Régulateurs et fonctions L p-adiques

François Brunault – ENS Lyon
brunault@umpa.ens-lyon.fr

Deuxième congrès Canada-France
5 juin 2008

E courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$
$L(E,s)$ fonction zêta de Hasse-Weil

Bloch et Beilinson ont construit $\mathrm{reg}: K_2(E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\Omega^1(E), \mathbf{R})$

Théorème de Beilinson :
$\exists \gamma \in K_2(E) \otimes \mathbf{Q}, \langle \mathrm{reg}(\gamma), \omega_E \rangle = L(E,2) \cdot \Omega_E^+$

En fait : formule explicite pour $L(E,2)L(E,\chi,1)$ en termes d'un régulateur

$\to$ What about the p-adic case ?

E courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ de conducteur N
$f_E = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in S_2(\Gamma_0(N))$ $\qquad \omega_E = 2i\pi f_E(z)dz$

Polynôme de Hecke $P_p(T) = \begin{cases} 1 - a_p T + pT^2 & \text{si } p \nmid N \\ 1 - a_p T & \text{si } p \mid N \end{cases}$

Fonction zêta de Hasse-Weil

$$L(E,s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{P_p(p^{-s})} \qquad (\Re(s) > \frac{3}{2})$$

On a $L(E,s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} = L(f_E, s)$ avec prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$.

Fonction(s) L p-adique(s)

On fixe p premier, $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$ et $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$.

Hypothèse : $\exists \alpha \in \overline{\mathbf{Q}}, \quad (1-\alpha T) | P_p(T)$ et $v_p(\alpha) < 1$
($\Leftrightarrow E$ est semi-stable en p)

Construisons $L_p(E,s) = L_{p,\alpha}(E,s)$.

Idée : interpolation des valeurs complexes $L(E,\chi,1)$

$$L(E,\chi,s) = \sum_{n\geq 1} a_n \chi(n) n^{-s} \qquad \chi : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$$

$$\mathcal{H}_r = \{\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathbf{Q}_p[[X]], |c_n|_p = O(n^r)\} \qquad (r \geq 0)$$

$$\mathcal{H} = \bigcup_{r \geq 0} \mathcal{H}_r$$

$$\Delta = \begin{cases} (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* & \text{si } p \text{ impair} \\ (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^* & \text{si } p = 2 \end{cases}$$

$$0 \to \Gamma \to \mathbf{Z}_p^* \to \Delta \to 0$$

γ générateur topologique de $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p$

$\omega : \Delta \to \mathbf{Z}_p^*$ Teichmüller

Soit $h \in \mathcal{H}[\Delta]$, $h = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,\delta} X^n[\delta]$.

Si $\eta : \mathbf{Z}_p^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$ caractère continu on pose

$$h(\eta) = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,\delta} (\eta(\gamma) - 1)^n \eta(\omega(\delta)).$$

Fait : $h \in \mathcal{H}_{<1}[\Delta]$ est déterminée par ses valeurs sur les caractères d'ordre fini de $\mathbf{Z}_p^*$.

$$\eta : \mathbf{Z}_p^* \to (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \to \overline{\mathbf{Q}}^* \qquad \tau(\eta) = \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^*} \eta(a) \zeta_{p^n}^a \in \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$$

ζ_{p^n} racine primitive p^n-ième de 1 dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$

Théorème (Mazur–Swinnerton-Dyer, Amice–Vélu,Vishik)

Il existe une unique $L_{p,\alpha}(E) \in \mathcal{H}_{<1}[\Delta]$ telle que pour tout caractère primitif $\eta : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \to \overline{\mathbf{Q}}^*$ $(n \geq 1)$ on ait

$$L_{p,\alpha}(E)(\eta) = \alpha^{-n}\tau(\eta)\frac{L(E,\eta^{-1},1)}{\Omega_E^{\eta(-1)}}$$

où Ω_E^+ et Ω_E^- sont les périodes réelle et imaginaire de E.

Remarque

On a $L_{p,\alpha}(E) \in \mathcal{H}_{v_p(\alpha)}[\Delta]$.

Définition

$$L_p(E,s) = L_{p,\alpha}(E)\left(\left(\frac{x}{\omega(x)}\right)^{s-1}\right) \qquad (s \in \mathbf{Z}_p)$$

On considère la représentation $V_E = H^1(E_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.
Pour $k \in \mathbf{Z}$, on note $V_E(k) = V_E \otimes \mathbf{Q}_p(k)$.

La représentation p-adique associée à V_E est de de Rham et $D_{\mathrm{dR}}(V_E) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(E_{\mathbf{Q}_p})$ avec $\mathrm{Fil}^1 D_{\mathrm{dR}}(V_E) = \Omega^1(E_{\mathbf{Q}_p})$.

V_E cristalline $\Leftrightarrow$ E a bonne réduction en p

V_E semi-stable $\Leftrightarrow$ E est semi-stable en p
Dans ce cas $D_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est muni d'un Frobenius ϕ.

Soit $S = \mathrm{prime}(pN)$.

Définition

Un *système d'Euler* pour $V_E(2)$ est la donnée de classes

$$z_m \in H^1(\mathbf{Q}(\zeta_m), V_E(2)) \qquad (m \geq 1, \mathrm{prime}(m) \cap S = \{p\})$$

vérifiant les conditions de corestriction

$$\mathrm{cores}(z_{m'}) = \prod_{\substack{\ell \mid m' \\ \ell \nmid m}} (1 - a_\ell \mathrm{Fr}_\ell^{-1} + \ell \mathrm{Fr}_\ell^{-2}) z_m \qquad (m \mid m')$$

où $\mathrm{Fr}_\ell \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_m)/\mathbf{Q})$ est le Frobenius arithmétique $(\mathrm{Fr}_\ell(\zeta_m) = \zeta_m^\ell)$.

