RÉGULATEURS MODULAIRES EXPLICITES VIA LA MÉTHODE DE ROGERS-ZUDILIN

par

François Brunault

Résumé. — Nous calculons le régulateur des éléments de Beilinson-Deninger-Scholl en termes de valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires en utilisant la méthode de Rogers-Zudilin.

1. Introduction

Soit $N \geq 3$ un entier. Soit $Y(N)$ la courbe modulaire ouverte et E la courbe elliptique universelle sur $Y(N)$. Pour un entier $n \geq 0$, notons E^n la puissance fibrée n-ième de E au-dessus de $Y(N)$. Pour tout $u \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, avec $u \neq 0$ si $n = 0$, Beilinson a défini le symbole d'Eisenstein

$$\mathrm{Eis}^n(u) \in H^{n+1}_{\mathcal{M}}(E^n, \mathbf{Q}(n+1)).$$

Le symbole d'Eisenstein est à la base de la preuve par Beilinson et Deninger-Scholl de la conjecture de Beilinson pour les valeurs non critiques des fonctions L des formes modulaires.

Plus précisément, donnons-nous un entier $k \geq 0$, et choisissons une décomposition $k = k_1 + k_2$ avec $k_1, k_2 \geq 0$. Considérons les projections canoniques

$$\begin{tikzcd} & E^{k_1+k_2} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ E^{k_1} & & E^{k_2}. \end{tikzcd}$$

Soient $u_1, u_2 \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, avec $u_i \neq 0$ si $k_i = 0$. Généralisant les constructions de Beilinson et Deninger-Scholl, Gealy [**7**] définit un élément dans la cohomologie motivique de E^k

$$\mathrm{Eis}^{k_1,k_2}(u_1,u_2) = p_1^* \mathrm{Eis}^{k_1}(u_1) \cup p_2^* \mathrm{Eis}^{k_2}(u_2) \in H^{k+2}_{\mathcal{M}}(E^k, \mathbf{Q}(k+2)). \tag{1}$$

Dans le cas $k = 0$, on retrouve les éléments de Beilinson-Kato (cup-produits d'unités de Siegel) dans le K_2 de la courbe modulaire $Y(N)$. Considérons le régulateur de Beilinson à valeurs dans la cohomologie de Deligne-Beilinson

$$r_{\text{Б}} : H^{k+2}_{\mathcal{M}}(E^k, \mathbf{Q}(k+2)) \to H^{k+2}_{\mathcal{D}}(E^k/\mathbf{R}, \mathbf{R}(k+2))$$

et l'application analogue pour la compactification lisse $\overline{E}^k$ de E^k définie par Deligne. Soit f une forme parabolique primitive de poids $k+2$ pour le groupe $\Gamma_1(N)$. Notons K_f le corps des coefficients de f, et $\omega_f \in \Omega^{k+1}(\overline{E}^k) \otimes K_f$ la forme différentielle associée à f. Classiquement, le régulateur de Beilinson associé à f est défini au moyen de l'accouplement issu de la dualité de Poincaré

$$\langle \cdot, \omega_f \rangle : H^{k+2}_{\mathcal{D}}(\overline{E}^k/\mathbf{R}, \mathbf{R}(k+2)) \to K_f \otimes \mathbf{C}.$$

L'auteur est partiellement supporté par le projet ANR Régulateurs ANR-12-BS01-0002.

En utilisant les éléments (1), Deninger-Scholl [**5**] et Gealy [**7**] montrent qu'il existe un élément x de $H^{k+2}_{\mathcal{M}}(\overline{E}^k, \mathbf{Q}(k+2)) \otimes K_f$ tel que

$$\langle r_{\text{Б}}(x), \omega_f \rangle = \Omega_f^+ L'(f,0)$$

où Ω_f^+ est la période réelle de f. Le calcul est basé sur la méthode de Rankin-Selberg. Cela permet de démontrer la conjecture de Beilinson pour la valeur spéciale $L(f,k+2)$.

Dans cet article, nous proposons une approche nouvelle, et totalement explicite, pour calculer le régulateur. Au lieu d'intégrer le régulateur de Beilinson contre une forme parabolique, nous pouvons l'intégrer le long des $(k+1)$-cycles explicites fournis par la théorie de Shokurov [**16**]. Plus précisément, considérons le cycle de Shokurov $X^k\{0,\infty\}$ (voir la section 4). Dans la section 6, nous définissons une forme différentielle explicite $\operatorname{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2)$ représentant le régulateur de Beilinson de $\operatorname{Eis}^{k_1,k_2}(u_1,u_2)$. Considérons alors l'intégrale

$$\int_{X^k\{0,\infty\}} \operatorname{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2). \tag{2}$$

Contrairement au cas $k=0$, l'intégrale (2) ne converge pas absolument en général. Pour remédier à ce problème, nous introduisons un paramètre complexe $s \in \mathbf{C}$ et considérons l'intégrale

$$\int_{X^k\{0,\infty\}} \mathfrak{I}(\tau)^s \operatorname{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2). \tag{3}$$

Nous montrons que l'intégrale (3) converge pour $\mathfrak{R}(s) \ll 0$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, holomorphe en $s=0$. Définissons alors l'intégrale régularisée

$$\int^*_{X^k\{0,\infty\}} \operatorname{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2) \tag{4}$$

comme la valeur en $s=0$ de cette fonction.

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré. Pour $\ell \geq 1$, $a,b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, définissons la série d'Eisenstein

$$G^{(\ell)}_{a,b}(\tau) = a_0(G^{(\ell)}_{a,b}) + \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m\equiv a, n\equiv b(N)}} m^{\ell-1} q^{mn} + (-1)^\ell \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m\equiv -a, n\equiv -b(N)}} m^{\ell-1} q^{mn} \qquad (\tau \in \mathcal{H}, q = e^{2i\pi\tau})$$

avec

$$a_0(G^{(1)}_{a,b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a=b=0 \\ \frac{1}{2} - \{\frac{b}{N}\} & \text{si } a=0 \text{ et } b\neq 0 \\ \frac{1}{2} - \{\frac{a}{N}\} & \text{si } a\neq 0 \text{ et } b=0 \\ 0 & \text{si } a\neq 0 \text{ et } b \neq 0, \end{cases}$$

et pour $\ell \geq 2$,

$$a_0(G^{(\ell)}_{a,b}) = \begin{cases} -N^{\ell-1}\frac{B_\ell(\{\frac{a}{N}\})}{\ell} & \text{si } b=0 \\ 0 & \text{si } b\neq 0, \end{cases}$$

où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionnaire de x, et B_ℓ est le ℓ-ième polynôme de Bernoulli. La fonction $G^{(\ell)}_{a,b}$ est une forme modulaire (quasi-modulaire si $\ell=2$ et $a=0$) de poids ℓ pour le groupe $\Gamma_1(N^2)$.

