École normale supérieure de Lyon

Habilitation à diriger des recherches

Discipline : Section CNU 25
Mathématiques

RÉGULATEURS EXPLICITES ET FONCTIONS L DE FORMES MODULAIRES

FRANÇOIS BRUNAULT

Rapporteurs :

Christophe DELAUNAY	Professeur, Laboratoire de mathématiques de Besançon
David LOEFFLER	Professeur, Université de Warwick, Royaume-Uni
Wadim ZUDILIN	Professeur, Université Radboud de Nimègue, Pays-Bas

Soutenance publique le 19 septembre 2019, devant le jury composé de :

Laurent BERGER	Professeur, École normale supérieure de Lyon
Frédéric DÉGLISE	Directeur de recherche, Institut de mathématiques de Bourgogne
Christophe DELAUNAY	Professeur, Laboratoire de mathématiques de Besançon
Dimitar JETCHEV	Professeur, École polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse
Wiesława NIZIOŁ	Directrice de recherche, École normale supérieure de Lyon
Wadim ZUDILIN	Professeur, Université Radboud de Nimègue, Pays-Bas

REMERCIEMENTS

Je suis très reconnaissant à Christophe Delaunay, David Loeffler et Wadim Zudilin d'avoir accepté de rapporter ce travail. Je remercie aussi Laurent Berger, Frédéric Déglise, Dimitar Jetchev et Wiesława Nizioł de me faire l'honneur de faire partie de mon jury.

Les mathématiques progressent grâce à la rencontre des langages, des points de vue et des différents domaines de recherche. J'ai beaucoup appris au contact d'un grand nombre de mathématiciens et mathématiciennes, et je tiens à les remercier ici. Merci en particulier à mon directeur de thèse Loïc Merel, à mes coauteurs David Blottière, Masataka Chida et Michalis Neururer, et à mon étudiant en thèse Weijia Wang.

J'ai bénéficié à l'UMPA d'un excellent environnement de travail. Merci à l'équipe de théorie des nombres, à tous les membres du laboratoire, du département, du secrétariat et de l'équipe informatique.

La transmission des connaissances me tient à cœur. Je remercie tous les étudiants que j'ai encadrés en stage ou simplement croisés.

Merci enfin à mes amis, à ma famille et à Charlotte.

TABLE DES MATIÈRES

1

INTRODUCTION

1.1 PRÉSENTATION

Ce mémoire propose un aperçu des travaux effectués après ma thèse de doctorat. Ils concernent principalement la théorie des formes modulaires, et plus particulièrement l'étude des fonctions L et des régulateurs qui leur sont associés. Notre approche tente de concilier les points de vue théorique et effectif sur ces questions. Nous allons aborder successivement les thèmes suivants.

Le chapitre 2 présente des résultats concernant les conjectures de Beilinson pour les fonctions L des courbes modulaires, des variétés de Kuga–Sato et, en collaboration avec Masataka Chida, des produits de Rankin. Nous étendons la méthode récente de Rogers et Zudilin aux formes modulaires de poids quelconque. Dans ce chapitre, nous avons mis l'accent sur l'explicitation des objets mis en jeu et des formules obtenues.

Le chapitre 3 donne plusieurs applications de ces résultats aux mesures de Mahler des polynômes en plusieurs variables. Nous montrons des cas particuliers des conjectures de Boyd, et essayons de construire, dans certaines situations, des polynômes appropriés. Cette partie comporte des aspects expérimentaux et algorithmiques, qui ont nécessité l'utilisation des logiciels Pari/GP, Sage et Magma.

Le chapitre 4 concerne les jacobiennes de courbes modulaires. Nous montrons, en valorisant le point de vue adélique, que leurs algèbres d'endomorphismes sont engendrées par les correspondances de Hecke. Nous en déduisons une version équivariante de la conjecture de Beilinson pour les valeurs non critiques de la fonction L associée à une variété abélienne fortement modulaire. Ce résultat s'applique en particulier à certaines $\mathbf{Q}$-courbes.

Le chapitre 5 réunit deux résultats concernant le développement de Fourier des formes modulaires. D'une part, on étudie la ramification des paramétrisations modulaires des courbes elliptiques, en donnant une condition suffisante pour que la paramétrisation soit non ramifiée aux pointes. D'autre part, en collaboration avec Michael Neururer, nous bornons le corps engendré par les coefficients de Fourier d'une forme modulaire en une pointe arbitraire.

1.2 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Nous introduisons dans cette section les notations qui seront utilisées dans le mémoire.

Rappelons d'abord quelques définitions concernant les formes modulaires. Nous notons $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Le groupe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ agit par homographies sur $\mathcal{H}$. Pour toute fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$, toute matrice $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ et tout entier $k \in \mathbf{Z}$, nous définissons $f|_k\gamma : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ par la formule $(f|_k\gamma)(\tau) = (\det\gamma)^{k/2}(c\tau+d)^{-k}f(\gamma\tau)$. Nous écrirons $f|\gamma$ lorsque nous travaillons en poids k fixé.

Le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1. Les sous-groupes de congruence $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$ et $\Gamma_0(N)$ sont définis par

$$\begin{aligned} \Gamma(N) &= \left\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \gamma \equiv I_2 \bmod N\right\}, \\ \Gamma_1(N) &= \left\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \bmod N\right\}, \\ \Gamma_0(N) &= \left\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \bmod N\right\}. \end{aligned}$$

Nous notons $Y_*(N) = \Gamma_*(N)\backslash\mathcal{H}$ les courbes modulaires associées, qui sont des courbes algébriques. Leurs compactifications, obtenues par l'ajout d'un nombre fini de pointes, sont notées $X_*(N)$. Le groupe $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$, ce qui donne lieu aux opérateurs diamants $\langle\lambda\rangle$ sur $X_1(N)$, pour $\lambda \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times/\pm 1$.

Pour des pointes $\alpha, \beta \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, le symbole modulaire $\{\alpha, \beta\}$ est la géodésique hyperbolique allant de α à β dans $\mathcal{H}$. Par projection, elle définit un chemin sur $X_*(N)$. Ce chemin est fermé si et seulement si $\beta \in \Gamma_*(N)\alpha$.

Une forme modulaire de poids entier $k \geq 1$ pour $\Gamma_*(N)$ est une fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ vérifiant la condition de modularité $f|_k\gamma = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma_*(N)$, et telle que pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, la fonction $f|_k\gamma(\tau)$ est bornée lorsque $\mathrm{Im}(\tau) \to +\infty$. Si de plus $f|_k\gamma(\tau) \to 0$ lorsque $\mathrm{Im}(\tau) \to +\infty$ pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on dit que f est parabolique. L'espace vectoriel des formes modulaires est noté $M_k(\Gamma_*(N))$, et le sous-espace des formes paraboliques est noté $S_k(\Gamma_*(N))$.

Toute forme modulaire $f \in M_k(\Gamma(N))$ est invariante par $\tau \to \tau + N$, donc admet un développement de Fourier $f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n(f) q^n$, où la somme porte sur $n \in \frac{1}{N}\mathbf{Z}$, $n \geq 0$, avec la notation $q^n = e^{2i\pi n\tau}$. La fonction L de f est définie par $L(f,s) = \sum_{n>0} a_n(f)/n^s$. Cette série converge pour $s \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(s) \gg 0$. La fonction $L(f,s)$ s'exprime également comme la transformée de Mellin de f sur le demi-axe imaginaire de $\mathcal{H}$, ce qui permet de montrer que $L(f,s)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe, et vérifie une équation fonctionnelle. La fonction L complétée est définie par $\Lambda(f,s) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$. Elle est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0,k\}$, avec au plus des pôles simples en $s = 0$ et $s = k$. Le résidu en $s = 0$ est égal à $-a_0(f)$, et on définit la valeur régularisée $\Lambda^*(f,0) = \lim_{s\to 0}(\Lambda(f,s) + a_0(f)/s)$. L'équation fonctionnelle relie les valeurs $\Lambda(f,s)$ et $\Lambda(f|_k\sigma, k-s)$, avec $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Une unité modulaire pour $\Gamma_*(N)$ est une fonction rationnelle sur $X_*(N)$ dont le diviseur est concentré aux pointes. Les unités modulaires forment un groupe noté $\mathcal{O}(Y_*(N))^\times$ et se décrivent explicitement. Par exemple, on dispose, pour tout $(a,b) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, $(a,b) \neq (0,0)$, de l'unité modulaire de Siegel $g_{a,b}$ définie par

$$g_{a,b}(\tau) = q^{B_2(\tilde{a}/N)/2} \prod_{n\geq 0} \left(1 - q^{n+\tilde{a}/N}\zeta_N^b\right) \prod_{n\geq 1} \left(1 - q^{n-\tilde{a}/N}\zeta_N^{-b}\right), \tag{1}$$

où $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$ est le polynôme de Bernoulli, $\tilde{a}$ est le représentant de a dans $\{0, \ldots, N-1\}$, et $\zeta_N = e^{2i\pi/N}$. On sait que $g_{a,b}^{12N}$ est invariante par le groupe $\Gamma(N)$, de sorte que $g_{a,b}$ appartient au groupe des unités modulaires tensorisé par $\mathbf{Q}$, noté $\mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbf{Q}$. Les unités de Siegel sont définies sur $\mathbf{Q}$, à condition de considérer $Y(N)$ comme une courbe définie sur $\mathbf{Q}$ non géométriquement connexe, dont les points complexes sont donnés par $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \times (\Gamma(N)\backslash\mathcal{H})$. Avec ce point de vue, on a $g_{a,b}|\gamma = g_{(a,b)\gamma}$ dans $\mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbf{Q}$ pour tout $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$.

La fonction $\log|g_{a,b}|$ est une série d'Eisenstein analytique réelle pour $\Gamma(N)$, tandis que $\frac{d}{d\tau}\log g_{a,b}(\tau)$ est une série d'Eisenstein holomorphe de poids 2 pour $\Gamma(N)$. On peut expliciter leurs développements de Fourier, en prenant le logarithme du produit infini (1).

Passons aux régulateurs (nous nous contentons ici d'introduire les notations intervenant dans ce mémoire). Pour toute variété algébrique X non singulière définie sur un corps, et pour tous entiers i, j, la cohomologie motivique $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(j))$, notée aussi $H^{i,j}_{\mathcal{M}}(X)$, est définie ici comme le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K^{(j)}_{2j-i}(X)$, où K_{2j-i} est la K-théorie de Quillen, et (j) désigne le j-ième sous-espace propre pour les opérations de Adams. Par exemple $H^1_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(1))$ est isomorphe à $\mathcal{O}(X)^\times \otimes \mathbf{Q}$, le groupe des fonctions inversibles sur X tensorisé par $\mathbf{Q}$.

Lorsque X est définie sur $\mathbf{C}$, Beilinson a défini une application régulateur

$$\mathrm{reg} : H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(j)) \longrightarrow H^i_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{R}(j)),$$

où $H_{\mathcal{D}}$ est la cohomologie de Deligne–Beilinson, définie au moyen de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ (avec singularités logarithmiques à l'infini lorsque la variété n'est pas compacte). Par exemple, lorsque $i = j = 1$, le régulateur d'une fonction inversible f sur X est donné par la fonction analytique réelle $\log |f|$. Si X est une courbe, $i = 2$ et $j \geq 2$, l'espace d'arrivée du régulateur $H^2_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{R}(j))$ est isomorphe à $H^1(X(\mathbf{C}), \mathbf{R}(j-1))$, le groupe de cohomologie de de Rham à coefficients dans $\mathbf{R}(j-1) = (2i\pi)^{j-1}\mathbf{R}$.

La cohomologie motivique et la cohomologie de Deligne–Beilinson sont fonctorielles et munies d'un cup-produit ; l'application régulateur est compatible à toutes ces opérations. Plus précisément, pour tout morphisme de variétés $f : X \to Y$, on dispose d'une application image réciproque $f^* : H^i_{\mathcal{M}}(Y, \mathbf{Q}(j)) \to H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(j))$. Si de plus X et Y sont non singulières et f est propre, il existe aussi une image directe $f_* : H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(j)) \to H^{i-2d}_{\mathcal{M}}(Y, \mathbf{Q}(j-d))$, où d est la dimension relative de f. On peut également définir un cup-produit en cohomologie motivique $\cup : H^{i,j}_{\mathcal{M}} \otimes H^{i',j'}_{\mathcal{M}} \to H^{i+i',j+j'}_{\mathcal{M}}$. Toutes ces opérations ont des analogues en cohomologie de Deligne–Beilinson, qui peuvent être décrits explicitement au moyen de formes différentielles ou de courants. À titre d'exemple, si f et g sont deux fonctions inversibles sur X, alors le régulateur du cup-produit $\{f, g\} := f \cup g$ est donné par la forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ réelle

$$\eta(f, g) = \log |f| \, \mathrm{darg}(g) - \log |g| \, \mathrm{darg}(f),$$

où l'on a posé $\mathrm{darg}(f) = \mathrm{Im}(\mathrm{dlog}\, f) = \mathrm{Im}(df/f)$.

Supposons maintenant que X est une variété projective lisse définie sur $\mathbf{Q}$. Pour tout entier $0 \leq i \leq 2 \dim X$, la cohomologie étale en degré i de X permet de définir une fonction L notée $L(H^i(X), s)$. Conjecturalement, cette fonction L admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ et satisfait une équation fonctionnelle reliant les valeurs en s et $i+1-s$. Par exemple, si X est le point $\mathrm{Spec}\, \mathbf{Q}$, la fonction L de $H^0(X)$ n'est autre que la fonction zêta de Riemann ; si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, la fonction L de $H^1(E)$ est la fonction L de Hasse–Weil de E.