Kato a construit un système d'Euler pour $V_E(2)$ par passage au quotient à partir de $V_N(2) = H^1(Y(N)_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p(2))$, où $Y(N)$ est la courbe modulaire de niveau N.

Idée :

$$\begin{tikzcd} K_2(Y(Nm')) \arrow[r, "\mathrm{Kato}"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & H^1(\mathbf{Q}(\zeta_{m'}), V_N(2)) \arrow[d, "\mathrm{cores}"] \\ K_2(Y(Nm)) \arrow[r, "\mathrm{Kato}"] & H^1(\mathbf{Q}(\zeta_m), V_N(2)) \end{tikzcd}$$

On part des éléments de Beilinson à gauche, on obtient un système pour $V_N(2)$ puis on projette sur $V_E(2) \cong V_N(2)/\langle T_n - a_n, n \geq 1\rangle$.

Définition

Si V est une représentation p-adique, on pose

$$H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) = \varprojlim_{n\geq 1} H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n}), V).$$

On note $z_E(2) = (z_{p^n})_{n\geq 1} \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V_E(2))$ le système d'Euler défini par Kato.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on note $z_E(k)$ l'image de $z_E(2)$ par l'isomorphisme naturel $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V_E(2)) \cong H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V_E(k))$.

Supposons $p \nmid N$. Perrin-Riou a construit un morphisme

$$\mathcal{L}_E : H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V_E(1)) \to \mathcal{H}[\Delta] \otimes D_{\mathrm{dR}}(V_E)$$

qui interpole les exponentielles duales pour $V_E(k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Théorème (Kato)

Notons α, β les valeurs propres de ϕ sur $D_{\mathrm{dR}}(V_E)$ et π_α, π_β les projections sur les sous-espaces propres associés. Alors

$$\pi_\beta(\mathcal{L}_E(z_E(1))) = L_{p,\alpha}(E) \otimes \pi_\beta \omega_E$$

Démonstration : "loi de réciprocité explicite généralisée"

Remarque

Bonne réduction ordinaire → définition de $L_{p,\beta}(E)$ sauf si $\pi_\alpha \omega_E = 0$.

Par construction de $\mathcal{L}_E$, on peut calculer la valeur de $L_{p,\alpha}(E)$ sur *tous les caractères algébriques* de $\mathbf{Z}_p^*$.

Notons $\log : H^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2)) \xrightarrow{\cong} D_{\mathrm{dR}}(V_E(2)) \cong D_{\mathrm{dR}}(V_E)$.

Théorème (Perrin-Riou)

$$L_{p,\alpha}(E, \omega^{-1}, 0) \otimes \pi_\beta \omega_E = -(1 - p^{-1}\alpha^{-1})(1-\alpha)^{-1} \pi_\beta \log z_E(2)$$

Pour $a, b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, on a une unité de Siegel $g_{a,b} \in \mathcal{O}^*(Y(N)) \otimes \mathbf{Q}$. Si χ est un caractère modulo N, posons

$$z_\chi = \sum_{a \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*} \chi(a) \otimes \{g_{1,0}, g_{a,1}\} \in K_2(Y(N)) \otimes \mathbf{Q}(\chi).$$

Notons $r_E : K_2(Y(N)) \to H^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2))$ le régulateur de Kato et $w(E)$ l'opposé du signe de l'équation fonctionnelle de $L(E,s)$.

Théorème

Supposons $p \nmid N$. Si $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \to \overline{\mathbf{Q}}^*$ est pair et primitif, on a

$$\pi_\beta \log r_E(z_\chi) = w(E)\tau(\chi) \frac{1-\alpha}{1-p^{-1}\alpha^{-1}} \prod_{\ell \mid N} (1-a_l) \cdot$$
$$\frac{L(E,\chi^{-1},1)}{\Omega_E^+} L_{p,\alpha}(E,\omega^{-1},0) \otimes \pi_\beta \omega_E.$$

Supposons $p \nmid N$. Soit $X(N)/\mathbf{Q}$ la courbe modulaire complète et $\mathcal{X}(N)$ un modèle projectif lisse de $X(N)$ sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}] \subset \mathbf{Z}_p$.

$$\begin{tikzcd}
K_2(\mathbf{C}_p(X(N))) \arrow[r, "\mathrm{Coleman}"] & \Omega^1(X(N)_{\mathbf{C}_p})^\vee \arrow[r, "\omega_E"] & \mathbf{C}_p \\
K_2(\mathcal{X}(N)) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\mathrm{Besser}"] & H^1_{\mathrm{dR}}(X(N)_{\mathbf{Q}_p}) \arrow[u] \arrow[d, "\exp"] \arrow[r, "\phi_*"] & H^1_{\mathrm{dR}}(E_{\mathbf{Q}_p}) \arrow[u, "\omega_E \cup \cdot"'] \arrow[d, "\exp"] \\
K_2(Y(N)) \arrow[r, "\mathrm{Kato}"] & H^1(\mathbf{Q}_p, V_N(2)) \arrow[r] & H^1(\mathbf{Q}_p, V_E(2))
\end{tikzcd}$$

1. Démonstration directe de la formule (sans passer par $z_E(1)$) ?
2. Comment repérer l'image du régulateur r_E (conjecturalement une droite) dans le plan $D_{\mathrm{dR}}(V_E)$?
3. Cas où E a réduction multiplicative déployée en $\ell \mid N, \ell \neq p$?
4. Construction de la fonction L p-adique de E par interpolation du régulateur ?