Étant donnée une forme modulaire $F = \sum_{n=0}^\infty a_n q^n$ pour $\Gamma_1(M)$, notons

$$\Lambda(F,s) = M^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$$

la fonction L complétée de F, et notons $\Lambda^*(F,0)$ la valeur régularisée de $\Lambda(F,s)$ en $s=0$ (voir la définition 3.13).

En utilisant la méthode de Rogers-Zudilin, nous montrons le résultat suivant.

Théorème 1.1. — *Soit $k \geq 0$ un entier, et soient $k_1, k_2 \geq 0$ tels que $k = k_1 + k_2$. Soit $N \geq 3$ un entier, et soient $u_1 = (a_1, b_1)$, $u_2 = (a_2, b_2) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. Supposons $u_i \neq (0,0)$ si $k_i = 0$, et $b_i \neq 0$ si $k_i = 1$. Alors*

(5)
$$\int_{X^k\{0,\infty\}}^{*} \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1,k_2}(u_1,u_2) = \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{2N^{k+2}} (2\pi)^{k+1} i^{k_1-k_2+1} \Lambda^*\left(G_{b_2,a_1}^{(k_2+1)} G_{b_1,-a_2}^{(k_1+1)} - G_{b_2,-a_1}^{(k_2+1)} G_{b_1,a_2}^{(k_1+1)}, 0\right).$$

Remarques 1.2. — (1) Lorsque $k_1 = k_2 = 0$, on retrouve la formule pour le régulateur du cup-produit de deux unités modulaires [**2, 19**].

(2) La forme modulaire de poids $k+2$ apparaissant dans le membre de droite de (5) est à coefficients rationnels. Il est naturel de se demander si toute forme parabolique primitive est combinaison linéaire de telles formes modulaires.

(3) Si γ est un $(k+1)$-cycle de la forme $\gamma = \sum_i n_i (X^k\{0,\infty\})|g_i$ avec $n_i \in \mathbf{Z}$ et $g_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, alors on peut calculer l'intégrale de $\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1,k_2}(u_1,u_2)$ le long de γ au moyen de la formule

$$\int_{\gamma}^{*} \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1,k_2}(u_1,u_2) = \sum_i n_i \int_{X^k\{0,\infty\}}^{*} g_i^* \,\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1,k_2}(u_1,u_2) = \sum_i n_i \int_{X^k\{0,\infty\}}^{*} \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1,k_2}(u_1 g_i, u_2 g_i).$$

(4) Soit $F_{u_1,u_2} = G_{b_2,a_1}^{(k_2+1)} G_{b_1,-a_2}^{(k_1+1)} - G_{b_2,-a_1}^{(k_2+1)} G_{b_1,a_2}^{(k_1+1)}$ la forme modulaire apparaissant dans le membre de droite de (5). Alors $\tilde{F}_{u_1,u_2}(\tau) = F_{u_1,u_2}(\tau/N)$ est modulaire pour le groupe $\Gamma(N)$. Supposons de plus $\det(u_1,u_2) = 0$, c'est-à-dire $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. Alors $F_{u_1,u_2} \in \mathbf{Q}[[q^N]]$, de sorte que $\tilde{F}_{u_1,u_2}(\tau+1) = \tilde{F}_{u_1,u_2}(\tau)$, et donc $\tilde{F}_{u_1,u_2} \in M_{k+2}(\Gamma_1(N))$. Remarquons en outre que pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, avec $u_i g \neq (*,0)$ si $k_i = 1$, on a $\det(u_1 g, u_2 g) = 0$ et donc $\tilde{F}_{u_1 g, u_2 g} \in M_{k+2}(\Gamma_1(N))$.

(5) Dans le cas où $k_i = 1$ et $b_i = 0$, on a un résultat partiel pour le calcul du régulateur, voir le théorème 9.5.

Cet article est organisé comme suit. Dans les sections 2 et 3, nous introduisons les notations concernant la fonction zêta de Hurwitz et les séries d'Eisenstein-Kronecker, et rappelons les résultats principaux les concernant. Dans les sections 4 et 5, nous rappelons la définition des cycles de Shokurov et la formule donnant la réalisation du symbole d'Eisenstein. Dans la section 6, nous définissons les éléments de Deninger-Scholl et explicitons leurs réalisations en cohomologie de Deligne-Beilinson. Dans la section 7, nous exposons la méthode de Rogers-Zudilin dans un cadre suffisamment général. Dans la section 8, nous calculons le développement de Fourier de certaines séries d'Eisenstein analytiques réelles. Enfin, nous effectuons le calcul proprement dit du régulateur dans la section 9.

Ce travail doit beaucoup à Anton Mellit et Don Zagier, qui ont les premiers proposé une formulation analytique générale de l'astuce de Rogers-Zudilin. Je remercie Anton Mellit de m'avoir invité à l'université de Köln en novembre 2011, et pour les discussions très constructives que nous avons eues. Je remercie Odile Lecacheux pour des échanges très stimulants autour de ces questions, Loïc Merel pour avoir porté mon attention sur les cycles de Shokurov, Wadim Zudilin pour ses encouragements lors de la rédaction, et Michael Neururer pour ses commentaires et la relecture de ce texte. Enfin, je remercie le rapporteur pour ses remarques utiles pour l'amélioration de ce texte.

2. Fonction zêta de Hurwitz

Pour $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on définit la *fonction zêta de Hurwitz*

$$\zeta(x,s) = \sum_{\substack{y>0 \\ y \equiv x(1)}} y^{-s} \qquad (\Re(s) > 1)$$

et la *fonction zêta périodique*

$$\hat{\zeta}(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i\pi nx} n^{-s} \qquad (\Re(s) > 1).$$

On a donc $\zeta(0,s) = \hat{\zeta}(0,s) = \zeta(s)$. La fonction $s \mapsto \zeta(x,s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec un unique pôle simple en $s = 1$, de résidu égal à 1 [**10**, Corollary 2 (a)].