Plaçons-nous maintenant dans la région de convergence du produit eulérien définissant $L(H^i(X), s)$, c'est-à-dire en un entier $n > i/2 + 1$. La conjecture de Beilinson pour la valeur spéciale $L(H^i(X), n)$ fait alors intervenir le régulateur de Beilinson sur $H^{i+1}_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}(X, \mathbf{Q}(n))$, où $H_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}$ est le sous-espace "entier" de Scholl, défini par certaines conditions aux nombres premiers de mauvaise réduction pour X. Plus précisément, Beilinson prédit l'identité

$$L(H^i(X), n) \sim_{\mathbf{Q}^\times} \det\big(\mathrm{reg}\, H^{i+1}_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}(X, \mathbf{Q}(n))\big)$$

où le déterminant est calculé par rapport à une certaine structure $\mathbf{Q}$-rationnelle de la cohomologie de Deligne–Beilinson. La notation $A \sim_{\mathbf{Q}^\times} B$ signifie $A/B \in \mathbf{Q}^\times$. La conjecture de Beilinson prédit en particulier que pour les degrés considérés, la cohomologie motivique est de dimension finie. Comme cet énoncé semble hors d'atteinte en général, on remplace souvent la conjecture par une version dite faible, où l'on demande seulement l'existence d'un sous-espace de $H^{i+1}_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}(X, \mathbf{Q}(n))$ ayant les propriétés requises.

Pour un entier $N \geq 3$, nous noterons $\mathcal{E}(N)$ la courbe elliptique universelle sur $Y(N)$, et $\mathcal{E}(N)^k$ la variété de Kuga–Sato, obtenue par produit fibré au-dessus de $Y(N)$; c'est donc une variété algébrique de dimension $k+1$. Dans le chapitre 2 interviendront les symboles d'Eisenstein, qui sont des analogues des unités de Siegel pour $\mathcal{E}(N)^k$. Les formes modulaires de poids $k \geq 2$ "apparaissent" dans la cohomologie de $\mathcal{E}(N)^{k-2}$. Plus précisément, si f est une forme parabolique primitive de poids $k \geq 2$ pour $\Gamma_1(N)$, alors $L(f,s)$ est un facteur de la fonction L de $H^{k-1}(\overline{\mathcal{E}(N)^{k-2}})$, où $\overline{\mathcal{E}(N)^{k-2}}$ est la compactification lisse canonique de $\mathcal{E}(N)^{k-2}$ construite par Deligne.

Enfin, la mesure de Mahler (logarithmique) d'un polynôme $P(x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients complexes est définie par l'intégrale

$$m(P) = \int_{\mathbf{T}^n} \log |P(x_1, \ldots, x_n)| \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n} \tag{2}$$

où $\mathbf{T}^n = (S^1)^n$ est le tore de dimension n dans $\mathbf{C}^n$, avec S^1 le cercle unité dans $\mathbf{C}$.

1.3 RÉCAPITULATIF DES TRAVAUX DE THÈSE

Je résume ici les principaux résultats de ma thèse de doctorat [16].

Nous avons étudié de manière théorique la fonction dilogarithme R_X associée à une surface de Riemann compacte X. Dans le cas particulier d'une courbe elliptique, la fonction R_X n'est autre que le dilogarithme elliptique de Bloch (voir la définition (17) au chapitre 4). Il est naturel d'essayer de généraliser ce dilogarithme elliptique à la jacobienne J de X. Nous avons construit une fonction naturelle $R_J : J \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^1(X), \mathbf{C})$ qui prolonge R_X au sens où pour tous points $x, y \in X$, la valeur $R_J(x-y)$ est essentiellement donnée par $R_X(x,y)$. La construction de R_J fait intervenir la puissance symétrique $\mathrm{Sym}^g X$, où g est le genre de X. La fonction R_J ne vérifie a priori pas toutes les propriétés agréables du dilogarithme elliptique, comme par exemple le calcul au moyen d'une série rapidement convergente. Cependant, la fonction R_J est liée au régulateur de Beilinson de J. Plus précisément, nous avons construit, de manière analogue à Bloch, des éléments dans $H^2_{\mathcal{M}}(J, \mathbf{Q}(2))$ à partir de points de X qui sont de torsion dans J ; le régulateur de ces éléments est précisément donné par R_J.

Nous avons également démontré une version explicite du théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_1(N)$. Pour ce faire, nous avons construit des éléments explicites dans $H^2_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}(X_1(N), \mathbf{Q}(2))$ par cup-produits d'unités modulaires pour $\Gamma_1(N)$. Notons D_N l'orbite de la pointe $0 \in X_1(N)(\mathbf{Q})$ pour l'action des opérateurs diamants de $X_1(N)$.

Proposition 1 ([18]). *Soient $u, v \in \mathcal{O}(Y_1(N))^\times$ des unités modulaires dont les diviseurs sont concentrés en D_N, et normalisées par la condition $\hat{u}(0) = \hat{v}(0) = 1$, où $\hat{\cdot}(0)$ désigne le coefficient dominant du développement de Fourier en la pointe 0. Alors $\{u, v\} \in H^2_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}(X_1(N), \mathbf{Q}(2))$.*

Nous avons calculé le régulateur de Beilinson de tels symboles de Milnor. Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N, pair et non trivial, notons u_χ l'unité modulaire définie dans [18, Sect. 5]. Elle est à support dans D_N, et la proposition précédente nous assure que $\{u_\chi, u_{\chi'}\} \in H^2_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}(X_1(N), \mathbf{Q}(2)) \otimes \mathbf{C}$.

Théorème 2 ([18]). *Pour toute forme parabolique primitive $f \in S_2(\Gamma_1(N), \psi)$, et pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N, pair, primitif et distinct de 1 et $\overline{\psi}$, on a*

$$L(f,2)L(f,\chi,1) = \frac{N\pi\tau(\chi)}{2\phi(N)} \langle \mathrm{reg}\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}, f\rangle$$

où $\tau(\chi)$ est la somme de Gauss de χ, et $\phi(N)$ l'indicatrice d'Euler.

Comme application du théorème 2, nous avons obtenu des formules explicites pour la mesure de Mahler de certains polynômes en deux variables définissant des courbes elliptiques. Considérons par exemple la courbe elliptique de plus petit conducteur, à savoir $E = X_1(11) =$ 11a3 suivant la notation des tables de Cremona [38].

Théorème 3 ([17]). *Soient $P(x,y) = (x+y+1)(x+1)(y+1) + xy$ et $Q(x,y) = y^2 + (x^2+2x-1)y + x^3$. Les courbes définies par P et Q sont des modèles affines de E, et on a*

$$m(P) = 7L'(E,0) \qquad m(Q) = 5L'(E,0).$$

2

RÉGULATEURS MODULAIRES

Les résultats de ce chapitre concernent les applications régulateurs associées aux formes modulaires classiques. Ils se situent dans le cadre des conjectures très générales de Beilinson sur les valeurs spéciales des fonctions L associées aux variétés algébriques définies sur un corps de nombres. Pour démontrer ces conjectures (ou tout au moins une version affaiblie) dans un cas particulier donné, on procède en plusieurs étapes. Dans un premier temps, on construit des éléments dans la cohomologie motivique (ou K-théorie de Quillen) de la variété. Ensuite, on calcule l'image de ces éléments par l'application régulateur définie par Beilinson, qui est à valeurs dans la cohomologie de Deligne–Beilinson. De manière générale, le régulateur s'exprime comme l'intégrale d'une certaine forme différentielle sur la variété, le long d'un certain cycle topologique. Il s'agit alors de relier l'intégrale obtenue à la fonction L de la variété. Cela n'est envisageable qu'à la condition de disposer d'une formule intégrale pour la fonction L, ce qui est le cas lorsque l'on sait démontrer un théorème de modularité pour la variété considérée. Ainsi, il est naturel de commencer par explorer ces conjectures dans le cas des formes modulaires (ou plus généralement, des formes automorphes).

Dans le cadre modulaire, les conjectures de Beilinson sont déjà connues dans certains cas. Nous nous sommes intéressés à expliciter les éléments motiviques ainsi que les formules pour leurs régulateurs. Cette approche est utile en vue des applications, par exemple pour le calcul de mesures de Mahler de polynômes (voir le chapitre 3).

Nous montrons que les éléments de Beilinson–Kato dans le K_2 des courbes modulaires vérifient des relations de dépendance linéaire analogues aux relations de Manin pour les symboles modulaires (cf. théorème 4). À l'aide de la méthode de Rogers–Zudilin, nous donnons ensuite une formule explicite pour le régulateur des éléments de Beilinson–Kato, et plus généralement ceux de Deninger–Scholl, en termes de fonctions L (cf. théorèmes 5 et 6). Le théorème 7, obtenu en collaboration avec Masataka Chida, montre une version faible de la conjecture de Beilinson pour certaines valeurs non critiques de la fonction L du produit de Rankin de deux formes modulaires, en utilisant les éléments de Beilinson–Flach. Enfin, le théorème 8 propose un analogue p-adique du résultat sur le régulateur complexe de certains éléments de Beilinson–Kato.

Travaux présentés :

Beilinson–Kato elements in K_2 of modular curves. Article publié dans Acta Arith. 134 (2008), no. 3, p. 283–298.

Régulateurs modulaires explicites via la méthode de Rogers-Zudilin. Article publié dans Compos. Math. 153 (2017), no. 6, p. 1119–1152.

Regulators for Rankin-Selberg products of modular forms, avec M. Chida. Article publié dans Ann. Math. Qué. 40 (2016), no. 2, p. 221–249.

Régulateurs p-adiques explicites pour le K_2 des courbes elliptiques. Article publié dans Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr. (2010), p. 29–57.

La proposition 1 montre que les cup-produits d'unités modulaires pour le groupe $\Gamma_1(N)$ fournissent des éléments explicites dans $H^2_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}(X_1(N), \mathbf{Q}(2))$. Regardons le cas particulier où $N = p \geq 5$ est premier. Puisque $X_0(p)$ est le quotient de $X_1(p)$ par les opérateurs diamants $\langle \lambda \rangle$ avec $\lambda \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times / \pm 1$, le morphisme canonique $X_1(p) \to X_0(p)$ est de degré $(p-1)/2$. Il est non ramifié au-dessus de la pointe $0 \in X_0(p)$, ce qui donne $(p-1)/2$ pointes (toutes rationnelles) sur $X_1(p)$. Par le théorème de Manin–Drinfeld, on dispose donc de $(p-3)/2$ unités modulaires indépendantes sur $X_1(p)$. Puisque le cup-produit est antisymétrique, on en déduit $(p-3)(p-5)/8$ symboles de Milnor dans $H^2_{\mathcal{M}/\mathbf{Z}}(X_1(p), \mathbf{Q}(2))$. Or, la conjecture de Beilinson prédit que la dimension de cet espace est égale au genre de $X_1(p)$, c'est-à-dire $(p-5)(p-7)/24$. Les éléments ainsi construits doivent donc vérifier des relations de dépendance linéaire. Nous avons cherché à les expliciter.

Il est plus naturel de travailler avec la courbe modulaire $Y(N)$ et les unités modulaires de Siegel $g_{a,b}$, définies pour $(a, b) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ (avec la convention $g_{0,0} = 1$). Pour toute matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ dans $M_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, on peut donc considérer le symbole de Milnor

$$\rho(M) := \{g_{a,b}, g_{c,d}\} \in H^2_{\mathcal{M}}(Y(N), \mathbf{Q}(2)) \cong K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q},$$

où $H_{\mathcal{M}}$ désigne la cohomologie motivique, isomorphe dans ce cas à la K-théorie de Quillen après tensorisation par $\mathbf{Q}$. Ce sont les éléments de Beilinson–Kato, utilisés par exemple dans [54] pour la construction d'un système d'Euler pour les formes modulaires. Nous reviendrons plus tard sur le système d'Euler de Kato (voir le théorème 8).

Nous montrons que les éléments de Beilinson–Kato vérifient des relations analogues aux relations de Manin pour les symboles modulaires [60].

Théorème 4 ([19]). *Considérons les matrices* $\varepsilon = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ *dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. *Pour toute matrice M dans $M_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, on a*

$$\rho(\varepsilon M) = \rho(M) \qquad \rho(M) + \rho(\sigma M) = 0.$$

Si de plus N n'est pas divisible par 3, alors

$$\rho(M) + \rho(\tau M) + \rho(\tau^2 M) = 0.$$

Ces relations ont également été démontrées par Goncharov [49], sans hypothèse sur N, par une méthode différente. On peut également rapprocher le théorème 4 des travaux de Borisov et Gunnells [11], qui montrent que les produits de séries d'Eisenstein pour le groupe $\Gamma_1(N)$ vérifient les relations de Manin.

Le théorème 4 suscite plusieurs questions. D'une part, il serait intéressant de déterminer l'action des opérateurs de Hecke sur les éléments de Beilinson–Kato, de manière analogue aux travaux de Borisov et Gunnells sur les produits de séries d'Eisenstein [11, 12]. Fukaya et Kato ont obtenu des résultats en ce sens pour la réalisation étale des éléments de Beilinson–Kato, ce qui leur a permis de démontrer certaines conjectures de Sharifi reliant l'arithmétique des courbes modulaires et celle des corps cyclotomiques [46].

D'autre part, les unités de Siegel sont un cas particulier des symboles d'Eisenstein définis par Beilinson [2]. Pour tout entier $k \geq 0$ et tout $u \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, le symbole d'Eisenstein $\mathrm{Eis}^k(u)$

est un élément de $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}(N)^k, \mathbf{Q}(k+1))$, où $\mathcal{E}(N)$ est la courbe elliptique universelle sur $Y(N)$. Soient $k_1, k_2 \geq 0$ des entiers tels que $k = k_1 + k_2$, et soit $j \geq 0$ un entier quelconque. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}(N)^{k_1+j+k_2} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathcal{E}(N)^{k_1+j} & \mathcal{E}(N)^{k_1+k_2} & \mathcal{E}(N)^{j+k_2} \end{tikzcd}$$

où p_1, p_2 et p sont les projections naturelles. Pour toute matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ dans $M_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, on peut définir l'élément

$$\rho_{k_1,k_2,j}(M) := p_*\big(p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1+j}(a,b) \cup p_2^* \operatorname{Eis}^{j+k_2}(c,d)\big) \in H^{k+2}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}(N)^k, \mathbf{Q}(k+2+j)).$$

Ces généralisations de $\rho(M)$, considérées par Beilinson, Deninger–Scholl et Gealy, sont reliées aux fonctions L de formes modulaires de poids $k+2$ évaluées en $s = k+2+j$. Quelles relations de dépendance linéaire vérifient les éléments $\rho_{k_1,k_2,j}(M)$? Peut-on décrire l'action des opérateurs de de Hecke sur ces éléments ?

