Version explicite du théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_1(N)$

François Brunault [a],

[a] *Université Paris 7 – Denis-Diderot, 175 rue de Chevaleret, 75013 Paris, France*

Reçu le *****; accepté après révision le +++++

Présenté par ££££££

Résumé

Nous énonçons une version explicite du théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_1(N)$. Nous en déduisons, pour toute courbe elliptique E de conducteur N premier, une formule donnant $L(E,2)$ en termes des valeurs tordues $L(E,\chi,1)$, avec χ caractère modulo N. Nous illustrons ce résultat et ses conséquences dans le cas de la courbe elliptique $E = X_1(11)$. *Pour citer cet article : F. Brunault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

Abstract

Explicit version of Beilinson's theorem for the modular curve $X_1(N)$. We state an explicit version of Beilinson's theorem for the modular curve $X_1(N)$. We deduce from it, for any elliptic curve E of prime conductor N, a formula giving $L(E,2)$ in terms of the twisted values $L(E,\chi,1)$, where χ is a character modulo N. We illustrate this result and its consequences in the case of the elliptic curve $E = X_1(11)$. *To cite this article: F. Brunault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

Abridged English version

Beilinson's theorem on modular curves [1, §5] (see also [2,11]) expresses the special value at $s = 2$ of the L-function of a modular form of weight 2, in terms of a regulator. Because of the potential applications of this result [4,6,10], it is natural to search for an explicit version of it.

Let $N \geq 1$ be an integer and $X_1(N)$ be the modular curve over $\mathbf{Q}$ associated to the congruence subgroup $\Gamma_1(N)$ of the modular group. Bloch and Beilinson defined a regulator map on the algebraic K-group $K_2(X_1(N))$ [13]. We recall that the exact localization sequence in algebraic K-theory induces

Email address: `brunault@math.jussieu.fr` (François Brunault).

an inclusion $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q} \hookrightarrow K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \otimes \mathbf{Q}$, where $\mathbf{Q}(X_1(N))$ is the function field of $X_1(N)$. The regulator map can be given the following definition [8]

$$\begin{aligned} r_N : K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\Omega^1(X_1(N)), \mathbf{R}) \\ \{u, v\} &\mapsto \left(\omega \mapsto \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \eta(u, v) \wedge \omega\right) \end{aligned} \tag{1}$$

where for any $u, v \in \mathbf{Q}(X_1(N))^*$, the differential form $\eta(u, v)$ is defined by

$$\eta(u, v) = -i \log|u|(\partial - \overline{\partial}) \log|v| + i \log|v|(\partial - \overline{\partial}) \log|u| \qquad (d = \partial + \overline{\partial}). \tag{2}$$

Let $f \in S_2(\Gamma_1(N), \psi)$ be a weight 2 newform of level N and character ψ. Let us write the L-function associated to f as $L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$. For any Dirichlet character χ we define $L(f, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$. Profound results of Beilinson [1,2,11] express $L(f, 2)L(f, \chi, 1)$, where χ is an even Dirichlet character, in terms of $\langle r_N(\gamma_\chi), \omega_f\rangle$, with $\gamma_\chi \in K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{C}$ and $\omega_f = 2i\pi f(z)dz$. However Beilinson's formula is not explicit in the following sense.

(i) The element γ_χ is defined using a Milnor symbol associated to modular units of $X_1(N')$, with N' a suitable multiple of N ; the integer N' and the modular units are not given explicitely.

(ii) The regulator of γ_χ is only computed up to an algebraic factor.

The aim of this note is to precise the points (i) and (ii) above. In particular, when χ is of level N, we show that it is possible to take $N' = N$ and we give the following explicit formula.

Theorem 0.1 *For any even Dirichlet character χ mod N, with χ primitive and $\chi \neq \overline{\psi}$, we have*

$$L(f, 2)L(f, \chi, 1) = \frac{N\pi\tau(\chi)}{2\varphi(N)} \langle r_N(\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}), \omega_f\rangle \tag{3}$$

where $u_{\overline{\chi}}$ et $u_{\psi\chi}$ are explicit modular units of $X_1(N)$ (see Proposition 2.1), $\tau(\chi) = \sum_{a \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} \chi(a) e^{\frac{2ia\pi}{N}}$ denotes the Gauß sum of χ, and φ is Euler's totient function.

Moreover, the Milnor symbol $\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}$ lies in the subspace $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{C}$.

In order to prove Theorem 0.1, we follow Beilinson's method and make every step explicit. We refer to [5, §3.2] for the details.