Définition 2.1. — Pour $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on pose

$$\zeta^*(x,1) = \lim_{s\to 1} \left(\zeta(x,s) - \frac{1}{s-1}\right).$$

Pour $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $x \neq 0$, la fonction $s \mapsto \hat{\zeta}(x,s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ [**10**, Corollary 2 (c)]. Pour tout entier $N \geq 1$, en notant $\zeta_N = e^{2i\pi/N}$, on a les relations suivantes

$$\sum_{x\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{xu} \zeta(\frac{x}{N}, s) = N^s \hat{\zeta}(\frac{u}{N}, s)$$

$$\sum_{x\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{xu} \hat{\zeta}(\frac{x}{N}, s) = N^{1-s} \zeta(-\frac{u}{N}, s)$$

La formule de Hurwitz [**10**, (2), Corollary 2 (b)] est une équation fonctionnelle reliant ζ et $\hat{\zeta}$:

$$\zeta(x,1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\frac{i\pi s}{2}} \hat{\zeta}(x,s) + e^{\frac{i\pi s}{2}} \hat{\zeta}(-x,s)\right) \tag{6}$$

$$\hat{\zeta}(x,s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)(e^{-i\pi s} - e^{i\pi s})} \left(e^{-i\pi s/2} \zeta(x,1-s) - e^{i\pi s/2} \zeta(-x,1-s)\right). \tag{7}$$

Rappelons maintenant les résultats concernant les valeurs spéciales de ζ et $\hat{\zeta}$ aux entiers. Les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ sont définis par

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

On a $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.

Pour $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $n \geq 2$, on a

$$\zeta(x,1-n) = -\frac{B_n(\{x\})}{n}.$$

On en déduit, pour $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $n \geq 2$:

$$\hat{\zeta}(x,n) + (-1)^n \hat{\zeta}(-x,n) = -\frac{(2i\pi)^n}{n!} B_n(\{x\}).$$

Pour $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on a

$$\zeta(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \{x\} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On déduit de la formule de Hurwitz que pour $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $x \neq 0$, on a

$$\hat{\zeta}(x,1) - \hat{\zeta}(-x,1) = 2i\pi \left(\frac{1}{2} - \{x\}\right) \tag{8}$$

$$\zeta^*(x,1) - \zeta^*(-x,1) = i\pi \frac{e^{2i\pi x} + 1}{e^{2i\pi x} - 1}. \tag{9}$$

Notons les relations suivantes : pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, avec $x \neq 0$ si $n = 1$, on a

$$\zeta(-x,1-n) = (-1)^n \zeta(x,1-n) \tag{10}$$

$$\hat{\zeta}(-x,1-n) = (-1)^n \hat{\zeta}(x,1-n). \tag{11}$$

Définition 2.2. — Pour $u \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, définissons les fonctions $\delta_u, \hat{\delta}_u : \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ par

$$\delta_u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv u \pmod N \\ 0 & \text{si } n \not\equiv u \pmod N \end{cases}$$

$$\hat{\delta}_u(n) = \sum_{x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \delta_u(x) \zeta_N^{-xn} = \zeta_N^{-un}.$$

3. Séries d'Eisenstein-Kronecker

Nous définissons dans cette section les séries d'Eisenstein-Kronecker classiques [**3**, §1.3], [**9**, §3], [**14**, Chap. VII], [**18**, Chap. VIII].

Pour $k \geq 0$ un entier, $\tau \in \mathcal{H}$, $z, u \in \mathbf{C}$, on pose

$$\mathcal{K}_k(s, \tau, z, u) = \frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^k} \left(\frac{\tau - \overline{\tau}}{2i\pi} \right)^{s-k} \sum_{\substack{\omega \in \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z} \\ \omega \neq -z}} \frac{\overline{\omega + z}^k}{|\omega + z|^{2s}} \exp\left(\frac{2i\pi(\omega\overline{u} - \overline{\omega}u)}{\tau - \overline{\tau}} \right).$$

Cette série converge pour $s \in \mathbf{C}$, $\Re(s) > 1 + \frac{k}{2}$ et possède un prolongement méromorphe au plan complexe, holomorphe sur $\mathbf{C}$ sauf éventuellement des pôles simples en $s = 0$ (si $k = 0$ et $z \in \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$) et en $s = 1$ (si $k = 0$ et $u \in \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$). La fonction $\mathcal{K}_k(s, \tau, z, u)$ est périodique en u de période $\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$, et vérifie

$$\mathcal{K}_k(s, \tau, z + \lambda, u) = \exp\left(\frac{2i\pi(\overline{\lambda}u - \lambda\overline{u})}{\tau - \overline{\tau}} \right) \mathcal{K}_k(s, \tau, z, u) \qquad (\lambda \in \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}).$$

En particulier la fonction $z \mapsto \mathcal{K}_k(s, \tau, z, 0)$ est $(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$-périodique. La fonction $\mathcal{K}_k$ vérifie l'équation fonctionnelle [**18**, Chap. VIII, (32)]

$$\mathcal{K}_k(s, \tau, z, u) = \exp\left(\frac{2i\pi(u\overline{z} - \overline{u}z)}{\tau - \overline{\tau}} \right) \mathcal{K}_k(k + 1 - s, \tau, u, z).$$

Pour $k \geq 1$, $N \geq 1$ un entier, $a, b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, $\tau \in \mathcal{H}$, on pose

$$E_{a,b}^{(k)}(\tau) = \mathcal{K}_k\left(k, \tau, \frac{a\tau + b}{N}, 0 \right) \qquad F_{a,b}^{(k)}(\tau) = \mathcal{K}_k\left(k, \tau, 0, \frac{a\tau + b}{N} \right).$$

Pour $\tau \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbf{Q}_{>0}$, on pose $q^\alpha = e^{2i\pi\alpha\tau}$.

