \mathbf{Q}(\zeta).$$

Noter que le signe dans cette dernière égalité (Ω_f^+ ou $-\Omega_f^+$) est déterminé numériquement, à l'aide du logiciel Pari par exemple. Enfin, les nombres $L(\chi,2)$ et $L(\overline{\chi},2)$ se calculent explicitement, et on trouve

$$\frac{L(\chi,2)L(\overline{\chi},2)}{\pi^4} = \beta = \frac{-89\zeta^4 - 233\zeta^3 - 233\zeta^2 - 89\zeta + 919}{3^2 \cdot 11^4} \in \mathbf{Q}(\zeta).$$

En mettant tous les résultats précédents ensemble, il vient

$$\begin{aligned} L(E_{11},2) = L(f,2) &= \frac{2\pi i\tau(\chi)}{10/11}\frac{5\tau(\overline{\chi})}{\alpha\Omega_f^+}\langle\widetilde{r}_{11}(\chi,\overline{\chi}),f\rangle \\ &= \frac{11\pi i\tau(\chi)\tau(\overline{\chi})}{\alpha\Omega_f^+}\cdot -\frac{5i\Omega_f^+}{2}\cdot\beta\sum_{a=1}^{5}\overline{\chi}(a)D_{E_{11}}([0,a]) \\ &= \frac{5\cdot 11^2\cdot\pi}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\sum_{a=1}^{5}\overline{\chi}(a)D_{E_{11}}([0,a]) \end{aligned}$$

puisque $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \tau(\chi)\overline{\tau(\chi)} = |\tau(\chi)|^2 = 11$ (χ est pair).

N	Équation de $X_1(N)$	Ordre de $X_1(N)(\mathbf{Q})$	Générateur
11	$y^2 + y = x^3 - x^2$	5	$(0,0)$
14	$y^2 + xy + y = x^3 - x$	6	$(1,0)$
15	$y^2 + xy + y = x^3 + x^2$	4	$(0,0)$

Proposition 27. *Soit $N = 11$. La donnée de χ (pair et non-trivial) équivaut à la donnée de*

$$\chi(2) \in \mu_5 - \{1\}.$$

Posons $\zeta := \chi(2)$ et $P = (1,0)$ (point d'ordre 5). Dans tous les cas χ est primitif et on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u_\chi &= (0) + \zeta(P) + \zeta^2(2P) + \zeta^3(3P) + \zeta^4(4P), \\ L(f,\chi,1) &= \pm \frac{2\zeta - \zeta^2 + \zeta^3 - 2\zeta^4}{5\tau(\overline{\chi})} \Omega_f^+. \end{aligned}$$

Proposition 28. *Soit $N = 14$. La donnée de χ (pair et non-trivial) équivaut à la donnée de*

$$\chi(3) \in \mu_3 - \{1\}.$$

Posons $P = (1,0)$ (point d'ordre 6). Lorsque $\chi(3) = e^{\frac{2\pi i}{3}} = j$, le caractère χ est de conducteur 7 et on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u_\chi &= (0) + j(2P) + j^2(4P), \\ \operatorname{div} v_{\overline{\chi}} &= \frac{20 - 12j}{49} \big((0) + j^2(2P) + j(4P)\big) + \frac{12 + 4j}{49} \big([7,1] + j[7,2] + j^2[7,3]\big), \\ L(f,\chi,1) &= \pm \frac{j\tau(\chi)}{14} \Omega_f^+. \end{aligned}$$

Proposition 29. *Soit $N = 15$. La donnée de χ (pair et non-trivial) équivaut à la donnée de*

$$\chi(2) \in \mu_4 - \{1\}.$$

Posons $P = (0,0)$ (point d'ordre 4). Lorsque $\chi(2) = i$, le caractère χ est primitif et on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u_\chi &= (0) + i(P) - (2P) - i(3P), \\ L(f,\chi,1) &= \pm \frac{i\tau(\chi)}{15} \Omega_f^+. \end{aligned}$$

2.6 Application à une conjecture de Deninger

En combinant les résultats de Deninger [10] et les calculs explicites ci-dessus, nous sommes en mesure de montrer l'égalité suivante, conjecturée par Deninger :

$$m(P) = \frac{15}{4\pi^2} L(E, 2),$$

où $m(P)$ désigne la mesure de Mahler logarithmique du polynôme à deux variables

$$P(X, Y) = X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} + 1$$

et E est la courbe elliptique de conducteur 15 définie par

$$E : y^2 + xy + y = x^3 + x^2.$$

Bibliographie

[1] S. J. Arakelov – « An intersection theory for divisors on an arithmetic surface », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **38** (1974), p. 1179–1192, traduction de l'article original russe.

[2] A. A. Beĭlinson – « Higher regulators and values of L-functions », in *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984, p. 181–238.

[3] — , « Higher regulators of modular curves », in *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 1–34.

[4] M. J. Bertin – « Mesure de Mahler d'une famille de polynômes », *J. Reine Angew. Math.* **569** (2004), p. 175–188.

[5] — , « Mesure de Mahler et régulateur elliptique : preuve de deux relations "exotiques" », in *Number theory*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 1–12.

[6] S. J. Bloch – *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*, CRM Monograph Series, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[7] S. J. Bloch & D. R. Grayson – « K_2 and L-functions of elliptic curves : computer calculations », in *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 79–88.

[8] J.-B. Bost – « Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and abelian varieties », in *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, 1992, p. 64–211.

[9] P. Cartier – « An introduction to zeta functions », in *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, 1992, p. 1–63.

[10] C. Deninger – « Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbf{Z}^n$-actions », *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), no. 2, p. 259–281.

[11] C. Deninger & K. Wingberg – « On the Beĭlinson conjectures for elliptic curves with complex multiplication », in *Beĭlinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspect. Math., vol. 4, Academic Press, Boston, MA, 1988, p. 249–272.

[12] F. Diamond & J. Im – « Modular forms and modular curves », in *Seminar on Fermat's Last Theorem (Toronto, ON, 1993–1994)*, CMS Conf. Proc., vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 39–133.

[13] R. Elkik – « Le théorème de Manin-Drinfeld », *Astérisque* (1990), no. 183, p. 59–67, Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques (Paris, 1988).

[14] A. B. Goncharov – « Multiple ζ-values, Galois groups, and geometry of modular varieties », in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 361–392.

[15] S. Lang – *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[16] L. Merel – « Universal Fourier expansions of modular forms », in *On Artin's conjecture for odd 2-dimensional representations*, Lecture Notes in Math., vol. 1585, Springer, Berlin, 1994, p. 59–94.

[17] J. Nekovář – « Beĭlinson's conjectures », in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 537–570.

[18] N. Schappacher & A. J. Scholl – « Beĭlinson's theorem on modular curves », in *Beĭlinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspect. Math., vol. 4, Academic Press, Boston, MA, 1988, p. 273–304.

[19] C. L. Siegel – *Lectures on advanced analytic number theory*, Notes by S. Raghavan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 23, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

[20] D. Zagier – « Introduction to modular forms », in *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, 1992, p. 238–291.