Now let E be an elliptic curve over $\mathbf{Q}$ of conductor N. Let us write $L(E, s) = L(f, s)$ where f is a newform of weight 2 on $\Gamma_0(N)$. Let us denote by $w(E)$ the opposite of the sign of the functional equation of $L(E, s)$. Applying Theorem 1.1 and using an idea of Merel, we get the following formula for $L(E, 2)L(E, \chi, 1)$. The coefficients $c_{\chi,\chi'}$, which do not depend on E, are defined below (17).

Theorem 0.2 *Let $N = p$ be prime. For any even Dirichlet character $\chi \neq 1$ mod p, we have*

$$L(E, 2)L(E, \chi, 1) = \frac{pw(E)\tau(\chi)}{8i\pi(p-1)} \sum_{\chi' \ mod\ p} c_{\chi,\chi'} L(E, \chi', 1), \tag{4}$$

the sum being over characters χ' mod p, with χ' even and non-trivial.

Remark 1 We show [5, Lemme 99] that there always exists an even Dirichlet character $\chi \neq 1$ mod p such that $L(E, \chi, 1) \neq 0$. Thus (4) leads to an expression for $L(E, 2)$ in terms of the twisted values $L(E, \chi, 1)$.

1. Énoncé du théorème

Le théorème de Beilinson sur les courbes modulaires [1, §5] (voir également [2,11]) exprime la valeur en $s = 2$ de la fonction L d'une forme modulaire de poids 2 en termes d'un régulateur. Compte-tenu des applications potentielles de ce théorème [4,6,10], il est naturel d'en chercher une version explicite.

Soient $N \geq 1$ un entier et $X_1(N)$ la courbe modulaire (définie sur $\mathbf{Q}$) associée au sous-groupe de congruence $\Gamma_1(N)$. Le groupe de K-théorie algébrique $K_2(X_1(N))$ est muni d'une application régulateur, définie par Bloch et Beilinson [13]. Rappelons que la suite exacte de localisation en K-théorie algébrique induit une inclusion $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q} \hookrightarrow K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \otimes \mathbf{Q}$, où $\mathbf{Q}(X_1(N))$ est le corps des fonctions de $X_1(N)$. On peut donner la définition suivante de l'application régulateur [8]

$$r_N : K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\Omega^1(X_1(N)), \mathbf{R}) \qquad (5)$$
$$\{u, v\} \mapsto \Big(\omega \mapsto \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \eta(u, v) \wedge \omega\Big),$$

où pour tout $u, v \in \mathbf{Q}(X_1(N))^*$, la forme différentielle $\eta(u, v)$ est définie par

$$\eta(u, v) = -i \log |u|(\partial - \overline{\partial}) \log |v| + i \log |v|(\partial - \overline{\partial}) \log |u| \qquad (d = \partial + \overline{\partial}). \qquad (6)$$

Après tensorisation par $\mathbf{C}$ et restriction à $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{C}$, nous obtenons une application

$$r_N : K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{C} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(S_2(\Gamma_1(N)), \mathbf{C}). \qquad (7)$$

Soit $f \in S_2(\Gamma_1(N), \psi)$ une forme parabolique *primitive* (propre pour l'algèbre de Hecke, nouvelle et normalisée) de poids 2, niveau N et caractère ψ. Posons $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2i\pi nz}$. La *fonction L associée à f* est définie par $L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$. Pour tout caractère de Dirichlet χ, nous définissons la *série L de f tordue par* χ par $L(f, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$. Ces fonctions admettent des prolongements holomorphes au plan complexe.

Un théorème profond de Beilinson [1,2,11] exprime le produit de valeurs spéciales $L(f, 2)L(f, \chi, 1)$, où χ est un caractère pair, en termes de $\langle r_N(\gamma_\chi), \omega_f\rangle$, avec $\gamma_\chi \in K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{C}$ et $\omega_f = 2i\pi f(z)dz$. Néanmoins, la formule de Beilinson n'est pas explicite en deux points :

(i) L'élément γ_χ est défini à l'aide d'un symbole de Milnor associé à des unités modulaires de $X_1(N')$, avec N' multiple de N ; l'entier N' et les unités modulaires ne sont pas précisés.

(ii) Le régulateur de γ_χ est calculé seulement à un facteur algébrique près.

Le but de cette note est de préciser les points (i) et (ii) ci-dessus. En particulier, lorsque χ est de niveau N, nous montrons qu'il est possible de prendre $N' = N$ et donnons la formule explicite suivante.