Lemme 3.1. — *Supposons $k \geq 1$, $k \neq 2$. La fonction $E_{a,b}^{(k)}$ est une série d'Eisenstein de poids k pour le groupe $\Gamma(N)$, et son q-développement est donné par*

$$E_{a,b}^{(k)}(\tau) = a_0(E_{a,b}^{(k)}) + \sum_{\substack{m,n \geq 1 \\ m \equiv a(N)}} n^{k-1} \zeta_N^{bn} q^{mn/N} + (-1)^k \sum_{\substack{m,n \geq 1 \\ m \equiv -a(N)}} n^{k-1} \zeta_N^{-bn} q^{mn/N}$$

avec

$$a_0(E_{a,b}^{(1)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{1 + \zeta_N^b}{1 - \zeta_N^b} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \frac{1}{2} - \left\{ \frac{a}{N} \right\} & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

et pour $k \geq 3$,

$$a_0(E_{a,b}^{(k)}) = \begin{cases} \hat{\zeta}(\frac{b}{N}, 1 - k) & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Lemme 3.2. — *Supposons $k = 2$. La fonction $E_{a,b}^{(2)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{H}$. Elle est modulaire de poids 2 pour le groupe $\Gamma(N)$, et son développement de Fourier est donné par*

$$E_{a,b}^{(2)}(\tau) = a_0(E_{a,b}^{(2)}) + \frac{1}{4\pi\Im(\tau)} + \sum_{\substack{m,n \geq 1 \\ m \equiv a(N)}} n\zeta_N^{bn} q^{mn/N} + \sum_{\substack{m,n \geq 1 \\ m \equiv -a(N)}} n\zeta_N^{-bn} q^{mn/N}$$

avec

$$a_0(E_{a,b}^{(2)}) = \begin{cases} \hat{\zeta}(\frac{b}{N}, -1) & si\ a = 0, \\ -\frac{1}{12} & si\ a \neq 0. \end{cases}$$

En particulier $E_{a,b}^{(2)} - E_{0,0}^{(2)}$ *est une série d'Eisenstein de poids* 2 *pour le groupe* $\Gamma(N)$.

Lemme 3.3. — *Supposons* $k \geq 1$, *et* $(a,b) \neq (0,0)$ *dans le cas* $k = 2$. *La fonction* $F_{a,b}^{(k)}$ *est une série d'Eisenstein de poids* k *pour le groupe* $\Gamma(N)$, *et son* q*-développement est donné par*

$$F_{a,b}^{(k)} = a_0(F_{a,b}^{(k)}) + N^{1-k} \left(\sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ n\equiv a(N)}} \zeta_N^{bm} n^{k-1} q^{mn/N} + (-1)^k \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ n\equiv -a(N)}} \zeta_N^{-bm} n^{k-1} q^{mn/N} \right).$$

avec

$$a_0(F_{a,b}^{(1)}) = \begin{cases} 0 & si\ a = b = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{1+\zeta_N^b}{1-\zeta_N^b} & si\ a = 0\ \ et\ b \neq 0 \\ \frac{1}{2} - \{\frac{a}{N}\} & si\ a \neq 0 \end{cases}$$

et pour $k \geq 2$,

$$a_0(F_{a,b}^{(k)}) = \zeta(\frac{a}{N}, 1-k) = -\frac{B_k(\{\frac{a}{N}\})}{k}.$$

Lemme 3.4. — [**9**, Lemma 3.7 (1)(iii)] *Soit* $k \geq 1$ *un entier. Soit* $(a,b) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, *avec* $(a,b) \neq (0,0)$ *dans le cas* $k = 2$. *Alors pour tout* $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, *on a* $F_{a,b}^{(k)}|_k g = F_{(a,b)g}^{(k)}$.

Nous allons maintenant définir des séries d'Eisenstein dont le q-développement est *rationnel.*

Définition 3.5. — Pour $k \geq 1$, $a, b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, on pose

$$G_{a,b}^{(k)}(\tau) = a_0(G_{a,b}^{(k)}) + \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m\equiv a, n\equiv b(N)}} m^{k-1} q^{mn} + (-1)^k \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m\equiv -a, n\equiv -b(N)}} m^{k-1} q^{mn}$$

avec

$$a_0(G_{a,b}^{(1)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b = 0 \\ \frac{1}{2} - \{\frac{b}{N}\} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \frac{1}{2} - \{\frac{a}{N}\} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0, \end{cases}$$

et pour $k \geq 2$,

$$a_0(G_{a,b}^{(k)}) = \begin{cases} -N^{k-1}\frac{B_k(\{\frac{a}{N}\})}{k} & \text{si } b = 0 \\ 0 & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$$

Lemme 3.6. — *Soit* $k \geq 1$, *avec* $a \neq 0$ *si* $k = 2$. *Alors la fonction* $G_{a,b}^{(k)}(\tau/N)$ *est modulaire de poids* k *pour* $\Gamma(N)$.

Démonstration. — On vérifie l'identité

$$F_{a,b}^{(k)}(\tau) = N^{1-k} \sum_{c\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{bc} G_{a,c}^{(k)}(\tau/N).$$

Par inversion de Fourier, il vient

$$G_{a,b}^{(k)}(\tau/N) = N^{k-2} \sum_{c\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{-bc} F_{a,c}^{(k)}(\tau).$$

Le résultat suit alors du lemme 3.3. □

Lemme 3.7. — *Si* $G(\tau/N)$ *est modulaire de poids* k *pour le groupe* $\Gamma(N)$, *alors* $G(\tau)$ *est modulaire de poids* k *pour le groupe* $\Gamma_1(N^2)$.

Démonstration. — Cela résulte de l'inclusion $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1(N^2) \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \subset \Gamma(N)$. □

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 3.8. — *Soit $k \geq 1$, avec $a \neq 0$ si $k = 2$. Alors $G_{a,b}^{(k)}$ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_1(N^2)$.*

Rappelons que l'involution d'Atkin-Lehner W_N sur $M_k(\Gamma_1(N))$ est définie par

$$(W_N f)(\tau) = i^k N^{-k/2} \tau^{-k} f\left(-\frac{1}{N\tau}\right) \qquad (f \in M_k(\Gamma_1(N))).$$

Définition 3.9. — Pour $k \geq 1$, $a, b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, on pose

$$H_{a,b}^{(k)}(\tau) = a_0(H_{a,b}^{(k)}) + \sum_{m,n \geq 1} \left(\zeta_N^{-am-bn} + (-1)^k \zeta_N^{am+bn}\right) n^{k-1} q^{mn}$$

avec

$$a_0(H_{a,b}^{(1)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b = 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{1+\zeta_N^b}{1-\zeta_N^b} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{1+\zeta_N^a}{1-\zeta_N^a} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1+\zeta_N^a}{1-\zeta_N^a} + \frac{1+\zeta_N^b}{1-\zeta_N^b}\right) & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0, \end{cases}$$

et pour $k \geq 2$,

$$a_0(H_{a,b}^{(k)}) = \hat{\zeta}(-\frac{b}{N}, 1-k).$$

Notons l'identité $H_{-a,-b}^{(k)} = (-1)^k H_{a,b}^{(k)}$.