Nous allons voir qu'il est possible de calculer explicitement le régulateur de Beilinson de ces éléments dans le cas $j = 0$, c'est-à-dire pour les $\rho_{k_1,k_2,0}(M)$, et donc pour les éléments de Beilinson–Kato $\rho(M)$. Considérons le régulateur de Beilinson

$$\operatorname{reg} : H^2_{\mathcal{M}}(X(N), \mathbf{Q}(2+j)) \longrightarrow H^1_B(X(N)_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(1+j)). \tag{3}$$

Soit $\widetilde{W}_{0,j}$ le sous-espace de $H^2_{\mathcal{M}}(Y(N), \mathbf{Q}(2+j))$ engendré par les traces des $\rho_{0,0,j}(M')$ avec $M' \in M_2(\mathbf{Z}/N'\mathbf{Z})$ et N' multiple quelconque de N. Posons $W_{0,j} = \widetilde{W}_{0,j} \cap H^2_{\mathcal{M}}(X(N), \mathbf{Q}(2+j))$. Beilinson a démontré que

$$\det(\operatorname{reg}(W_{0,j})) \sim_{\mathbf{Q}^\times} L'(H^1(X(N)), -j),$$

ce qui établit la forme faible de sa conjecture pour les fonctions L de formes modulaires de poids 2. Grâce aux éléments $\rho_{k_1,k_2,j}(M')$ ci-dessus, Deninger–Scholl et Gealy [48] ont généralisé ce résultat aux formes modulaires de poids ≥ 2 arbitraire.

Dans le cas $k_1 = k_2 = j = 0$, l'approche suivie par Beilinson dans [1] consiste à utiliser une 1-forme différentielle du type $\eta(M)$ sur $Y(N)(\mathbf{C})$ (c'est essentiellement le produit d'une série d'Eisenstein analytique réelle par une série d'Eisenstein holomorphe), puis à calculer l'intégrale de $\eta(M)$ contre une forme parabolique primitive de poids 2 et niveau N, vue comme 1-forme holomorphe sur $X(N)(\mathbf{C})$. Ce calcul utilise la méthode de Rankin–Selberg.

Nous suivons une démarche différente : nous calculons l'intégrale de $\eta(M)$ le long d'un chemin sur la courbe modulaire, plus précisément un symbole modulaire du type $\{\gamma 0, \gamma\infty\}$ avec $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, autrement dit un symbole de Manin. Nous obtenons une formule complètement explicite pour l'intégrale correspondante (cf. théorème 5). Plus généralement, nous calculons l'intégrale d'une forme différentielle réalisant $\rho_{k_1,k_2,0}(M)$, le long de certains cycles de Shokurov (cf. théorème 6). Le calcul utilise cette fois-ci la méthode récente de Rogers et Zudilin [69]. Il est intéressant de constater que les formules obtenues sont sensiblement plus simples. Nous reviendrons sur les applications de ces formules au chapitre 3.

Par souci de simplicité, nous commençons par présenter le théorème 5, qui est un cas particulier du théorème 6. Le régulateur de Beilinson prend alors la forme très explicite suivante. Soient f et g deux fonctions holomorphes inversibles sur une surface de Riemann X. On introduit la forme différentielle analytique réelle

$$\eta(f,g) = \log|f| \operatorname{darg}(g) - \log|g| \operatorname{darg}(f).$$

C'est une 1-forme différentielle réelle fermée sur X. En particulier, si u et v sont deux unités modulaires pour un sous-groupe Γ d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, alors $\eta(u,v)$ est une forme différentielle sur la surface de Riemann quotient $Y(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H}$. Cette dernière est aussi une courbe algébrique affine, de sorte que $\{u,v\}$ définit un élément de $K_2(Y(\Gamma))$. Le régulateur de Beilinson de $\{u,v\}$ est alors donné par la classe de $\eta(u,v)$. Pour toutes pointes $\alpha, \beta \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, l'intégrale de $\eta(u,v)$ le long du symbole modulaire $\{\alpha,\beta\}$ dans $\mathcal{H}$ converge absolument.

Théorème 5 ([24])**.** *Pour tous (a,b) et (c,d) dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a*

$$\int_0^{i\infty} \eta(g_{a,b}, g_{c,d}) = \pi \Lambda^*(e_{a,d}e_{b,-c} + e_{a,-d}e_{b,c}, 0)$$

où pour tout $x \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, la fonction e_x est une série d'Eisenstein explicite de poids 1 pour $\Gamma(N)$, et $\Lambda^*(\cdot, 0)$ désigne la valeur régularisée en $s = 0$ de la fonction L complétée.

Ce résultat complète un théorème de Zudilin [77], qui considère les unités modulaires $\tilde{g}_a(\tau) = g_{a,0}(N\tau)$ pour le groupe $\Gamma_1(N)$. On obtient ainsi, en accord avec la conjecture de Beilinson, un lien entre le régulateur des éléments de Beilinson–Kato et les fonctions L de formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma(N)$.

Les unités de Siegel engendrent le groupe des unités modulaires pour $\Gamma(N)$ quotienté par les constantes, et tensorisé par $\mathbf{Q}$. D'autre part, les symboles de Manin $\{\gamma 0, \gamma\infty\}$ avec $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ engendrent l'homologie de la courbe modulaire relative aux pointes. Grâce à la formule de transformation des unités de Siegel pour le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, et en tenant compte des résidus de $\eta(g_x, g_y)$ aux pointes (qui sont calculables explicitement), le théorème 5 permet d'exprimer toute intégrale de la forme $\int_\alpha^\beta \eta(u,v)$ où u et v sont des unités modulaires, α et β sont des pointes, en termes de fonctions L. Il serait intéressant d'utiliser le théorème 5 pour démontrer la surjectivité du régulateur de Beilinson pour le groupe $K_2(Y(N))$, en utilisant uniquement des unités de Siegel de niveau N.

Nous énonçons maintenant les résultats en poids quelconque [26]. Nous avons besoin pour cela de notations supplémentaires. Pour $\tau \in \mathcal{H}$, la fibre de $\mathcal{E}(N)$ au-dessus du point $[\tau] \in Y(N)(\mathbf{C})$ est canoniquement isomorphe à la courbe elliptique $E_\tau := \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$. Le groupe d'homologie $H_1(E_\tau, Z)$ est engendré par les chemins $\gamma_{0\to 1}$ et $\gamma_{0\to\tau}$ sur E_τ (voir la figure 1).

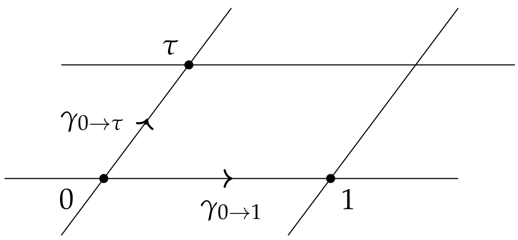

FIGURE 1 – Base de $H_1(E_\tau, \mathbf{Z})$

Fixons des pointes $\alpha, \beta \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. Lorsque τ parcourt le symbole modulaire $\{\alpha, \beta\}$, les chemins $\gamma_{0\to\tau}$ décrivent un 2-cycle sur $\mathcal{E}(N)(\mathbf{C})$ que l'on note $X\{\alpha,\beta\}$. De même, la famille de chemins $\gamma_{0\to 1}$ définit un cycle noté $Y\{\alpha,\beta\}$. En considérant le produit fibré de tels cycles, on en déduit, pour tout choix d'entiers $0 \leq m \leq k$, un cycle $X^m Y^{k-m}\{\alpha,\beta\}$ sur $\mathcal{E}(N)^k(\mathbf{C})$, appelé cycle de Shokurov. Par définition $X^mY^{k-m}\{\alpha,\beta\}$ est un $(k+1)$-cycle topologique fibré sur $\{\alpha,\beta\}$, et ses fibres (de dimension k) sont données par les cycles produits $\gamma_{0\to\tau}^m \times \gamma_{0\to 1}^{k-m}$.

Soit $k = k_1 + k_2$ avec $k_1, k_2 \geq 0$, et soit $M \in M_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. Le régulateur de Beilinson de $\rho_{k_1,k_2,0}(M)$ est représenté par une $(k+1)$-forme différentielle fermée $\eta = \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1,k_2}(M)$ sur $\mathcal{E}(N)^k(\mathbf{C})$. On peut donc chercher à intégrer η sur un cycle de Shokurov. Nous considérerons ici le cycle $\gamma = X^k\{0,\infty\}$. L'intégrale de η le long de γ ne converge pas absolument, mais il est possible, via la théorie de la transformée de Mellin, de définir une intégrale régularisée $\int_\gamma^* \eta$.

Théorème 6 ([26]). *Soient $k_1, k_2 \geq 0$ des entiers, et $k = k_1 + k_2$. Soit $N \geq 3$ un entier, et soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. On suppose $(a_i, b_i) \neq (0,0)$ si $k_i = 0$, et $b_i \neq 0$ si $k_i = 1$. Alors*

$$\int_{X^k\{0,\infty\}}^* \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1,k_2}(M) = \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{2N^{k+2}} (2\pi)^{k+1} i^{k_1-k_2+1} \Lambda^*\big(G_{b_2,a_1}^{(k_2+1)} G_{b_1,-a_2}^{(k_1+1)} - G_{b_2,-a_1}^{(k_2+1)} G_{b_1,a_2}^{(k_1+1)}, 0\big) \tag{4}$$

où pour tout $\ell \geq 1$ et tout $x \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, $G_x^{(\ell)}$ est une série d'Eisenstein explicite de poids ℓ pour $\Gamma(N)$, et $\Lambda^*(\cdot, 0)$ désigne la valeur régularisée en $s = 0$ de la fonction L complétée.

Nous présentons maintenant notre travail en collaboration avec Masataka Chida concernant les fonctions L de Rankin–Selberg associées aux formes modulaires [28]. Dans son article fondateur [1], Beilinson a introduit certains éléments dans la cohomologie motivique du produit de deux courbes modulaires, et il a relié leur image par le régulateur avec la fonction L de Rankin–Selberg de deux formes modulaires de poids 2, confirmant ainsi sa conjecture. Flach [45] a ensuite utilisé ces éléments pour montrer la finitude du groupe de Selmer du carré symétrique d'une courbe elliptique. Dans [28], nous construisons un analogue des éléments de Beilinson–Flach en poids quelconque. Nous calculons leurs régulateurs et en déduisons une version faible de la conjecture de Beilinson pour certaines valeurs non critiques de la fonction L de Rankin–Selberg associée à des formes modulaires de poids ≥ 2 arbitraire.

Théorème 7 ([28]). *Soient $f \in S_{k+2}(\Gamma_1(N_f), \chi_f)$ et $g \in S_{\ell+2}(\Gamma_1(N_g), \chi_g)$ deux formes paraboliques primitives de poids ≥ 2. Soit $N = \mathrm{ppcm}(N_f, N_g)$, et soit $j \in \{0, \ldots, \min(k,\ell)\}$. Dans le cas $j = k = \ell$, supposons $g \neq \bar{f}$ et $N > 1$. Supposons en outre que le facteur automorphe $R_{f,g,N}(j+1)$ défini en [28, Section 5] est non nul, ce qui est vérifié par exemple si $\mathrm{pgcd}(N_f, N_g) = 1$ ou $k + \ell - 2j \notin \{0,1,2\}$. Alors la version faible de la conjecture de Beilinson pour $L(f \otimes g, k+\ell+2-j)$ est vraie.*

Plus précisément, pour tout $x \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, nous construisons un élément de Beilinson–Flach $\mathrm{BF}^{k,\ell,j}(x)$ dans $H_{\mathcal{M}}^{k+\ell+3}(\overline{\mathcal{E}}(N)^k \times \overline{\mathcal{E}}(N)^\ell, \mathbf{Q}(k+\ell+2-j))$, où $\overline{\mathcal{E}}(N)^k$ désigne la compactification lisse canonique de $\mathcal{E}(N)^k$ construite par Deligne. Pour un certain diviseur β_χ dans $\mathbf{Q}(\chi)[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2]$ dépendant uniquement du caractère de Dirichlet $\chi = \chi_f\chi_g$, nous obtenons une formule complètement explicite pour la projection du régulateur de $\mathrm{BF}^{k,\ell,j}(\beta_\chi)$ sur la composante associée à $f \otimes g$, voir [28, Thm 7.7].

Un résultat semblable a été obtenu par Scholl (non publié) et Kings–Loeffler–Zerbes [58]. Notons que l'article [58] utilise la cohomologie de $Y_1(N) \times Y_1(N)$ à coefficients plutôt que la cohomologie de $\mathcal{E}_1(N)^k \times \mathcal{E}_1(N)^\ell$, mais malgré ce langage différent, les classes de cohomologie sont explicitement comparables. Un point nouveau dans [28] est le fait que ces classes de cohomologie s'étendent à la compactification, en accord avec les conjectures de Beilinson qui concernent seulement les variétés algébriques projectives lisses.

Un point non abordé dans [28] est l'intégralité des éléments de Beilinson–Flach. Pour cela, il est nécessaire de développer la théorie du symbole d'Eisenstein sur une base quelconque. Nous espérons revenir prochainement sur cette question.

Il est naturel de chercher des analogues p-adiques des théorèmes 5, 6 et 7. Par interpolation des valeurs critiques des fonctions L complexes, on sait définir des fonctions L p-adiques dans certains cas : mentionnons ici (de manière non exhaustive) les caractères de Dirichlet (Kubota–Leopoldt [59]), les corps totalement réels (Deligne–Ribet [41]), les corps quadratiques imaginaires (Manin–Vishik, Katz, voir [55]), les formes modulaires (Manin, Amice–Vélu, Vishik…, voir [3]), les produits de Rankin de formes modulaires (Hida, Panchishkin, voir [58])… Une autre approche consiste à utiliser la théorie des systèmes d'Euler pour construire des fonctions L p-adiques : par exemple, Kato a démontré que son système d'Euler redonne la fonction L p-adique d'une forme modulaire construite classiquement par interpolation (voir également les articles de Wang [75] et Jacinto [68] pour des constructions en famille).