Théorème 1.1 *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N, supposé pair, primitif et distinct de $\overline{\psi}$. Nous avons*

$$L(f, 2)L(f, \chi, 1) = \frac{N\pi\tau(\chi)}{2\varphi(N)} \langle r_N(\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}), f\rangle \qquad (8)$$

où $u_{\overline{\chi}}$ et $u_{\psi\chi}$ sont des unités modulaires explicites de $X_1(N)$ (Proposition 2.1), $\tau(\chi) = \sum_{a \in \frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}} \chi(a) e^{\frac{2ia\pi}{N}}$ désigne la somme de Gauß de χ, et φ est la fonction indicatrice d'Euler.

De plus, le symbole de Milnor $\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}$ appartient au sous-espace $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{C}$.

La démonstration du théorème 1.1 est esquissée dans la section 2.

2. Unités modulaires et régulateur de Beilinson

Nous allons définir les unités modulaires u_χ du théorème 1.1, qui sont essentiellement des unités de Siegel. Pour les détails omis ici, nous renvoyons à l'exposition remarquable de Siegel [12, p. 1–73].

Nous adoptons les modèles $Y_1(N)$ et $X_1(N)$ sur $\mathbf{Q}$ des courbes modulaires, décrits dans [7, 9.3.6], et pour lesquels la pointe infinie est $\mathbf{Q}$-rationnelle. Notons $\mathcal{O}^*(Y_1(N))$ le groupe des unités modulaires (définies sur $\mathbf{Q}$) de $X_1(N)$. Toute unité modulaire $u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N))$ définit une fonction $\log|u|$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$, invariante sous l'action de $\Gamma_1(N)$. L'homomorphisme de groupes $u \mapsto \log|u|$ s'étend à $\mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes \mathbf{C}$. Notons que l'homomorphisme qui en résulte est injectif.

Soit $\chi : (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^* \to \mathbf{C}^*$ un caractère de Dirichlet modulo N, pair et distinct du caractère trivial. On convient d'étendre χ par 0 en une application de $\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}$ dans $\mathbf{C}$. Posons

$$E_\chi^*(z) = \lim_{\substack{s\to 1\\ \mathrm{Re}(s)>1}} \left({\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}}' \frac{\chi(n)\cdot \mathrm{Im}(z)^s}{|Nmz+n|^{2s}} \right) \qquad (z \in \mathcal{H}), \tag{9}$$

où le symbole $'$ indique que la somme est restreinte aux $(m,n) \neq (0,0)$. D'après la formule de sommation de Poisson, la fonction E_χ^* est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{H}$. Elle est invariante sous l'action du groupe $\Gamma_1(N)$. La proposition suivante est classique (voir par exemple [9]).

Proposition 2.1 *Il existe une unique unité modulaire $u_\chi \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)) \otimes \mathbf{C}$ vérifiant*

$$\log|u_\chi| = \frac{1}{\pi} E_\chi^*. \tag{10}$$

Le diviseur de u_χ (défini par $\mathbf{C}$-linéarité) est donné par

$$\operatorname{div} u_\chi = -\frac{L(\chi,2)}{\pi^2} \sum_{\lambda \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*/\pm 1} \overline{\chi}(\lambda) \cdot P_\lambda, \tag{11}$$

où P_λ désigne l'image de la pointe infinie par l'opérateur diamant $\langle \lambda \rangle$.

Pour démontrer le théorème 1.1, nous reprenons la méthode de Beilinson et explicitons chacune de ses étapes [5, §3.2]. D'après (10), (6) et (5), il s'agit de calculer l'intégrale

$$\int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}} E_{\overline{\chi}}^* \cdot \omega_f \wedge \overline{\partial} E_{\psi\chi}^* \tag{12}$$

où l'on a posé $\omega_f = 2i\pi f(z)dz$. La méthode de Rankin-Selberg permet d'écrire (12) en termes de la valeur en $s=2$ de la convolution de séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n \sigma_\chi(n)}{n^s} \qquad \text{avec } \sigma_\chi(n) = \sum_{d|n} d\chi(d) \tag{13}$$

On utilise seulement ensuite le caractère propre de f pour les opérateurs de Hecke, pour montrer que la série de Dirichlet (13) admet un développement en produit eulérien. On obtient essentiellement $L(f,s)L(f,\chi,s-1)$, d'où (8). Un calcul direct utilisant les développements de Fourier de $E_{\overline{\chi}}^*$ et $E_{\psi\chi}^*$ montre que tous les symboles modérés de $\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}$ sont triviaux, c'est-à-dire $\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\} \in K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{C}$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.1.