Lemme 3.10. — *Soit $k \geq 1$, $a, b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Dans le cas $k = 2$, supposons $a \neq 0$. Alors*

$$W_{N^2}(G_{a,b}^{(k)}) = \frac{i^k}{N} H_{a,b}^{(k)}.$$

En particulier $H_{a,b}^{(k)}$ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_1(N^2)$.

Démonstration. — Le cas $k = 1$ est traité dans [**2**, Lemma 13]. Supposons donc $k \geq 2$, avec $a \neq 0$ si $k = 2$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} W_{N^2}(G_{a,b}^{(k)})(\tau) &= i^k N^{-k} \tau^{-k} G_{a,b}^{(k)}(-\frac{1}{N^2\tau}) \\ &= i^k N^{-k} \tau^{-k} N^{k-2} \sum_{c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{-bc} F_{a,c}^{(k)}(-\frac{1}{N\tau}). \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.4, il vient

$$\begin{aligned} W_{N^2}(G_{a,b}^{(k)})(\tau) &= i^k N^{-k} \tau^{-k} N^{k-2} \sum_{c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{-bc} (N\tau)^k F_{c,-a}^{(k)}(N\tau) \\ &= i^k N^{k-2} \sum_{c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{-bc} F_{c,-a}^{(k)}(N\tau) \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Fourier de $F^{(k)}$ (lemme 3.3), on obtient

$$\begin{aligned} W_{N^2}(G_{a,b}^{(k)})(\tau) &= i^k N^{k-2} \sum_{c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{-bc} a_0(F_{c,-a}^{(k)}) \\ &\quad + i^k N^{k-2} \sum_{c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{-bc} N^{1-k} \sum_{m,n \geq 1} \big(\hat{\delta}_a(m)\delta_c(n) + (-1)^k \hat{\delta}_{-a}(m)\delta_{-c}(n)\big) n^{k-1} q^{mn} \\ &= i^k N^{k-2} \sum_{c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{-bc} \zeta(\frac{c}{N}, 1-k) \\ &\quad + \frac{i^k}{N} \sum_{m,n \geq 1} \big(\hat{\delta}_a(m)\hat{\delta}_b(n) + (-1)^k \hat{\delta}_{-a}(m)\hat{\delta}_{-b}(n)\big) n^{k-1} q^{mn} \\ &= \frac{i^k}{N} \left(\hat{\zeta}(-\frac{b}{N}, 1-k) + \sum_{m,n \geq 1} \big(\hat{\delta}_a(m)\hat{\delta}_b(n) + (-1)^k \hat{\delta}_{-a}(m)\hat{\delta}_{-b}(n)\big) n^{k-1} q^{mn} \right). \end{aligned}$$

□

Dans le cas du poids 2, on a également les résultats suivants.

Lemme 3.11. — *Soient $b, b' \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. La fonction $G_{0,b'}^{(2)}(\tau/N) - G_{0,b}^{(2)}(\tau/N)$ est une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma(N)$. En particulier $G_{0,b'}^{(2)} - G_{0,b}^{(2)}$ est modulaire pour $\Gamma_1(N^2)$. De plus on a*

$$W_{N^2}\big(G_{0,b'}^{(2)} - G_{0,b}^{(2)}\big) = -\frac{1}{N}\big(H_{0,b'}^{(2)} - H_{0,b}^{(2)}\big). \tag{12}$$

En particulier $H_{0,b'}^{(2)} - H_{0,b}^{(2)}$ est une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma_1(N^2)$.

Démonstration. — Le caractère modulaire de $G_{0,b'}^{(2)} - G_{0,b}^{(2)}$ résulte de la formule explicite

$$G_{0,b'}^{(2)}(\tau/N) - G_{0,b}^{(2)}(\tau/N) = \sum_{\substack{c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \\ c \neq 0}} (\zeta_N^{-b'c} - \zeta_N^{-bc}) F_{0,c}^{(2)}(\tau).$$

Un calcul analogue au lemme 3.10 mène alors à (12). □

Pour terminer cette section, nous déterminons la fonction L associée à $H_{a,b}^{(k)}$ (voir [**9**, 3.10] pour le cas des séries $E_{a,b}^{(k)}$ et $F_{a,b}^{(k)}$).

Rappelons que si $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n$ est une forme modulaire de poids $k \geq 1$ pour $\Gamma_1(N)$, alors la fonction L de f est définie par $L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) n^{-s}$ pour $\Re(s) > k$.

Définition 3.12. — Pour $f \in M_k(\Gamma_1(N))$, on pose $f^* = f - a_0(f)$.

La fonction L complétée de f est définie par

$$\Lambda(f,s) := N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s) = N^{s/2} \int_0^{\infty} f^*(iy) y^s \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f,s) = \Lambda(W_N f, k-s) \qquad (f \in M_k(\Gamma_1(N))).$$

De plus, la fonction $\Lambda(f,s) + \frac{a_0(f)}{s} + \frac{a_0(W_N f)}{k-s}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ [**11**, Thm 4.3.5].

Définition 3.13. — Les valeurs régularisées de $\Lambda(f,s)$ en $s=0$ et $s=k$ sont définies par

$$\Lambda^*(f,0) := \lim_{s \to 0} \left(\Lambda(f,s) + \frac{a_0(f)}{s} \right)$$

$$\Lambda^*(f,k) := \lim_{s \to k} \left(\Lambda(f,s) + \frac{a_0(W_N f)}{k-s} \right).$$

Notons que $\Lambda^*(f,k) = \Lambda^*(W_N f, 0)$ pour tout $f \in M_k(\Gamma_1(N))$.