Du côté des régulateurs, on peut définir un régulateur étale p-adique en utilisant la construction par Soulé de classes de Chern. Il existe aussi un régulateur défini par intégration p-adique [33], et un régulateur syntomique pour les variétés p-adiques semi-stables [9, 65]. Lorsque l'on sait construire la fonction L p-adique, on peut alors formuler une version p-adique de la conjecture de Beilinson, voir [66], [36, Conjecture 2.7].

Dans le cadre des formes modulaires classiques, mentionnons quelques résultats connus dans cette direction. Pour les courbes elliptiques à multiplication complexe, Coleman–de Shalit [33] ont traité le cas de $L_p(E,0)$ (vor également le théorème de Kings sur la conjecture de Bloch–Kato [57]). Pour les produits de Rankin $f \otimes g$ de deux formes modulaires f et g, Bertolini–Darmon–Rotger [8] ont traité le cas où f et g sont de poids 2, et Kings–Loeffler–Zerbes [58] ont généralisé cela au cas où f et g sont de poids ≥ 2 arbitraire.

Présentons maintenant le résultat obtenu dans [20]. Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ de conducteur N, et soit $p \geq 3$ un nombre premier tel que E a réduction semi-stable en p, c'est-à-dire $p^2 \nmid N$. Par interpolation, on définit une fonction L p-adique $L_{p,\alpha}(E,s)$ dépendant d'une valeur propre $\alpha \in \overline{\mathbf{Z}}_p$ du Frobenius géométrique $\varphi_p \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ vérifiant $v_p(\alpha) < 1$.

Le régulateur étale p-adique est une application

$$\mathrm{reg}_{N,p} : H^2_{\mathcal{M}}(Y(N), \mathbf{Q}(2)) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(Y(N), \mathbf{Q}_p(2)) \cong H^1(\mathbf{Q}_p, V_N(2))$$

où l'on a posé $V_N := H^1_{\text{ét}}(Y(N)_{\overline{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_p)$. En projetant sur la composante de Hecke V_f correspondant à la forme primitive f associée à E, on obtient

$$\mathrm{reg}_{f,p} : H^2_{\mathcal{M}}(Y(N), \mathbf{Q}(2)) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2)).$$

Si E n'a pas réduction multiplicative déployée en p, l'exponentielle de Bloch–Kato définit un isomorphisme entre les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $H^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2))$ et $D_{\mathrm{dR}}(V_f(2))$, ce dernier étant de dimension 2. Notons η_α l'unique élément de $D_{\mathrm{cris}}(V_f) \otimes \mathbf{Q}_p(\alpha)$ tel que $\varphi_p(\eta_\alpha) = \alpha\eta_\alpha$ et $[\omega_f, \eta_\alpha] = 1$, avec $\omega_f = 2i\pi f(\tau)d\tau$ et où $[\cdot,\cdot]$ désigne la dualité induite par le cup-produit en cohomologie galoisienne et l'isomorphisme $V_f^*(1) \cong V_f(2)$.

On notera $I \in M_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ la matrice identité, et $\rho_N(I)$ l'élément de Beilinson–Kato associé dans $K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q}$. Enfin, soit $\Omega_E^- \in i\mathbf{R}_{>0}$ la période imaginaire de E définie par une forme différentielle de Néron, et soit $\langle f, f \rangle$ la norme de Petersson de f.

Théorème 8 ([20]). *Si E a bonne réduction en p, alors*

$$[\mathrm{reg}_{f,p}(\rho_N(I)), \eta_\alpha] = \Big(\prod_{\ell | N} 1 - a_\ell(f)\Big) \frac{L(E,1)\Omega_E^-}{i\langle f, f\rangle} (1 - p\alpha^{-1})^{-1}(1 - p^{-1}\alpha^{-1})^{-1} L_{p,\alpha}(E,0) \qquad (5)$$

où le produit porte sur les facteurs premiers ℓ de N. Si E a réduction multiplicative non déployée en p, alors

$$[\mathrm{reg}_{f,p}(\rho_N(I)),\eta_\alpha] = \Big(\prod_{\substack{\ell|N\\ \ell\neq p}} 1-a_\ell(f)\Big)\frac{L(E,1)\Omega_E^-}{i\langle f,f\rangle}(1-\alpha)(1-p^{-1}\alpha^{-1})^{-1}L_{p,\alpha}(E,0). \qquad (6)$$

Signalons que l'hypothèse que E n'a pas de multiplication complexe, présente dans [20], n'est en fait pas nécessaire. Le théorème 8 a été montré indépendamment par Gealy [47, 48] sous une forme plus générale, pour toutes les valeurs non critiques de fonctions L de formes modulaires de poids ≥ 2. Par la suite, Bertolini et Darmon [7] ont donné une démonstration différente du théorème 8 basée sur les familles de Hida. Enfin, Kings, Loeffler et Zerbes [58] ont démontré un théorème analogue pour les produits de Rankin de formes modulaires, autrement dit une version p-adique du théorème 7.

L'ingrédient principal pour démontrer le théorème 8 est le système d'Euler construit par Kato. Supposons pour simplifier $p \nmid N$, et considérons la tour de courbes modulaires $Y(Np^n)$ avec $n \geq 0$. Les éléments de Beilinson–Kato $\rho_{Np^n}(I)$ sont compatibles pour la trace lorsque $n \geq 1$. Il en va donc de même pour leurs images par le régulateur p-adique. En utilisant le morphisme $Y(Np^n) \to Y_1(N) \otimes \mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$ et en projetant sur la représentation galoisienne V_f, on en déduit une famille compatible de classes de cohomologie galoisienne

$$z_{f,p}(I) \in \varprojlim_{n\geq 1} H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_f(2)),$$

autrement dit un élément de la cohomologie d'Iwasawa $\mathbf{H}^1(V_f(2))$. En utilisant des éléments appropriés de l'algèbre d'Iwasawa, Kato construit un élément canonique $z_{f,p}^{\mathrm{Kato}} \in \mathbf{H}^1(V_f(2))$. Plus précisément, en notant π_0 la projection dans $H^1(\mathbf{Q}_p, V_f(2))$, on a la formule

$$\pi_0(z_{f,p}(I)) = \Big(\prod_{\ell|N} 1-a_\ell(f)\Big)\frac{L(E,1)\Omega_E^-}{i\langle f,f\rangle}\cdot \pi_0(z_{f,p}^{\mathrm{Kato}}).$$

Par ailleurs, et c'est là une propriété très importante du système d'Euler, la trace de $\rho_{Np}(I)$ sur $Y(N)$ est reliée de manière simple à $\rho_N(I)$, l'expression faisant intervenir l'opérateur de Hecke en p. On est ainsi ramenés au calcul de $\pi_0(z_{f,p}^{\mathrm{Kato}})$.

C'est là qu'interviennent deux autres outils importants. Notons $\mathcal{H}_\infty$ l'espace des distributions p-adiques tempérées sur $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p) \cong \mathbf{Z}_p^\times$. Perrin-Riou a construit une application

$$\mathcal{L}_{\eta_\alpha} : \mathbf{H}^1(V_f(2)) \to \mathcal{H}_\infty \otimes \mathbf{Q}_p(\alpha)$$

qui interpole les applications exponentielles *duales* de Bloch–Kato

$$\exp^*_{n,2-r} : H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_f(2-r)) \to D_{\mathrm{dR}}(V_f(2-r))$$

pour $n \geq 0$ et $r \geq 1$. Kato a démontré que $\mathcal{L}_{\eta_\alpha}(z_{f,p}^{\mathrm{Kato}})$ est égal à la fonction L p-adique $L_{p,\alpha}(E)$. En particulier, pour $r \geq 1$, il obtient

$$L_{p,\alpha}(E,r) = (r-1)!\cdot(1-p^{-r}\alpha)^{-1}(1-p^{r-1}\alpha^{-1})[\exp^*_{0,2-r}(\pi_0(z_{f,p}^{\mathrm{Kato}}(-r))),\eta_\alpha]$$

où $\bullet(-r)$ désigne le twist de Tate. Cette formule ne donne pas d'information sur le régulateur p-adique qui nous intéresse, car $\pi_0(z_{f,p}^{\mathrm{Kato}})$ correspondrait au cas $r=0$. On remarque d'ailleurs que le facteur $(r-1)!$ a un pôle et que l'application $\exp^*_{0,2-r}$ est nulle lorsque $r \leq 0$. Pour déterminer $\pi_0(z^{\mathrm{Kato}}_{f,p})$, on utilise la loi de réciprocité explicite conjecturée par Perrin-Riou et démontrée par Colmez [35]. Dans le cas particulier $r=0$, cela donne

$$L_{p,\alpha}(E,0) = \mathcal{L}_{\eta_\alpha}(z^{\mathrm{Kato}}_{f,p})(1) = (1-p^{-1}\alpha^{-1})(1-\alpha)^{-1}[\log \pi_0(z^{\mathrm{Kato}}_{f,p}), \eta_\alpha],$$

ce qui achève la preuve du théorème 8.

Le théorème 8 n'est pas optimal car les membres de droite de (5) et (6) peuvent être nuls, lorsque $L(E,1)=0$ ou $a_\ell(f)=1$. Par exemple, dès que E est semi-stable, l'équation fonctionnelle de $L(E,s)$ force l'annulation de (5) (on pourrait d'ailleurs chercher si cette annulation est d'origine motivique). En fait, les mêmes arguments que ci-dessus permettent de calculer le régulateur p-adique de $\rho_N(g)$ pour toute matrice g dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. La formule fait alors intervenir le symbole de Manin $\xi^+_f(g) = \mathrm{Re}(\int_{g0}^{g\infty} \omega_f)$, qui est non nul pour un choix convenable de g. Cependant, cela ne règle pas le cas où $a_\ell(f)=1$. Dans cette situation E a réduction multiplicative déployée en ℓ, et l'annulation du régulateur p-adique est peut-être liée à l'obstruction d'intégralité dans $H^2_{\mathcal{M}}(E,\mathbf{Q}(2))$. Pour remédier à cette annulation indésirable, il faudrait travailler en niveau Np^n et introduire des caractères de Dirichlet χ modulo p^n (avec n suffisamment grand pour que $\ell \neq 1 \bmod p^n$), de manière à faire apparaître des facteurs d'Euler du type $1-a_\ell(f)\chi(\ell)$. Il serait également intéressant de calculer le régulateur p-adique de $\rho(M)$ pour toute matrice M dans $M_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ ou $M_2(\mathbf{Z}/Np^n\mathbf{Z})$, en suivant l'approche de Bertolini et Darmon [7].

3

MESURES DE MAHLER

Les résultats de ce chapitre concernent la mesure de Mahler des polynômes. Cette mesure a été considérée par Lehmer pour les polynômes en une variable, puis a été généralisée par Mahler aux polynômes en plusieurs variables. Cela lui a permis d'obtenir une nouvelle preuve de l'inégalité de Gelfond reliant la hauteur d'un produit de polynômes aux hauteurs des facteurs, un outil essentiel dans la théorie des nombres transcendants. Par la suite, Smyth s'est aperçu que la mesure de Mahler est un nombre réel intéressant en lui-même. Par exemple, il a relié la mesure des polynômes $1+x+y$ ou $1+x+y+z$ à certaines valeurs de fonctions L (pour plus de détails, voir [15]). Deninger a découvert qu'il existe en réalité des liens profonds entre les mesures de Mahler et la K-théorie des variétés algébriques, via la théorie des régulateurs développée par Beilinson. Cette relation avec les conjectures de Beilinson a donné lieu à de nombreux travaux, mais beaucoup de questions et conjectures restent encore largement ouvertes.

À l'aide des résultats du chapitre 2, qui utilisent la méthode de Rogers–Zudilin, nous établissons des cas particuliers des conjectures de Boyd reliant mesures de Mahler et fonctions L de courbes elliptiques (cf. théorèmes 9 et 10). En collaboration avec Michael Neururer, nous montrons certaines identités reliant mesures de Mahler de polynômes en 3 variables et fonctions L de formes modulaires de poids 3, donnant ainsi une nouvelle preuve d'un théorème de Bertin, et plusieurs autres identités (cf. théorème 13). Nous expliquons enfin sous quelles conditions les méthodes présentées ici permettraient d'obtenir d'autres exemples.

Tandis que la démarche habituelle consiste à partir d'un polynôme et à exprimer sa mesure de Mahler en termes de quantités "connues" telles que les fonctions L, la méthode utilisée pour obtenir le théorème 13 procède à l'inverse : on se demande si certaines valeurs de fonctions L peuvent s'exprimer en termes de mesures de Mahler, de manière analogue à la conjecture de Chinburg [14, Section 1B]. Cette question mériterait d'être formulée dans un cadre général.

Travaux présentés :

Regulators of Siegel units and applications. Article publié dans J. Number Theory 163 (2016), p. 542–569.

Parametrizing elliptic curves by modular units. Article publié dans J. Aust. Math. Soc. 100 (2016), no. 1, p. 33–41.

Mahler measures of elliptic modular surfaces, avec M. Neururer. Article publié dans Transactions of the AMS 372 (2019), pp. 119-152.

Grâce aux travaux de Deninger [42], on sait que la mesure de Mahler d'un polynôme $P(x_1,\dots,x_n)$ est étroitement reliée à la cohomologie de la variété algébrique définie par l'équation $P(x_1,\dots,x_n)=0$.