Schappacher et Scholl ont soulevé la question suivante concernant l'image de l'application régulateur [11, 1.1.3 (i) et (ii)]. Notons $V_N = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\Omega^1(X_1(N)), \mathbf{R})$ l'espace d'arrivée de r_N. Posons

$$K_N = \{\mathcal{O}^*(Y_1(N)), \mathcal{O}^*(Y_1(N))\} \cap K_2(X_1(N)) \otimes \mathbf{Q}, \tag{14}$$

où $\{\mathcal{O}^*(Y_1(N)), \mathcal{O}^*(Y_1(N))\}$ est le sous-groupe de $K_2(\mathbf{Q}(X_1(N)))$ engendré par les symboles $\{u,v\}$ avec $u,v \in \mathcal{O}^*(Y_1(N))$. L'espace vectoriel réel V_N est-il engendré par $r_N(K_N)$?

Théorème 2.2 *Supposons N premier. Alors l'espace V_N est engendré par $r_N(K_N)$.*

Idée de démonstration. On utilise le théorème 1.1 et le fait suivant, qui se démontre à l'aide des symboles de Manin associés aux formes modulaires : les formes linéaires $f \mapsto L(f,\chi,1)$ engendrent le dual de $S_2(\Gamma_1(N),\psi)$ lorsque N est premier, ψ est fixé et χ parcourt les caractères pairs mod N, avec $\chi \neq 1, \overline{\psi}$.

Remarque 1 Les résultats de Schappacher et Scholl [11, 1.1.2 (iii)] entraînent que K_N est contenu dans le sous-espace *entier* $K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$, défini grâce à un modèle propre et régulier de $X_1(N)$ sur $\mathbf{Z}$. En particulier, l'élément $\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}$ appartient à $K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{C}$.
Remarque 2 Beilinson conjecture que l'application r_N est injective sur $K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$ et induit une $\mathbf{Q}$-structure de V_N. Joint au théorème 2.2, cela entraînerait $K_N = K_2(X_1(N))_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$.

3. Applications aux courbes elliptiques

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ de conducteur N. D'après les travaux de Breuil, Carayol, Conrad, Diamond, Taylor et Wiles, nous avons $L(E,s) = L(f,s)$ où f est une forme parabolique primitive de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$. Posons $L(E,\chi,s) = L(f,\chi,s)$ pour tout caractère de Dirichlet χ. Appliquons le théorème 1.1 à f. Le membre de droite de (8) est essentiellement un produit scalaire de Petersson et il est possible de l'évaluer en termes de symboles de Manin, grâce à une idée de Merel [5, Thm 93]. Notons $w(E)$ l'opposé du signe de l'équation fonctionnelle de $L(E,s)$. Pour tout caractère de Dirichlet χ mod N, pair et non trivial, posons

$$\eta_\chi = E^*_\chi \cdot (\partial - \overline{\partial}) E^*_{\overline{\chi}} - E^*_{\overline{\chi}} \cdot (\partial - \overline{\partial}) E^*_\chi. \tag{15}$$

Pour $z_0, z_1 \in \mathcal{H}$, notons $\int_{z_0}^{z_1}$ l'intégrale le long d'une géodésique reliant z_0 à z_1 dans $\mathcal{H}$. Pour $v \in \mathbf{Z}$, posons $g_v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & v \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Enfin, notons $\rho = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

Théorème 3.1 *Supposons $N = p$ premier. Pour tout caractère χ mod p, pair et non trivial, nous avons*

$$L(E,2)L(E,\chi,1) = \frac{pw(E)\tau(\chi)}{8i\pi(p-1)} \sum_{\chi' \bmod p} c_{\chi,\chi'} L(E,\chi',1), \tag{16}$$

la somme portant sur les caractères χ' pairs et non triviaux, et les coefficients $c_{\chi,\chi'}$ étant définis par

$$c_{\chi,\chi'} = \tau(\overline{\chi'}) \sum_{\lambda \in (\frac{\mathbf{Z}}{p\mathbf{Z}})^*} \chi'(\lambda) \int_{g_v\rho}^{g_v\rho^2} \eta_\chi. \tag{17}$$

Remarque 3 (i) Les quantités $c_{\chi,\chi'}$ sont des intégrales de la forme différentielle fermée η_χ le long de cycles fermés de la courbe modulaire $X_1(p)(\mathbf{C})$. Elles ne dépendent pas de E.