Lemme 3.14. — *Soit $k \geq 1$ et $a, b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, avec $a \neq 0$ si $k = 2$. Alors*

$$\Lambda(H^{(k)}_{a,b}, s) = N^s (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left(\hat{\zeta}(-\frac{a}{N}, s) \hat{\zeta}(-\frac{b}{N}, s-k+1) + (-1)^k \hat{\zeta}(\frac{a}{N}, s) \hat{\zeta}(\frac{b}{N}, s-k+1) \right).$$

Dans le cas $k = 2$, soient $b, b' \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Alors

$$\Lambda(H^{(2)}_{0,b'} - H^{(2)}_{0,b}, s) = N^s (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) \left(\hat{\zeta}(\frac{b'}{N}, s-1) + \hat{\zeta}(-\frac{b'}{N}, s-1) - \hat{\zeta}(\frac{b}{N}, s-1) - \hat{\zeta}(-\frac{b}{N}, s-1) \right)$$

Démonstration. — Cela résulte des définitions. □

4. Cycles de Shokurov

Soit $N \geq 3$ un entier. Soit $Y(N)$ le courbe modulaire de niveau N définie sur $\mathbf{Q}$, et soit E la courbe elliptique universelle au-dessus de $Y(N)$. Fixons un entier $n \geq 0$. Notons E^n la puissance fibrée n-ième de E au-dessus de $Y(N)$. C'est une variété abélienne de dimension relative n sur $Y(N)$. Les points complexes de E^n sont décrits par l'isomorphisme [**4**, (3.6)]

$$E^n(\mathbf{C}) = (\mathbf{Z}^{2n} \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})) \backslash (\mathcal{H} \times \mathbf{C}^n \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})).$$

On note $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $0 \leq j \leq n$, on définit le *cycle de Shokurov*

$$X^j Y^{n-j} \{0, \infty\} = \{(iy; it_1 y, \ldots, it_j y, t_{j+1}, \ldots, t_n; \sigma) : y > 0, t_1, \ldots, t_n \in [0,1]\}.$$

C'est un $(n+1)$-cycle sur $E^n(\mathbf{C})$, muni de l'orientation produit. Il est naturellement fibré au-dessus du symbole modulaire $\{0, \infty\}$. Notons $f_j : X^j Y^{n-j}\{0, \infty\} \to \{0, \infty\}$ cette fibration.

Définition 4.1. — Pour $y > 0$, on note $\gamma_{y,j}$ la fibre de f_j au-dessus du point iy.

On a donc

$$\gamma_{y,j} = \{(iy, it_1 y, \ldots, it_j y, t_{j+1}, \ldots, t_n, \sigma) : t_1, \ldots, t_n \in [0,1]\}.$$

5. Symbole d'Eisenstein

On note $X(N)$ la compactification de $Y(N)$, et on note $X^\infty = X(N) - Y(N)$ l'ensemble des pointes de $X(N)$, vu comme sous-schéma fermé de $X(N)$. On a une bijection

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\cong} X^\infty \\ [g] &\mapsto g\infty \end{aligned}$$

où P est le sous-groupe algébrique de SL_2 formé des matrices de la forme $\pm \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit

$$\mathbf{Q}[X^\infty]^{(n)} = \left\{ f : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \to \mathbf{Q} : f\left(\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) = f(g) = (-1)^n f(-g) \right\}.$$

Ce groupe est (non canoniquement) isomorphe au groupe des diviseurs sur X^∞.

Fixons un entier $n \geq 0$. On dispose d'une application résidu

$$\mathrm{Res}^n : H^{n+1}_{\mathcal{M}}(E^n, \mathbf{Q}(n+1)) \to \mathbf{Q}[X^\infty]^{(n)}.$$

généralisant l'application diviseur pour $n = 0$. Notons V_0 le sous-groupe de $\mathbf{Q}[X^\infty]^{(0)}$ formé des diviseurs de degré 0, et notons $V_n = \mathbf{Q}[X^\infty]^{(n)}$ pour $n \geq 1$. L'image de l'application Res^n est égale à V_n (généralisation du théorème de Manin-Drinfeld). Le *symbole d'Eisenstein*, construit par Beilinson, est une application canonique

$$\text{Б}^n : V_n \to H^{n+1}_{\mathcal{M}}(E^n, \mathbf{Q}(n+1))$$

telle que $\mathrm{Res}^n \circ \text{Б}^n = \mathrm{id}_{V_n}$.

Notons $\omega^n : \mathbf{Q}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2] \to \mathbf{Q}[X^\infty]^{(n)}$ l'application horosphérique, définie par

$$\omega^n(\phi)(g) = \sum_{v\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2} \phi(g^{-1}v) B_{n+2}(\{\frac{v_2}{N}\})$$

Dans le cas $n=0$, l'application ω^0 induit une surjection de $\mathbf{Q}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2\backslash\{0\}]$ dans V_0 ; dans le cas $n \geq 1$, l'application ω^n est surjective [**13**, 7.5] (la preuve donnée dans cet article marche également pour $n=0$).

Définition 5.1. — Soit $u \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. Dans le cas $n=0$, on suppose $u \neq 0$. On définit

$$\mathrm{Eis}^n(u) = \text{Б}^n \circ \omega^n(\phi_u) \in H^{n+1}_{\mathcal{M}}(E^n, \mathbf{Q}(n+1)) \tag{13}$$

où ϕ_u est la fonction caractéristique de $\{u\}$.

Notons que $\mathrm{Eis}^0(u)$ n'est autre que l'unité de Siegel $g_u \otimes \frac{2}{N}$ [**9**, §1].

Par définition, on a $\mathrm{Res}^n(\mathrm{Eis}^n(u)) = \omega^n(\phi_u)$; l'application horosphérique donne donc les résidus des symboles d'Eisenstein.

Le groupe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ agit à gauche sur E^n. Sur les points complexes, cette action est induite par $\gamma\cdot(\tau,z,g) = (\tau,z,g^t\gamma)$. On en déduit une action à droite de G sur $H^{n+1}_{\mathcal{M}}(E^n,\mathbf{Q}(n+1))$. Les applications Res^n et Б^n étant G-équivariantes, on a le lemme suivant.

Lemme 5.2. — *Pour tout $g \in G$, et pour tout $u \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ (avec $u \neq 0$ si $n=0$), on a*

$$g^* \,\mathrm{Eis}^n(u) = \mathrm{Eis}^n(ug). \tag{14}$$

Dans la suite de cette section, nous rappelons la description explicite de la réalisation du symbole d'Eisenstein en cohomologie de Deligne [**1, 4, 5**].