Avant d'énoncer nos résultats, rappelons brièvement ce lien, dans le cas des polynômes en deux variables. Soit $P(x,y) \in \mathbf{C}[x,y]$ un polynôme irréductible. Notons $P^*(x)$ le coefficient dominant de $P(x,y)$ par rapport à y. Soit C_P le lieu des zéros de P dans $(\mathbf{C}^\times)^2$. Notons C_P^{reg} le lieu non singulier de C_P, qui est une surface de Riemann compacte épointée. Le chemin de Deninger γ associé à P est défini par

$$\gamma = \{(x,y) \in C_P : |x| = 1, |y| > 1\}.$$

Supposons que l'adhérence $\overline{\gamma}$ de γ dans C_P est une réunion finie de chemins différentiables contenus dans C_P^{reg}. En utilisant la formule de Jensen par rapport à la variable y, Deninger montre que

$$m(P) - m(P^*) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\overline{\gamma}} \eta(x,y) \tag{7}$$

où $\eta(x,y)$ est la forme différentielle sur C_P^{reg} introduite dans le chapitre 2.

Si la courbe C_P est une courbe modulaire, ou est paramétrée par une telle courbe, alors on peut espérer utiliser le théorème 5 pour calculer $m(P)$. En particulier, si P est un polynôme à coefficients rationnels et définit une courbe elliptique E, alors le théorème de modularité garantit l'existence d'une paramétrisation modulaire $X_1(N) \to E$, si E est de conducteur N.

Dans [14], Boyd a découvert des familles de polynômes $P_k(x,y)$ définissant des courbes elliptiques et dont la mesure de Mahler est reliée à la fonction L de la courbe elliptique. Par exemple, considérons la famille $P_k(x,y) = y^2 + kxy + y - x^3$, et notons E_k la courbe d'équation $P_k(x,y) = 0$, qui est une courbe elliptique si $k^3 \neq 27$. Boyd conjecture [14, Table 5] que pour tout $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0,1,2,3\}$, on a $m(P_k) = r_k \cdot L'(E_k, 0)$ avec $r_k \in \mathbf{Q}^\times$. Nous démontrons ces relations dans les cas particuliers suivants.

Théorème 9 ([24]). *Considérons la famille de polynômes $P_k(x,y) = y^2 + kxy + y - x^3$, et notons E_k la courbe d'équation $P_k(x,y) = 0$. On a les identités*

$$m(P_{-1}) = 2L'(E_{-1}, 0) \tag{8}$$
$$m(P_{-2}) = L'(E_{-2}, 0) \tag{9}$$
$$m(P_{-3}) = L'(E_{-3}, 0). \tag{10}$$

L'identité (8) avait été montrée par Mellit [63] en explicitant le théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_0(14)$. Les courbes elliptiques E_{-1}, E_{-2} et E_{-3} du théorème 9 sont isomorphes respectivement aux courbes $14a4$, $35a3$ et $54a3$ de la table de Cremona [38]. Ces trois courbes elliptiques sont $X_1(N)$-optimales au sens de Stevens [72].

Expliquons plus en détails la preuve du théorème 9. Considérons la courbe elliptique $E = E_k$ avec $k \in \mathbf{Q}$, $k \neq 3$, et notons $\varphi : X_1(N) \to E$ la paramétrisation modulaire de E. L'idée est d'écrire le cycle de Deninger $\gamma = \gamma_{P_k}$ comme l'image directe d'un chemin δ dans $X_1(N)$, et d'effectuer le changement de variables induit par φ dans l'intégrale (7). On obtient alors

$$m(P_k) = -\frac{1}{2\pi} \int_\delta \eta(\varphi^* x, \varphi^* y) \tag{11}$$

Il s'agit alors, si cela est possible, d'exprimer le chemin δ en termes de symboles modulaires, et les fonctions $\varphi^* x$ et $\varphi^* y$ comme produits ou quotients d'unités de Siegel.

Puisque la forme différentielle $\eta(x,y)$ est fermée, l'intégrale $\int_\gamma \eta(x,y)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Supposons que le polynôme $P_k(x,y)$ ne s'annule pas sur $\mathbf{T}^2$, ce qui est vérifié lorsque $k < -1$. Alors γ est un lacet dans E. Comme le polynôme $P_k(x,y)$

est tempéré (les racines des faces du polygone de Newton de $P_k(x,y)$ sont de module 1), les résidus de $\eta(x,y)$ aux zéros et pôles de x et y sont nuls. Cela implique que l'intégrale $\int_\gamma \eta(x,y)$ ne dépend que de la classe de γ dans le groupe d'homologie $H_1(E(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$. Écrivons maintenant $m\gamma = \varphi_*(\delta)$ avec $m \geq 1$ et $\delta \in H_1(X_1(N)(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$. On peut représenter δ par un symbole modulaire $\{\alpha,\beta\}$ avec $\beta \in \Gamma_1(N)\alpha$. Pour trouver explicitement α et β, on peut par exemple chercher une pointe $\alpha \in \mathbf{Q}$ telle que $-\alpha \in \Gamma_1(N)\alpha$ et l'intégrale $\int_\alpha^{-\alpha} \varphi^*\omega_E$ est non nulle, où ω_E est la forme différentielle invariante sur E. En effet, le chemin $\delta = \{\alpha,-\alpha\}$ sur $X_1(N)$ est alors fermé et anti-invariant par la conjugaison complexe. Comme γ engendre le groupe $H_1(E(\mathbf{C}),\mathbf{Z})^-$, l'image de δ dans E doit être un multiple non nul de γ.

La condition sur les fonctions φ^*x et φ^*y est beaucoup plus restrictive. Il se trouve que pour $k \in \{-1,-2,-3\}$, la préimage par φ des zéros et pôles de x et y sont des pointes de $X_1(N)$. Par conséquent φ^*x et φ^*y sont des unités modulaires, et on peut expliciter leurs diviseurs. Comme les diviseurs des unités de Siegel sont également connus, on en déduit une expression de φ^*x et φ^*y comme produit ou quotient d'unités de Siegel. En appliquant le théorème 5, on obtient alors le théorème 9.

Voici une autre famille de courbes elliptiques considérée par Boyd, pour laquelle notre méthode s'applique.

Théorème 10 ([24]). *Considérons la famille de polynômes $P'_k(x,y) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + k$. Notons E'_k la courbe d'équation $P'_k(x,y) = 0$, qui est une courbe elliptique si $k \notin \{0,\pm 4\}$. On a les identités*

$$m(P'_3) = L'(E'_3,0) \tag{12}$$
$$m(P'_{12}) = 2L'(E'_{12},0). \tag{13}$$

Boyd conjecture que pour tout $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0,\pm 4\}$, on a $m(P'_k) = r'_k \cdot L'(E'_k,0)$ avec $r'_k \in \mathbf{Q}^\times$. Pour $k=1$, il s'agit de la conjecture de Deninger $m(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + 1) = L'(E,0)$ où E est une courbe elliptique de conducteur 15. Cette conjecture a été démontrée par Rogers et Zudilin [70]. Les cas $k \in \{2,5,8,16\}$ étaient également connus [77]. Les courbes elliptiques E'_3 et E'_{12} sont isomorphes respectivement aux courbes $21a4$ et $48a5$ de la table de Cremona [38]. La première est $X_1(N)$-optimale, mais pas la deuxième.

Plus généralement, cherchons à quelle condition la méthode présentée ici peut s'appliquer. En utilisant les notations ci-dessus, nous avons vu que les fonctions φ^*x et φ^*y doivent être des unités modulaires. Cela motive la définition suivante.

Définition 11 ([23]). *Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, de conducteur N. On dit que E est* paramétrée par des unités modulaires *s'il existe des unités modulaires u et v sur $X_1(N)$ telles que le corps des fonctions $\mathbf{Q}(E)$ soit isomorphe à $\mathbf{Q}(u,v)$.*

Si E est paramétrée par des unités modulaires u et v, alors le polynôme minimal $P \in \mathbf{Q}[x,y]$ du couple (u,v) donne un modèle affine de E. L'isomorphisme $\mathbf{Q}(E) \cong \mathbf{Q}(u,v)$ induit une paramétrisation $\varphi : X_1(N) \to E$ et par construction, les fonctions φ^*x et φ^*y sont des unités modulaires sur $X_1(N)$. Si de plus P est tempéré et ne s'annule pas sur $\mathbf{T}^2$, alors toutes les conditions seront réunies pour appliquer la méthode précédente et déterminer $m(P)$.

Il est donc naturel de demander quelles courbes elliptiques sont paramétrées par des unités modulaires. Nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 12 ([23]). *À isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de courbes elliptiques définies sur $\mathbf{Q}$ qui sont paramétrées par des unités modulaires.*

La preuve de ce théorème utilise une borne inférieure due à Watkins pour le degré de la paramétrisation modulaire d'une courbe elliptique. Nous donnons dans [23, Table 1] une table de courbes elliptiques paramétrées par des unités modulaires. Il serait intéressant de mettre en œuvre pour ces courbes la méthode présentée ici. Notons que les courbes E_3' et E_{12}' n'apparaissent pas dans cette table, mais elles sont chacune isogène à une courbe elliptique paramétrée par des unités modulaires, ce qui est suffisant pour obtenir le théorème 10.

Il est naturel d'étudier ensuite le cas des polynômes en 3 variables. Dans les articles [4, 5], Bertin a considéré la famille de polynômes $Q_k(x,y,z) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} + k$, qui généralise naturellement la famille $P_k'(x,y)$. La surface S_k d'équation $Q_k(x,y,z) = 0$ définit, après désingularisation, une surface K3, et Bertin démontre les relations

$$m(Q_2) = 4L'(H^2(S_2),0) = 4L'(f,0) \tag{14}$$

où $f \in S_3(\Gamma_1(8))$ est une forme modulaire primitive de poids 3 et niveau 8. En collaboration avec Michael Neururer [30], nous obtenons une démonstration nouvelle de (14) basée sur le fait que la surface S_2 est birationnelle à la courbe elliptique universelle $\mathcal{E}_1(8)$ associée au groupe $\Gamma_1(8)$ [6]. Plus précisément, la méthode de Deninger permet d'écrire $m(Q_2) = \int_D \eta$ où η est une 2-forme différentielle réelle sur la surface S_2, et D est le cycle de Deninger associé à Q_2, qui est un certain 2-cycle topologique sur S_2. Comme dans le cas des polynômes en 2 variables, notre preuve consiste à identifier η et D en termes purement modulaires, via l'isomorphisme birationnel entre S_2 et $\mathcal{E}_1(8)$. D'une part, il est possible (en modifiant légèrement la construction de Deninger) de choisir pour η un cup-produit de symboles d'Eisenstein sur $\mathcal{E}_1(8)$. D'autre part, le cycle de Deninger D est fibré au dessus d'un symbole modulaire sur la courbe $Y_1(8)$. En particulier, D est homologue à un cycle de Shokurov explicite sur $\mathcal{E}_1(8)$. Le calcul de la mesure de Mahler de Q_2 se ramène donc à celui d'intégrales du même type que (4) sur la courbe elliptique universelle $\mathcal{E}_1(8)$. Le théorème 6 permet alors de prouver l'identité (14).

Nous avons cherché d'autres identités similaires de la manière suivante. Considérons un sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ tel que la courbe modulaire $Y(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H}$ est de genre 0, et supposons que le corps des fonctions de $Y(\Gamma)$ est engendré par une unité modulaire Z. Supposons également que Γ agit sans point fixe sur $\mathcal{H}$, de sorte qu'il existe une courbe elliptique universelle $\mathcal{E}(\Gamma)$ au-dessus de $Y(\Gamma)$. Nous cherchons alors des fonctions X et Y sur $\mathcal{E}(\Gamma)$ dont les zéros et les pôles sont des sections de torsion de $\mathcal{E}(\Gamma)$, et telles que le symbole de Milnor $\{X,Y\}$ s'étende en un élément de $H^2_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}(\Gamma),\mathbf{Q}(2))$. Il s'agit de vérifier que les symboles modérés de $\{X,Y\}$ aux sections de torsion sont triviaux, ce qui peut se faire algorithmiquement à l'aide de Magma [13]. Une fois que les fonctions X et Y sont trouvées, on calcule le polynôme minimal Q du triplet de fonctions (X,Y,Z) sur $\mathcal{E}(\Gamma)$.

La mesure de Mahler de Q s'écrit alors comme l'intégrale d'une forme différentielle $\eta = \eta(X,Y,Z)$ sur le cycle de Deninger D associé à Q. Par construction, l'élément $\{X,Y\}$ est combinaison linéaire de symboles d'Eisenstein Eis^1 sur $\mathcal{E}(\Gamma)$, tandis que Z est produit ou quotient d'unités de Siegel, c'est-à-dire de symboles Eis^0 sur $Y(\Gamma)$ (voir le chapitre 2 pour les notations). Par conséquent η représente le régulateur d'un élément de Deninger–Scholl $\rho_{1,0,0} = \mathrm{Eis}^1 \cup \mathrm{Eis}^0$ dans $H^3_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}(\Gamma),\mathbf{Q}(3))$.

Pour que la méthode fonctionne, il reste donc à examiner le cycle de Deninger D. La situation favorable est celle où la projection $(X,Y,Z) \mapsto Z$ fibre le 2-cycle D au-dessus d'un 1-cycle de $Y(\Gamma)$. Une manière d'assurer cette propriété de fibration consiste à choisir D de la forme $\{|X| = 1, |Y| \geq 1, |Z| = 1\}$. Si en outre D est fibré au-dessus d'un symbole modulaire de $Y(\Gamma)$ et si les fibres de D sont des cycles fermés, alors on peut exprimer D en termes de cycles de Shokurov sur $\mathcal{E}(\Gamma)$, et appliquer le théorème 6. Par cette méthode, nous obtenons par exemple les résultats suivants.

Théorème 13 ([30]). *On a les identités*

$$m\Big((x+y+1)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1\Big)+2\Big(z+\frac{1}{z}\Big)-5\Big) = \frac{3}{2}L'(f_{12},0)+\frac{\log 2}{2} \tag{15}$$

$$m\Big(\Big(x+\frac{1}{x}+2\Big)\Big(y+\frac{1}{y}+2\Big)+2\Big(z+\frac{1}{z}\Big)+8\Big(z+\frac{1}{z}\Big)^{-1}-8\Big) = 4L'(f_{16},0) \tag{16}$$

où f_{12} (resp. f_{16}) est l'unique forme parabolique primitive de poids 3 pour $\Gamma_1(12)$ (resp. $\Gamma_1(16)$).