(ii) Nous montrons qu'il existe toujours un caractère pair $\chi \neq 1$ mod p tel que $L(E,\chi,1)$ soit non nul [5, Lemme 99]. Par conséquent, la formule (4) mène à une expression pour $L(E,2)$ en termes des valeurs tordues $L(E,\chi,1)$.

La courbe modulaire $X_1(N)$ est une courbe elliptique pour $N = 11, 14, 15$. Illustrons le théorème 1.1 avec la courbe $E = X_1(11)$, donnée par l'équation $y^2 + y = x^3 - x^2$. Le groupe de Mordell-Weil $E(\mathbf{Q})$ est fini d'ordre 5, engendré par le point $P = (0,0)$. Notons $D_E : E(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ la fonction dilogarithme elliptique[1].

Théorème 3.2 *Nous avons les identités*

$$L(E,2) = \frac{10}{11}\pi D_E(P) \qquad et \qquad D_E(2P) = \frac{3}{2} D_E(P). \tag{18}$$

[1] Cette fonction dépend par un signe du choix d'une orientation de $E(\mathbf{R})$ et nous choisissons ici l'orientation donnée par les y croissants.

La seconde des identités (18), appelée *relation exotique*, a été conjecturée par Bloch et Grayson et démontrée par Bertin [3]. Nous remarquons, d'après [3], que le théorème 3.2 admet le corollaire suivant. La *mesure de Mahler logarithmique* d'un polynôme $0 \neq P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ est définie [4] par

$$m(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |P(e^{2i\pi u_1}, \ldots, e^{2i\pi u_n})| du_1 \ldots du_n. \tag{19}$$

Corollaire 3.3 *Pour les polynômes* $P(X, Y) = (X + Y + 1)(X + 1)(Y + 1) + XY$ *et* $Q(X, Y) = Y^2 + (X^2 + 2X - 1)Y + X^3$ *nous avons*

$$m(P) = \frac{77}{4\pi^2} L(E, 2) = 7L'(E, 0) \qquad et \qquad m(Q) = \frac{55}{4\pi^2} L(E, 2) = 5L'(E, 0). \tag{20}$$

Remerciements

Le résultat principal de ce texte (théorème 1.1) a été exposé lors du Colloque Jeunes Chercheurs en théorie des nombres, à La Grande Motte (29–31 mars 2004). Je remercie Loïc Merel et Jörg Wildeshaus pour leur encouragement à rédiger cette note.

Références

[1] A. A. Beilinson – « Higher regulators and values of L-functions », in *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984, p. 181–238.

[2] — , « Higher regulators of modular curves », in *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 1–34.

[3] M. J. Bertin – « Mesure de Mahler d'une famille de polynômes », *J. Reine Angew. Math.* **569** (2004), p. 175–188.

[4] D. W. Boyd – « Mahler's measure and special values of L-functions », *Experiment. Math.* **7** (1998), no. 1, p. 37–82.

[5] F. Brunault – *Étude de la valeur en $s = 2$ de la fonction L d'une courbe elliptique*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, décembre 2005.

[6] C. Deninger – « Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbf{Z}^n$-actions », *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), no. 2, p. 259–281.

[7] F. Diamond & J. Im – « Modular forms and modular curves », in *Seminar on Fermat's Last Theorem (Toronto, ON, 1993–1994)*, CMS Conf. Proc., vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 39–133.

[8] T. Dokchitser, R. de Jeu & D. Zagier – « Numerical verification of Beilinson's conjecture for K_2 of hyperelliptic curves », À paraître dans Compositio Mathematica.

[9] D. S. Kubert & S. Lang – *Modular units*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], vol. 244, Springer-Verlag, New York, 1981.

[10] J.-F. Mestre & N. Schappacher – « Séries de Kronecker et fonctions L des puissances symétriques de courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ », in *Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989)*, Progr. Math., vol. 89, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, p. 209–245.

[11] N. Schappacher & A. J. Scholl – « Beilinson's theorem on modular curves », in *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspect. Math., vol. 4, Academic Press, Boston, MA, 1988, p. 273–304.

[12] C. L. Siegel – *Lectures on advanced analytic number theory*, Notes by S. Raghavan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 23, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

[13] C. Soulé – « Régulateurs », *Astérisque* (1986), no. 133-134, p. 237–253, Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.