Commençons par quelques rappels sur la cohomologie de Deligne $H^i_{\mathcal{D}}(X/\mathbf{R},\mathbf{R}(j))$ associée à un schéma X lisse et quasi-projectif sur $\mathbf{R}$. Notons $\mathcal{S}^\cdot(X,\mathbf{R}(n))$ le complexe des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur $X(\mathbf{C})$ à valeurs dans $\mathbf{R}(n) = (2i\pi)^n\mathbf{R}$ vérifiant $c^*\omega = (-1)^n\omega$, où c désigne la conjugaison complexe sur $X(\mathbf{C})$. Par la résolution des singularités, il existe une compactification lisse $\overline{X}$ de X telle que $X^\infty := \overline{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux. Pour un entier $m \geq 0$, notons $\Omega^m_{\overline{X}}\langle X^\infty\rangle$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des m-formes holomorphes sur $X(\mathbf{C})$ à singularités logarithmiques le long de $X^\infty(\mathbf{C})$. Pour toute forme différentielle α et tout entier $n \in \mathbf{Z}$, notons $\pi_n(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + (-1)^n\overline{\alpha})$.

Proposition 5.3. — [**5**, (2.5.1)] *Pour tout entier $n \geq 0$, on a un isomorphisme*

$$H^{n+1}_{\mathcal{D}}(X/\mathbf{R},\mathbf{R}(n+1)) \cong \frac{\{\phi \in \mathcal{S}^n(X,\mathbf{R}(n)) | d\phi = \pi_n(\omega) \text{ avec } \omega \in \Omega^{n+1}_{\overline{X}}\langle X^\infty\rangle\}}{d\mathcal{S}^{n-1}(X,\mathbf{R}(n))}.$$

Pour décrire la réalisation du symbole d'Eisenstein en cohomologie de Deligne, considérons maintenant l'application régulateur notée $r_{\text{Б},\mathrm{Eis}}$, définie par Beilinson

$$r_{\text{Б},\mathrm{Eis}} : H^{n+1}_{\mathcal{M}}(E^n,\mathbf{Q}(n+1)) \to H^{n+1}_{\mathcal{D}}(E^n/\mathbf{R},\mathbf{R}(n+1)).$$

D'après la proposition 5.3, les éléments de $H^{n+1}_{\mathcal{D}}(E^n/\mathbf{R},\mathbf{R}(n+1))$ sont représentés par des n-formes différentielles sur $E^n(\mathbf{C})$. Nous noterons $(\tau;z_1,\ldots,z_n;g)$ les coordonnées naturelles sur $E^n(\mathbf{C})$, avec $\tau \in \mathcal{H}$, $z_i \in \mathbf{C}$, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, et nous poserons $q = e^{2i\pi\tau}$. Pour tous entiers $a,b \geq 0$ tels que $a+b=n$, définissons la n-forme différentielle sur $\mathbf{C}^n$

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) d\overline{z}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{\sigma(b)} \wedge dz_{\sigma(b+1)} \wedge \cdots \wedge dz_{\sigma(n)}.$$

D'après [**4**, (3.12), (3.28)] et [**8**, Remark after Lemma 7.1], on a la proposition suivante.

Proposition 5.4. — *Soit $u \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, avec $u \neq 0$ dans le cas $n=0$. L'élément $r_{\text{Б},\mathrm{Eis}}(\mathrm{Eis}^n(u))$ est représenté par une n-forme différentielle $\mathrm{Eis}^n_{\mathcal{D}}(u)$ vérifiant*

$$\mathrm{Eis}^n_{\mathcal{D}}(u) = -\frac{n!(n+2)}{2i\pi N}\frac{\tau-\overline{\tau}}{2}\sum_{a=0}^{n}\left(\sideset{}{'}\sum_{(c,d)\in\mathbf{Z}^2} \frac{\zeta_N^{c(gu)_1+d(gu)_2}}{(c\tau+d)^{a+1}(c\overline{\tau}+d)^{n+1-a}}\right)\psi_{a,n-a} \mod d\tau, d\overline{\tau}.$$

De plus, on a

$$\mathrm{d}\,\mathrm{Eis}^n_{\mathcal{D}}(u) = \pi_n(\mathrm{Eis}^n_{\mathrm{hol}}(u))$$

où $\mathrm{Eis}^n_{\mathrm{hol}}(u)$ *est la série d'Eisenstein holomorphe de poids* $n+2$ *définie par*

$$\mathrm{Eis}^n_{\mathrm{hol}}(u) = -\frac{(n+2)!}{(2i\pi)^2 N} \sum_{(c,d)\in\mathbf{Z}^2}{}' \frac{\zeta_N^{c(gu)_1+d(gu)_2}}{(c\tau+d)^{n+2}} \frac{dq}{q} \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

Remarque 5.5. — Pour $n=0$, les séries intervenant dans $\mathrm{Eis}^0_{\mathcal{D}}(u)$ et $\mathrm{Eis}^0_{\mathrm{hol}}(u)$ ne convergent pas absolument et on a recours à la sommation d'Eisenstein ou de Kronecker pour leur donner un sens [**18**, Chap. VIII, §9].

6. Éléments de Deninger-Scholl

Dans cette section, nous rappelons la définition des éléments de Deninger-Scholl et calculons explicitement leurs réalisations en cohomologie de Deligne.

Soit $k \geq 0$ un entier. On choisit une décomposition $k = k_1 + k_2$ avec $k_1, k_2 \geq 0$. Considérons les projections canoniques $p_1 : E^{k_1+k_2} \to E^{k_1}$ et $p_2 : E^{k_1+k_2} \to E^{k_2}$. Les éléments suivants, définis par Gealy dans [**7**], sont une généralisation des éléments de Beilinson-Kato et Deninger-Scholl.

Définition 6.1. — Soient $u_1, u_2 \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. Dans le cas où $k_i = 0$, on suppose $u_i \neq 0$. On pose

(15) $$\mathrm{Eis}^{k_1,k_2}(u_1,u_2) = p_1^* \mathrm{Eis}^{k_1}(u_1) \cup p_2^* \mathrm{Eis}^{k_2}(u_2) \in H^{k+2}_{\mathcal{M}}(E^k, \mathbf{Q}(k+2)).$$

Dans le cas $k=0$, on retrouve les éléments de Beilinson-Kato dans le K_2 de la courbe modulaire $Y(N)$ [**9**]. Notons également la relation $\mathrm{Eis}^{0,k}(u_2,u_1) = (-1)^{k+1}\mathrm{Eis}^{k,0}(u_1,u_2)$, qui découle du caractère commutatif gradué du cup-produit [**5**, (1.3) Thm (2)].