Il est important de noter qu'une fois que le cycle de Deninger D est identifié, la plupart des autres étapes du calcul peuvent être automatisées. Nous avons implémenté cela avec le logiciel Sage [74].

Il serait intéressant de mettre en œuvre cette approche de manière systématique, pour tout groupe de congruence Γ. Pour la courbe elliptique universelle $\mathcal{E}_1(7)$ associée au groupe $\Gamma_1(7)$, l'espace $S_3(\Gamma_1(7))$ est de dimension 1 mais nous n'avons pas trouvé de fonctions X et Y telles que les symboles modérés de $\{X,Y\}$ soient tous triviaux.

4

JACOBIENNES DE COURBES MODULAIRES

Les résultats de ce chapitre concernent les variétés abéliennes modulaires, c'est-à-dire celles qui sont quotient de la jacobienne d'une courbe modulaire. Soit X une courbe modulaire, et J la jacobienne de X. Nous montrons que l'algèbre des endomorphismes de J qui sont définis sur un corps de nombre abélien est engendrée par les correspondances de Hecke adéliques (cf. théorème 18). Cela permet d'obtenir des résultats sur la conjecture de Beilinson pour les quotients de J. Suivant la terminologie de [52], on dit qu'une variété abélienne A définie sur un corps de nombres F est fortement modulaire si la fonction $L(A/F,s)$ est produit de fonctions L de formes modulaires primitives de poids 2. Nous montrons que pour toute variété abélienne A fortement modulaire non CM, la forme faible de la conjecture de Beilinson pour les valeurs non critiques de la fonction L équivariante de A est vraie (cf. théorème 17). D'après les théorèmes de modularité, ce résultat inclut le cas de l'extension des scalaires d'une courbe elliptique $E/\mathbf{Q}$ à un corps de nombres abélien (cf. théorème 14), ou encore certaines $\mathbf{Q}$-courbes.

Travaux présentés :

On Zagier's conjecture for base changes of elliptic curves. Article publié dans Doc. Math. 18 (2013), p. 395–412.

Non-critical equivariant L-values of modular abelian varieties. Article publié dans Int. J. Number Theory 14 (2018), no. 9, p. 2517–2542.

On the modularity of endomorphism algebras. Preprint, `https://arxiv.org/abs/1705.08225`

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$. Choisissons une uniformisation de la forme $E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$ avec $\tau \in \mathcal{H}$, que nous supposons compatible à la conjugaison complexe. Via l'application exponentielle, on en déduit un isomorphisme de groupes $E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^\times/q^{\mathbf{Z}}$, où l'on a posé $q = e^{2i\pi\tau}$. Bloch [10] a défini une application dilogarithme elliptique

$$\begin{aligned} D_E : E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^\times/q^{\mathbf{Z}} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(xq^n), \end{aligned} \tag{17}$$

où $D : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ est la fonction de Bloch–Wigner. Le dilogarithme elliptique est au cœur de la conjecture de Zagier pour E, qui prédit en particulier l'existence d'un diviseur $\ell \in \mathbf{Z}[E(\overline{\mathbf{Q}})]$ invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ tel que $L(E,2) = r \cdot \pi D_E(\ell)$ avec $r \in \mathbf{Q}^\times$, et où $D_E(\ell)$ est défini par linéarité. Sous cette forme, cela a été démontré par Goncharov et Levin [50]. La conjecture complète donne en fait des conditions nécessaires et suffisantes sur un diviseur ℓ pour que $\pi D_E(\ell)$ soit proportionnel à $L(E,2)$, ce qui a également été démontré dans [50] conditionnellement à la conjecture de Beilinson pour $L(E,2)$.

Soit maintenant F une extension finie abélienne de $\mathbf{Q}$. Nous noterons E_F l'extension des scalaires de E au corps F. La fonction L de E_F admet une factorisation $\prod L(E \otimes \chi, s)$, où χ parcourt les caractères de $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$. Chaque facteur $L(E \otimes \chi, s)$ admet un prolongement holomorphe au plan complexe, et l'équation fonctionnelle montre que $L(E \otimes \chi, s)$ admet un zéro simple en $s = 0$. Fixons des plongements $F \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$. Nous démontrons un analogue de la conjecture de Zagier pour chacun des facteurs $L(E \otimes \chi, s)$.

Théorème 14 ([21]). *Il existe un diviseur $\ell \in \mathbf{Z}[E(\overline{\mathbf{Q}})]$ invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ tel que pour tout caractère $\chi : G \to \mathbf{C}^\times$, on ait*

$$L'(E \otimes \chi, 0) \sim_{\mathbf{Q}^\times} \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) D_E(\ell^\sigma) & \textit{si } \chi \textit{ est pair,} \\ \dfrac{1}{\pi \operatorname{Im}(\tau)} \displaystyle\sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) J_E(\ell^\sigma) & \textit{si } \chi \textit{ est impair,} \end{cases}$$

où $J_E : E(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ est la partie imaginaire du régulateur défini par Bloch.

Remarquons que le diviseur $\ell^\chi = \sum_\sigma \chi(\sigma) \ell^\sigma$ est dans la composante χ-isotypique pour l'action de G. En utilisant la formule de Dedekind et Frobenius pour les déterminants de groupes, on en déduit le résultat suivant, qui généralise le théorème de Goncharov et Levin sur $L(E, 2)$.

Corollaire 15 ([21]). *Si F est réel (resp. complexe), notons $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ (resp. $\sigma_1, \overline{\sigma_1}, \ldots, \sigma_{d/2}, \overline{\sigma_{d/2}}$) les éléments de G, avec $d = [F : \mathbf{Q}]$. Soit $\ell \in \mathbf{Z}[E(\overline{\mathbf{Q}})]$ un diviseur invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ vérifiant les identités du théorème 14. Pour tout i, posons $\ell_i = \ell^{\sigma_i^{-1}}$.*

Si F est réel, alors

$$L(E_F, 2) \sim_{\mathbf{Q}^\times} \pi^d \det\big(D_E(\ell_i^{\sigma_j})\big)_{1 \le i,j, \le d}. \tag{18}$$

Si F est complexe, alors

$$L(E_F, 2) \sim_{\mathbf{Q}^\times} \frac{\pi^d}{\operatorname{Im}(\tau)^{d/2}} \det\big(D_E(\ell_i^{\sigma_j})\big)_{1 \le i,j, \le d/2} \det\big(J_E(\ell_i^{\sigma_j})\big)_{1 \le i,j, \le d/2}. \tag{19}$$

Remarquons que par définition des diviseurs ℓ_i, la matrice $\big(D_E(\ell_i^{\sigma_j})\big)_{1 \le i,j, \le d}$ apparaissant dans (18) est de la forme $(X_{\sigma^{-1}\tau})_{\sigma,\tau \in G}$. Il est classique que les valeurs propres de cette matrice sont données par $\sum_\sigma \chi(\sigma) X_\sigma$ où χ parcourt les caractères de G. Ce sont les quantités qui interviennent dans le théorème 14. La factorisation du déterminant de groupe correspond donc exactement à la factorisation de la fonction L de E_F suivant les caractères de G.

La formule de Dedekind et Frobenius est valable pour tout groupe fini non nécessairement abélien. Cela suggère la conjecture "non abélienne" suivante.

Conjecture 16 ([21]). *Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, et soit F un corps de nombres galoisien totalement réel. Notons $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$. Il existe un diviseur $\ell \in \mathbf{Z}[E(\overline{\mathbf{Q}})]$ invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ tel que pour toute représentation d'Artin $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$, on ait*

$$L^{(d)}(E \otimes \rho, 0) \sim_{\mathbf{Q}^\times} \pi^{-d} \det\Big(\sum_{\sigma \in G} \rho(\sigma) D_E(\ell^\sigma)\Big).$$

De plus, pour tout diviseur $\ell \in \mathbf{Z}[E(\overline{\mathbf{Q}})]$ invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ et vérifiant les conditions de Goncharov et Levin [50, (2),(3),(4)], et pour toute représentation d'Artin $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$, on a

$$\det\Big(\sum_{\sigma \in G} \rho(\sigma) D_E(\ell^\sigma)\Big) \in \pi^d L^{(d)}(E \otimes \rho, 0) \cdot \mathbf{Q}(\rho),$$

où $\mathbf{Q}(\rho)$ est le corps engendré par la trace de ρ.

Lorsque ρ est la représentation régulière de G, la conjecture 16 redonne la conjecture de Zagier pour $L(E_F, 2)$ telle qu'énoncée par Wildeshaus [76].

La preuve du théorème 14 repose sur le théorème de Beilinson appliqué à l'extension des scalaires de la courbe modulaire $X_1(N)$ à F, où N est le conducteur de E. On obtient ainsi des informations sur toutes les valeurs spéciales $L'(E \otimes \chi, 0) = L'(f \otimes \chi, 0)$, où f est la forme modulaire associée à E par le théorème de modularité, et $f \otimes \chi$ est la tordue de f par χ. Le point clé est un résultat de divisibilité dans l'algèbre de Hecke de $X_1(N)_F$, qui permet de comparer le projecteur associé à E_F et ceux associés aux $f \otimes \chi$.

Dans le cas d'un corps de nombres F galoisien quelconque, le théorème de changement de base de Langlands assure que si le groupe $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$ est résoluble, alors la fonction L de E_F admet un prolongement méromorphe au plan complexe. Si de plus F est totalement réel, alors la fonction L de E_F devrait être égale à la fonction L d'une forme modulaire de Hilbert sur F.

On peut se demander si le corollaire 15 se généralise à des courbes elliptiques sur des corps de nombres qui ne proviennent pas de courbes elliptiques définies sur $\mathbf{Q}$. Le cas des $\mathbf{Q}$-courbes se présente naturellement. Rappelons qu'une $\mathbf{Q}$-courbe est une courbe elliptique E définie sur un corps de nombres F telle que E est isogène sur $\overline{\mathbf{Q}}$ à toutes ses conjuguées sous Galois. On sait grâce aux travaux de Ribet et à la preuve de la conjecture de Serre par Khare et Wintenberger, que toute $\mathbf{Q}$-courbe E est paramétrée par une courbe modulaire $X_1(N)$, mais la paramétrisation est définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Parfois, la fonction L de E est un produit de fonctions L de formes modulaires de poids 2. C'est le cas par exemple si E n'a pas de multiplication complexe, F est un corps quadratique et l'isogénie $E \to E^\sigma$ est définie sur F. En poussant plus loin les méthodes de [21], nous avons pu démontrer le résultat suivant.

Théorème 17 ([27]). *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres F telle que la fonction $L(A/F, s)$ est un produit de fonctions L de formes paraboliques primitives de poids 2 sans multiplication complexe. Notons $X = \mathrm{End}_F(A) \otimes \mathbf{Q}$ l'algèbre des endomorphismes de A définis sur F, et $L({}_X A/F, s)$ la fonction L équivariante de A à valeurs dans $X \otimes \mathbf{C}$. Alors pour tout entier $n \geq 2$, la forme faible de la conjecture de Beilinson pour $L({}_X A/F, n)$ est vraie.*

D'après les travaux de Guitart et Quer [52, 51], on sait que sous les hypothèses du théorème 17, le corps de nombres F est abélien, et la variété abélienne A est un quotient $J_1(N)_F$, où $J_1(N)$ est la jacobienne de $X_1(N)$. L'idée est alors d'utiliser le théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_1(N)_F$. Cependant, pour en déduire le résultat sur la fonction L équivariante de A, il reste à démontrer que la variété A ainsi que ses endomorphismes proviennent de l'algèbre de Hecke de $J_1(N)_F$ (nous entendons ici l'algèbre de Hecke définie de manière adélique). Nous montrons que si f est une forme parabolique primitive de poids 2 sans multiplication complexe, et A_f est la variété abélienne modulaire associée, alors tout endomorphisme de A_f défini sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}$ provient de l'algèbre de Hecke [27, Thm 4.10]. Cela nous permet d'appliquer la version équivariante du théorème de Beilinson pour l'algèbre de Hecke, et conclut la preuve du théorème 17.

Comme conséquence du théorème 17, nous obtenons la version faible de la conjecture de Zagier sur $L(E, 2)$ pour les $\mathbf{Q}$-courbes E non CM dont la fonction L est produit de formes paraboliques primitives. Cela inclut le cas de l'extension d'une courbe elliptique $E/\mathbf{Q}$ à un corps de nombres abéliens, et généralise un résultat de Goncharov et Levin [50]. Notons que pour que la méthode présentée ici fonctionne, il est nécessaire que la paramétrisation modulaire de la $\mathbf{Q}$-courbe soit définie sur un corps de nombres abélien. Pour traiter le cas général, il faudrait étudier la torsion d'une forme modulaire par des représentations d'Artin.

Le résultat ci-dessus sur les endomorphismes des variétés abéliennes modulaires A_f suggère de s'intéresser à l'algèbre des endomorphismes de toute la variété $J_1(N)$. En particulier, cette algèbre est-elle engendrée par les opérateurs de Hecke ? Ribet [67] a démontré que si N est premier, alors l'algèbre $\mathrm{End}(J_0(N)) \otimes \mathbf{Q}$ est engendrée par les opérateurs de Hecke T_n avec $(n, N) = 1$, répondant ainsi à une question de Shimura. Pour N quelconque, le résultat n'est plus vrai car les opérateurs de Hecke T_n commutent, tandis que $\mathrm{End}\, J_0(N)$ n'est pas commutative en général. En effet, étant donné un diviseur non trivial M de N, les opérateurs de dégénérescence permettent de montrer que $\mathrm{End}(J_0(N)) \otimes \mathbf{Q}$ contient une algèbre de matrices sur $\mathrm{End}(J_0(M)) \otimes \mathbf{Q}$. Kani [53] a démontré que si Γ est un groupe intermédiaire entre $\Gamma_1(N)$ et $\Gamma_0(N)$ (avec N quelconque), et $J(\Gamma)$ est la jacobienne modulaire associée, alors l'algèbre $\mathrm{End}(J(\Gamma)) \otimes \mathbf{Q}$ est engendrée par les opérateurs de Hecke T_n et certains opérateurs de dégénérescence.

Dans la prépublication [25], nous proposons une approche différente pour ces questions. Nous travaillons de manière adélique, c'est-à-dire avec la courbe modulaire X_K associée à un sous-groupe compact ouvert quelconque K de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$, où $\mathbf{A}_f$ est l'anneau des adèles finis de $\mathbf{Q}$. Dans ce cadre, il est naturel de considérer les correspondances de Hecke associées aux doubles classes $K \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)/K$. Chaque double classe KgK induit une correspondance sur X_K, d'où un endomorphisme $T(g)$ de la jacobienne J_K de X_K (nous supposons ici X_K géométriquement connexe). On définit alors l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}_K$ comme le sous-anneau de $\mathrm{End}(J_K)$ engendré par les $T(g)$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$. Cette algèbre contient bien sûr les opérateurs de Hecke classiques T_n, mais est strictement plus grande en général. Si X_K n'est pas géométriquement connexe, et si $F/\mathbf{Q}$ est une extension finie abélienne contenant le corps des constantes de X_K, alors on définit $\mathbf{T}_{K,F}$ comme le sous-anneau de $\mathrm{End}_F(J_K)$ engendré par les correspondances de Hecke $T(g)$ qui sont définies sur F (c'est-à-dire compatibles avec le morphisme structural $X_K \otimes F \to \mathrm{Spec}\, F$). Nous montrons alors le théorème suivant.

Théorème 18 ([25])**.** *Soit K un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$, et soit $F/\mathbf{Q}$ une extension finie abélienne contenant le corps des constantes de X_K. Alors $\mathbf{T}_{K,F} \otimes \mathbf{Q} = \mathrm{End}_F(J_K) \otimes \mathbf{Q}$.*

On peut voir le théorème 18 comme un résultat de modularité, non pas pour la variété abélienne J_K qui est évidemment modulaire, mais pour les endomorphismes de cette variété. Ce théorème illustre le fait que dans la correspondance de Langlands, les représentations galoisiennes mais aussi les morphismes entre les représentations doivent avoir une explication automorphe.

La preuve du théorème 18 est assez naturelle (nous supposons ici $F = \mathbf{Q}$ pour simplifier). Considérons la cohomologie étale de la courbe modulaire en niveau infini :

$$H = \varinjlim_K H^1_{\text{ét}}(X_{K,\overline{\mathbf{Q}}}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell),$$

où la limite inductive est prise sur tous les sous-groupes compacts ouverts K de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$. L'espace vectoriel H est muni de deux actions : d'une part l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ (qui donne lieu aux correspondances de Hecke, donc aux formes modulaires), et d'autre part l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (qui donne lieu aux représentations galoisiennes). Ces deux actions commutent, et on peut en fait les "séparer", dans le sens suivant : il existe une décomposition

$$H = \bigoplus_\pi \Omega(\pi) \otimes V_\pi$$

où π parcourt l'ensemble des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations automorphes de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ associées aux formes paraboliques primitives de poids 2 et niveau arbitraire. Ici $\Omega(\pi)$ est l'espace de la représentation π, et V_π est la représentation galoisienne de dimension 2 associée à π. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ agit sur le premier facteur du produit tensoriel, tandis que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ agit sur le second facteur.

En prenant les invariants par notre sous-groupe K, on obtient une action de $\mathbf{T}_K$ sur chaque composante $\Omega(\pi)^K$. Puisque $\Omega(\pi)^K$ est un module simple sur $\mathbf{T}_K \otimes \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, un théorème de Burnside entraîne que cette action est maximale : on a une surjection

$$\mathbf{T}_K \otimes \overline{\mathbf{Q}}_\ell \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \prod_\pi \mathrm{End}(\Omega(\pi)^K). \tag{20}$$

Par ailleurs, les endomorphismes de J_K s'appréhendent de manière galoisienne : on a une injection

$$\mathrm{End}(J_K) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})}(H^K) = \prod_\pi \mathrm{End}(\Omega(\pi)^K). \tag{21}$$

La conjonction de (20) et (21) permet alors de conclure.

Signalons que Mazur [61] a montré que pour N premier, l'algèbre $\mathrm{End}(J_0(N))$ est engendrée (sur $\mathbf{Z}$) par les opérateurs de Hecke T_p (p premier $\neq N$) et l'involution d'Atkin-Lehner. Il serait intéressant de voir si le théorème 18 est encore vrai à coefficients entiers.

5 DÉVELOPPEMENTS DE FOURIER DES FORMES MODULAIRES

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux propriétés du développement de Fourier d'une forme modulaire en une pointe arbitraire. Par exemple, pour la forme modulaire associée à une courbe elliptique E, la valuation de ce développement donne l'indice de ramification de la paramétrisation modulaire de E en la pointe considérée. Nous montrons que si la forme modulaire est minimale par torsion par les caractères de Dirichlet, alors la paramétrisation modulaire est non ramifiée aux pointes (cf. théorème 19). En collaboration avec Michael Neururer, nous donnons une borne sur le corps des coefficients de tels développements de Fourier (cf. théorème 21), et étudions l'optimalité de ce résultat (cf. théorème 22).

Travaux présentés :

On the ramification of modular parametrizations at the cusps. Article publié dans J. Théor. Nombres Bordeaux 28 (2016), no. 3, p. 773–790.

Fourier expansions at cusps, avec M. Neururer. Article à paraître dans Ramanujan Journal.

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ de conducteur N. D'après le théorème de modularité, la courbe E est paramétrée par une courbe modulaire : plus précisément, il existe un morphisme non constant $\varphi : X_0(N) \to E$ défini sur $\mathbf{Q}$. D'après la formule de Riemann–Hurwitz, le morphisme φ est ramifié dès que le genre de $X_0(N)$ est au moins égal à 2. Les points de ramification de φ sont définis sur un corps de nombres, et il est intéressant de les déterminer explicitement, en vue par exemple de construire des points rationnels sur E. Dans cette direction, Mazur et Swinnerton-Dyer [62] ont découvert un lien entre le rang analytique de E et le nombre de points de ramification de φ sur le demi-axe imaginaire $\{0, i\infty\}$. Ce problème a également été considéré par Delaunay [39, 40] qui a calculé numériquement les points de ramification et leurs images dans E, par exemple pour la courbe elliptique de conducteur 389, qui est de rang 2. Hao Chen [31] a développé également des algorithmes généraux pour calculer les points de ramification.

Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à déterminer les indices de ramification de φ aux pointes de $X_0(N)$. Soit f la forme parabolique primitive de niveau N correspondant à E, de sorte que l'image réciproque par φ d'une forme différentielle invariante sur E est proportionnelle à $\omega_f = 2i\pi f(\tau)d\tau$. En particulier, l'indice de ramification de φ en un point $x \in X_0(N)$ est donné par $e_\varphi(x) = \mathrm{ord}_x(\omega_f) + 1$. Il s'agit donc de déterminer les zéros de ω_f. Nous démontrons le résultat général suivant.

Théorème 19 ([22]). *Supposons que la forme modulaire f associée à E est de niveau minimal parmi toutes les tordues $f \otimes \chi$ par des caractères de Dirichlet χ. Alors ω_f ne s'annule pas aux pointes. En particulier, la paramétrisation modulaire $\varphi : X_0(N) \to E$ est non ramifiée aux pointes.*

Suivant la terminologie de [64, 2.6], une forme modulaire f est dite primitive par torsion si f est de niveau minimal parmi toutes les tordues de f par des caractères de Dirichlet. Il n'est pas vrai en général que si une forme parabolique f est primitive par torsion, alors ω_f ne s'annule pas aux pointes. Par exemple, il existe une forme primitive $f \in S_2(\Gamma_0(625))$ à coefficients dans $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, telle que ω_f s'annule aux pointes $\alpha/25$ avec $\alpha \equiv \pm 1 \bmod 5$.

La stratégie de la preuve du théorème 19 consiste à se ramener à un problème purement local concernant les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Il s'agit de montrer qu'une certaine somme de constantes de Godement–Jaquet associées aux tordues de f est non nulle. En utilisant une formule de Bushnell pour ces constantes locales, on interprète cette somme comme la valeur propre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (qui n'est autre que la donnée cuspidale induisant la représentation automorphe locale de f). Cet endomorphisme est en fait scalaire et des calculs techniques permettent de montrer qu'il est non nul, ce qui achève la preuve du théorème 19.

Dans le cas général où il y a ramification aux pointes, nous avons également cherché à déterminer les indices de ramification. Des calculs numériques avec Pari/GP [73] ont suggéré que dans tous les cas, l'indice de ramification divise 24. Nous avons également observé numériquement un lien entre les valuations 2-adique et 3-adique de l'indice de ramification et celles du conducteur de E. Par la suite, Corbett et Saha [37] ont complètement déterminé les indices de ramification de φ pour toute courbe elliptique E et en toutes les pointes, confirmant les observations ci-dessus. Ces indices dépendent de la nature des représentations automorphes locales en $p = 2$ et $p = 3$ associées à E. Corbett et Saha démontrent en fait un résultat plus général donnant l'ordre d'annulation en chaque pointe d'une forme primitive f de poids et niveau arbitraires, sous une certaine hypothèse concernant le corps des coefficients de Fourier de f. La preuve de ces résultats utilise le langage adélique et les vecteurs de Whittaker des représentations automorphes locales.

La question de la ramification de la paramétrisation modulaire aux pointes s'inscrit dans un problème plus général, également étudié dans [39] : déterminer le développement de Fourier d'une forme modulaire en une pointe arbitraire. Ce qui a des applications, par exemple, pour les calculs explicites sur les formes modulaires [44, 6.3].

Dans l'article [29] en collaboration avec Michael Neururer, nous étudions le corps engendré par les coefficients de Fourier d'une forme modulaire en une pointe arbitraire. Pour ce faire, nous examinons la relation entre deux actions sur l'espace des formes modulaires : d'une part, l'action de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Q})$ induite par l'action par homographies sur $\mathcal{H}$, et d'autre part, l'action du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ des automorphismes de $\mathbf{C}$ sur les coefficients de Fourier d'une forme modulaire. Shimura [71] a établi une certaine compatibilité entre ces deux actions. Son résultat très général vaut pour les formes modulaires de Siegel méromorphes à valeurs vectorielles; nous l'énonçons ici seulement pour les formes modulaires usuelles.

Théorème 20. *Soit $f \in M_k(\Gamma(N))$ une forme modulaire de poids entier $k \geq 1$ pour $\Gamma(N)$. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, et soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$. On note $\lambda \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ l'unique élément tel que $\sigma(e^{2i\pi/N}) = e^{2i\pi\lambda/N}$. Alors $(f|g)^\sigma = f^\sigma|g_\lambda$, où $g_\lambda \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est un relèvement quelconque de la matrice $\begin{pmatrix} a & \lambda b \\ \lambda^{-1}c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$.*

Nous donnons deux nouvelles preuves du théorème 20. L'une utilise un théorème de Khuri-Makdisi [56] qui énonce que toute forme modulaire de poids ≥ 2 pour $\Gamma(N)$, $N \geq 3$, appartient à l'algèbre engendrée par les séries d'Eisenstein de poids 1 pour $\Gamma(N)$. D'après ce résultat, il suffit de démontrer le théorème 20 pour les séries d'Eisenstein, ce qui se fait sans difficulté. D'ailleurs, dans le cas où $f \in M_k(\Gamma_1(N))$, le théorème 20 découle aussi d'un théorème de Borisov et Gunnells sur les produits de séries d'Eisenstein [12]. L'autre preuve utilise la théorie des formes modulaires algébriques de Katz [55].

Nous déduisons du théorème 20 des informations sur les coefficients de Fourier de $f|g$, c'est-à-dire sur le développement de Fourier de f en la pointe $g\infty$. Dans le théorème suivant, nous montrons que les coefficients de $f|g$ sont contenus dans une extension cyclotomique explicite du corps des coefficients K_f de f. Pour tout entier $M \geq 1$, notons $\zeta_M = e^{2i\pi/M}$.

Théorème 21 ([29]). *Soit $f \in M_k(\Gamma_1(N))$ une forme modulaire de poids entier $k \geq 1$ pour $\Gamma_1(N)$. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Alors :*

(1) La forme modulaire $f|g$ est à coefficients dans $K_f(\zeta_{N_1})$ avec $N_1 = N/\operatorname{pgcd}(c, N)$.

(2) Si de plus $f \in M_k(\Gamma_0(N))$, alors la forme modulaire $f|g$ est à coefficients dans $K_f(\zeta_{N_0})$ avec $N_0 = N/\operatorname{pgcd}(cd, N)$.

Nous montrons également une version du théorème 21 pour l'espace $M_k(\Gamma_1(N), \chi)$ des formes modulaires de caractère χ, où $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ est un caractère de Dirichlet, voir [29, Thm 4.4] pour l'énoncé précis. Enfin, nous démontrons que le théorème 21 est optimal pour les formes paraboliques primitives pour $\Gamma_0(N)$, au sens suivant.

Théorème 22 ([29]). *Soit $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ une forme parabolique primitive de poids k et niveau $\Gamma_0(N)$. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Alors le corps engendré par les coefficients de Fourier de $f|g$ est égal à $K_f(\zeta_{N_0})$ avec $N_0 = N/\operatorname{pgcd}(cd, N)$.*

Sous les hypothèses du théorème 22, la théorie des formes modulaires algébriques montre que les dénominateurs de $a_n(f|g)$ divisent une certaine puissance de N indépendante de n. Il serait intéressant de trouver une borne effective pour ces dénominateurs ; cela permettrait, par exemple, de déterminer explicitement $a_n(f|g)$ à partir d'approximations numériques (voir par exemple les algorithmes développés dans [32, 34, 43]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. A. Beilinson. Higher regulators and values of L-functions. In *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 181–238. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.

[2] A. A. Beilinson. Higher regulators of modular curves. In *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, volume 55 of *Contemp. Math.*, pages 1–34. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[3] J. Bellaïche. Critical p-adic L-functions. *Invent. Math.*, 189(1) :1–60, 2012.

[4] M.-J. Bertin. Mahler's measure and L-series of $K3$ hypersurfaces. In *Mirror symmetry. V*, volume 38 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 3–18. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[5] M.-J. Bertin. Mesure de Mahler d'hypersurfaces $K3$. *J. Number Theory*, 128(11) :2890–2913, 2008.

[6] M.-J. Bertin and O. Lecacheux. Elliptic fibrations on the modular surface associated to $\Gamma_1(8)$. In *Arithmetic and geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds*, volume 67 of *Fields Inst. Commun.*, pages 153–199. Springer, New York, 2013.

[7] M. Bertolini and H. Darmon. Kato's Euler system and rational points on elliptic curves I : A p-adic Beilinson formula. *Israel J. Math.*, 199(1) :163–188, 2014.

[8] M. Bertolini, H. Darmon, and V. Rotger. Beilinson-Flach elements and Euler systems I : Syntomic regulators and p-adic Rankin L-series. *J. Algebraic Geom.*, 24(2) :355–378, 2015.

[9] A. Besser. Syntomic regulators and p-adic integration. I. Rigid syntomic regulators. In *Proceedings of the Conference on p-adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations (Jerusalem, 1998)*, volume 120B, pages 291–334, 2000.

[10] S. J. Bloch. *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*, volume 11 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[11] L. A. Borisov and P. E. Gunnells. Toric modular forms and nonvanishing of L-functions. *J. Reine Angew. Math.*, 539 :149–165, 2001.

[12] L. A. Borisov and P. E. Gunnells. Toric modular forms of higher weight. *J. Reine Angew. Math.*, 560 :43–64, 2003.

[13] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust. The Magma algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3-4) :235–265, 1997. Computational algebra and number theory (London, 1993).

[14] D. W. Boyd. Mahler's measure and special values of L-functions. *Experiment. Math.*, 7(1) :37–82, 1998.

[15] D. W. Boyd. Explicit formulas for mahler's measure. *Bulletin CRM*, pages 14–15, Autumn 2005. CRM-Fields Prize lecture, `http://www.crm.umontreal.ca/rapports/bulletin/bulletin11-1.pdf`.

[16] F. Brunault. *Étude de la valeur en $s = 2$ de la fonction L d'une courbe elliptique*. PhD thesis, Université Paris 7, December 2005.

[17] F. Brunault. Version explicite du théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_1(N)$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(8) :505–510, 2006.

[18] F. Brunault. Valeur en 2 de fonctions L de formes modulaires de poids 2 : théorème de Beilinson explicite. *Bull. Soc. Math. France*, 135(2) :215–246, 2007.

[19] F. Brunault. Beilinson-Kato elements in K_2 of modular curves. *Acta Arith.*, 134(3) :283–298, 2008.

[20] F. Brunault. Régulateurs p-adiques explicites pour le K_2 des courbes elliptiques. In *Actes de la Conférence "Fonctions L et Arithmétique"*, volume 2010 of *Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr.*, pages 29–57. Lab. Math. Besançon, Besançon, 2010.

[21] F. Brunault. On Zagier's conjecture for base changes of elliptic curves. *Doc. Math.*, 18 :395–412, 2013.

[22] F. Brunault. On the ramification of modular parametrizations at the cusps. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 28(3) :773–790, 2016.

[23] F. Brunault. Parametrizing elliptic curves by modular units. *J. Aust. Math. Soc.*, 100(1) :33–41, 2016.

[24] F. Brunault. Regulators of Siegel units and applications. *J. Number Theory*, 163 :542–569, 2016.

[25] F. Brunault. On the modularity of endomorphism algebras. Preprint, `https://arxiv.org/abs/1705.08225`, 2017.

[26] F. Brunault. Régulateurs modulaires explicites via la méthode de Rogers-Zudilin. *Compos. Math.*, 153(6) :1119–1152, 2017.

[27] F. Brunault. Non-critical equivariant L-values of modular abelian varieties. *Int. J. Number Theory*, 14(9) :2517–2542, 2018.

[28] F. Brunault and M. Chida. Regulators for Rankin-Selberg products of modular forms. *Ann. Math. Qué.*, 40(2) :221–249, 2016.

[29] F. Brunault and M. Neururer. Fourier expansions at cusps. To appear in *Ramanujan J.* Preprint version : `https://arxiv.org/abs/1807.00391`, 2018.

[30] F. Brunault and M. Neururer. Mahler measures of elliptic modular surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372 :119–152, 2019.

[31] H. Chen. Computing the Mazur and Swinnerton-Dyer critical subgroup of elliptic curves. *Math. Comp.*, 85(301) :2499–2514, 2016.

[32] H. Cohen. Expansions at Cusps and Petersson Products in Pari/GP. In *Elliptic Integrals, Functions, and Modular Forms in Quantum Field Theory*, Elliptic Integrals, Functions, and Modular Forms in Quantum Field Theory, Zeuthen, Germany, Oct. 2017. Springer Wien.

[33] R. Coleman and E. de Shalit. p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions. *Invent. Math.*, 93(2) :239–266, 1988.

[34] D. Collins. Numerical computation of Petersson inner products and q-expansions. Preprint, `https://arxiv.org/abs/1802.09740v1`, 2018.

[35] P. Colmez. Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local. *Ann. of Math. (2)*, 148(2) :485–571, 1998.

[36] P. Colmez. Fonctions L p-adiques. *Astérisque*, 266 :Exp. No. 851, 3, 21–58, 2000. Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99.

[37] A. Corbett and A. Saha. On the order of vanishing of newforms at cusps. *Math. Res. Lett.*, 25(6) :1771–1804, 2018.

[38] J. E. Cremona. *Algorithms for modular elliptic curves*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1997. `http://johncremona.github.io/ecdata/`.

[39] C. Delaunay. *Formes modulaires et invariants de courbes elliptiques définies sur* **Q**. PhD thesis, Université Bordeaux 1, December 2002.

[40] C. Delaunay. Critical and ramification points of the modular parametrization of an elliptic curve. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 17(1) :109–124, 2005.

[41] P. Deligne and K. A. Ribet. Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields. *Invent. Math.*, 59(3) :227–286, 1980.

[42] C. Deninger. Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbf{Z}^n$-actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(2) :259–281, 1997.

[43] M. Dickson and M. Neururer. Products of Eisenstein series and Fourier expansions of modular forms at cusps. *J. Number Theory*, 188 :137–164, 2018.

[44] B. Edixhoven and J.-M. Couveignes, editors. *Computational aspects of modular forms and Galois representations*, volume 176 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.

[45] M. Flach. A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve. *Invent. Math.*, 109(2) :307–327, 1992.

[46] T. Fukaya and K. Kato. On conjectures of Sharifi. Preprint, August 2012.

[47] M. T. Gealy. Special values of p-adic L-functions associated to modular forms. Preprint, 2003.

[48] M. T. Gealy. *On the Tamagawa Number Conjecture for Motives Attached to Modular Forms*. PhD thesis, California Institute of Technology, December 2005. `http://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-12162005-124435`.

[49] A. B. Goncharov. Euler complexes and geometry of modular varieties. *Geom. Funct. Anal.*, 17(6) :1872–1914, 2008.

[50] A. B. Goncharov and A. M. Levin. Zagier's conjecture on $L(E,2)$. *Invent. Math.*, 132(2) :393–432, 1998.

[51] X. Guitart and J. Quer. Remarks on strongly modular Jacobian surfaces. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 23(1) :171–182, 2011.

[52] X. Guitart and J. Quer. Modular Abelian Varieties Over Number Fields. *Canad. J. Math.*, 66(1) :170–196, 2014.

[53] E. Kani. Endomorphisms of Jacobians of modular curves. *Arch. Math. (Basel)*, 91(3) :226–237, 2008.

[54] K. Kato. p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. *Astérisque*, 295 :ix, 117–290, 2004. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III).

[55] N. M. Katz. p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series. *Ann. of Math. (2)*, 104(3) :459–571, 1976.

[56] K. Khuri-Makdisi. Moduli interpretation of Eisenstein series. *Int. J. Number Theory*, 8(3) :715–748, 2012.

[57] G. Kings. The Tamagawa number conjecture for CM elliptic curves. *Invent. Math.*, 143(3) :571–627, 2001.

[58] G. Kings, D. Loeffler, and S. L. Zerbes. Rankin–Eisenstein classes for modular forms. To appear in *Amer. J. Math.*

[59] T. Kubota and H.-W. Leopoldt. Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen. *J. Reine Angew. Math.*, 214/215 :328–339, 1964.

[60] Y. I. Manin. Parabolic points and zeta functions of modular curves. *Math. USSR Izvestija*, 6(1) :19–64, 1972.

[61] B. Mazur. Modular curves and the Eisenstein ideal. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 47 :33–186, 1977.

[62] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer. Arithmetic of Weil curves. *Invent. Math.*, 25 :1–61, 1974.

[63] A. Mellit. Elliptic dilogarithms and parallel lines. *J. Number Theory*, 204 :1–24, 2019.

[64] L. Merel. Symboles de Manin et valeurs de fonctions L. In *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. II*, volume 270 of *Progr. Math.*, pages 283–309. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[65] J. Nekovář and W. Nizioł. Syntomic cohomology and p-adic regulators for varieties over p-adic fields. *Algebra Number Theory*, 10(8) :1695–1790, 2016. With appendices by Laurent Berger and Frédéric Déglise.

[66] B. Perrin-Riou. *p-adic L-functions and p-adic representations*, volume 3 of *SMF/AMS Texts and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI ; Société Mathématique de France, Paris, 2000. Translated from the 1995 French original by Leila Schneps and revised by the author.

[67] K. A. Ribet. Endomorphisms of semi-stable abelian varieties over number fields. *Ann. Math. (2)*, 101 :555–562, 1975.

[68] J. Rodrigues Jacinto. (φ, Γ)-modules de de Rham et fonctions L p-adiques. *Algebra Number Theory*, 12(4) :885–934, 2018.

[69] M. Rogers and W. Zudilin. From L-series of elliptic curves to Mahler measures. *Compos. Math.*, 148(2) :385–414, 2012.

[70] M. Rogers and W. Zudilin. On the Mahler measure of $1 + X + 1/X + Y + 1/Y$. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2014(9) :2305–2326, 2014.

[71] G. Shimura. On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables. *Ann. of Math. (2)*, 102(3) :491–515, 1975.

[72] G. Stevens. Stickelberger elements and modular parametrizations of elliptic curves. *Invent. Math.*, 98(1) :75–106, 1989.

[73] The PARI Group, Univ. Bordeaux. *PARI/GP version* `2.5.0`, 2011. available from `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

[74] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 8.0)*, 2017. `https://www.sagemath.org`.

[75] S. Wang. Le système d'Euler de Kato en famille (I). *Comment. Math. Helv.*, 89(4) :819–865, 2014.

[76] J. Wildeshaus. On an elliptic analogue of Zagier's conjecture. *Duke Math. J.*, 87(2) :355–407, 1997.

[77] W. Zudilin. Regulator of modular units and Mahler measures. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 156(2) :313–326, 2014.

RÉSUMÉ

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent principalement la théorie des formes modulaires. Nous étudions en particulier leurs fonctions L et les liens avec la théorie des régulateurs, d'un point de vue à la fois théorique et effectif.

Nous commençons par démontrer des versions explicites de la conjecture de Beilinson pour les formes modulaires dans le cas de la première valeur non critique, en utilisant la méthode récente de Rogers et Zudilin. Nous donnons aussi un analogue pour la fonction L p-adique associée à une courbe elliptique. Par ailleurs, en collaboration avec Chida, nous traitons le cas du produit de Rankin de deux formes modulaires.

Nous appliquons ces formules pour montrer des cas particuliers des conjectures de Boyd sur les mesures de Mahler des polynômes en deux variables, et en collaboration avec Neururer, nous généralisons la méthode à certains polynômes en trois variables.

Nous étudions ensuite la conjecture de Beilinson pour les variétés abéliennes quotients de la jacobienne d'une courbe modulaire. Grâce au langage adélique, nous montrons que l'algèbre de leurs endomorphismes est engendrée par les correspondances de Hecke, ce qui permet d'établir une version équivariante de la conjecture.

Pour terminer, nous présentons deux résultats concernant le développement de Fourier des formes modulaires. Nous donnons une condition suffisante pour que la paramétrisation modulaire d'une courbe elliptique soit non ramifiée aux pointes de la courbe modulaire. Enfin, en collaboration avec Neururer, nous bornons le corps engendré par les coefficients de Fourier d'une forme modulaire en une pointe arbitraire.

Abstract. The work presented here is concerned with the theory of modular forms, their associated L-functions and the links with the theory of regulators, from a theoretical and effective point of view.

We begin by proving explicit versions of the Beilinson conjecture for modular forms in the case of the first non-critical L-value, by using the recent method of Rogers and Zudilin. We also give an analogue for the p-adic L-function associated to an elliptic curve. Moreover, in joint work with Chida, we treat the case of the Rankin product of two modular forms.

We apply these formulas to show particular cases of the Boyd conjectures on Mahler measures of polynomials in two variables, and in joint work with Neururer, we generalise this method to some polynomials in three variables.

We then study the Beilinson conjecture for abelian varieties which are quotients of the Jacobian of a modular curve. We show with the adelic language that their endomorphism algebras are generated by the Hecke correspondences, which enables us to establish an equivariant version of this conjecture.

We end this text by presenting two results concerning Fourier expansions of modular forms. We give a sufficient condition for the modular parametrisation of an elliptic curve being unramified at the cusps of the modular curve. Finally, in joint work with Neururer, we bound the field generated by the Fourier coefficients of a modular form at an arbitrary cusp.