Pour décrire la réalisation de ces éléments en cohomologie de Deligne, considérons le régulateur de Beilinson

$$r_{\mathcal{B}} : H^{k+2}_{\mathcal{M}}(E^k, \mathbf{Q}(k+2)) \to H^{k+2}_{\mathcal{D}}(E^k/\mathbf{R}, \mathbf{R}(k+2)).$$

Les éléments de $H^{k+2}_{\mathcal{D}}(E^k/\mathbf{R}, \mathbf{R}(k+2))$ sont représentés par des $(k+1)$-formes différentielles fermées sur $E^k(\mathbf{C})$. En effet, comme E^k est de dimension $k+1$, il n'y a pas de $(k+2)$-forme holomorphe sur $E^k(\mathbf{C})$, et la proposition 5.3 entraîne un isomorphisme

$$H^{k+2}_{\mathcal{D}}(E^k/\mathbf{R}, \mathbf{R}(k+2)) \cong H^{k+1}(\mathcal{S}^{\cdot}(E^k/\mathbf{R}, \mathbf{R}(k+1))).$$

Lemme 6.2. — *L'élément* $r_{\mathcal{B}}(\mathrm{Eis}^{k_1,k_2}(u_1,u_2))$ *est représenté par la forme différentielle fermée*

(16) $$\begin{aligned}\mathrm{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2) = {} & p_1^* \mathrm{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \mathrm{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2)) \\ & + (-1)^{k_1+1} \pi_{k_1+1}(p_1^* \mathrm{Eis}^{k_1}_{\mathrm{hol}}(u_1)) \wedge p_2^* \mathrm{Eis}^{k_2}_{\mathcal{D}}(u_2).\end{aligned}$$

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 5.4 et de la formule pour le cup-produit en cohomologie de Deligne [**5**, (2.5)]. □

7. La méthode de Rogers-Zudilin

Rogers et Zudilin [**12**] ont introduit une nouvelle méthode permettant de calculer certaines mesures de Mahler en termes de valeurs de fonctions L. Cette méthode est basée sur un changement de variables astucieux dans une intégrale le long du symbole modulaire $\{0,\infty\}$. Dans cette section, nous expliquons cette méthode dans un cadre assez général (voir également l'interprétation proposée dans [**6**]). L'identité obtenue (Proposition 7.2) est la clé de notre calcul du régulateur.

Introduisons, pour des fonctions $\alpha, \beta : \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ et des nombres complexes $t, u \in \mathbf{C}$, la série suivante

(17) $$S^{t,u}_{\alpha,\beta}(\tau) = \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \alpha(m)\beta(n) m^t n^u q^{mn/N} \qquad (q = e^{2i\pi\tau}).$$

Cette série définit une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$.

Lemme 7.1. — *Pour $s \in \mathbf{C}$, $\Re(s) \gg 0$, la fonction $y \mapsto S^{t,u}_{\alpha,\beta}(iy)y^{s-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et on a*

$$\int_0^\infty S^{t,u}_{\alpha,\beta}(iy)y^s \frac{\mathrm{d}y}{y} = (\frac{2\pi}{N})^{-s}\Gamma(s)L(\alpha,s-t)L(\beta,s-u)$$

Pour $s \in \mathbf{C}$, $\Re(s) \ll 0$, la fonction $y \mapsto S^{t,u}_{\alpha,\beta}(\frac{i}{y})y^{s-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et on a

$$\int_0^\infty S^{t,u}_{\alpha,\beta}(\frac{i}{y})y^s \frac{\mathrm{d}y}{y} = (\frac{2\pi}{N})^{s}\Gamma(-s)L(\alpha,-s-t)L(\beta,-s-u)$$

Démonstration. — (Voir [**6**, §3].) La fonction $S^{t,u}_{\alpha,\beta}(iy)$ décroît exponentiellement lorsque $y \to +\infty$, et croît au plus polynomialement en $\frac{1}{y}$ lorsque $y \to 0$. La première intégrale converge donc pour $\Re(s) \gg 0$, et une simple interversion somme-intégrale mène alors au résultat. La seconde assertion résulte d'un calcul similaire. □

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition-clé à la base de la méthode de Rogers-Zudilin.

Proposition 7.2. — *Soient $t_1,u_1,t_2,u_2,s \in \mathbf{C}$ des nombres complexes, et soient $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2 : \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ des fonctions. On a*

$$\int_0^\infty S^{t_1,u_1}_{\alpha_1,\beta_1}\left(\frac{i}{y}\right) S^{t_2,u_2}_{\alpha_2,\beta_2}(iy)y^s\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_0^\infty S^{t_1+s,t_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(iy) S^{u_1,u_2-s}_{\beta_1,\beta_2}\left(\frac{i}{y}\right) y^s \frac{\mathrm{d}y}{y}. \tag{18}$$

Démonstration. — Voir [**6**, Thm 3.2]. □

8. Quelques développements de Fourier

Dans cette section, nous calculons le développement de Fourier de la réalisation du symbole d'Eisenstein en cohomologie de Deligne. Commençons par rappeler le développement de Fourier de $\mathrm{Eis}^n_{\mathrm{hol}}(u)$, qui a en fait déjà été déterminé dans la section 3.

Proposition 8.1. — *Soit $n \geq 0$ un entier, et soit $u \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ (avec $u \neq 0$ si $n = 0$). Alors*

$$\mathrm{Eis}^n_{\mathrm{hol}}(u) = (-1)^{n+1}\frac{n+2}{N}(2i\pi)^n F^{(n+2)}_{\sigma g u}(\tau)\frac{\mathrm{d}q}{q} \wedge \mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n.$$

Démonstration. — Par définition, on a

$$\begin{aligned}\sum_{(c,d)\in\mathbf{Z}^2}{}' \frac{\zeta_N^{c(gu)_1+d(gu)_2}}{(c\tau+d)^{n+2}} &= \frac{(-2i\pi)^{n+2}}{(n+1)!}\mathcal{K}_{n+2}\left(n+2,\tau,0,\frac{-(gu)_2\tau+(gu)_1}{N}\right)\\ &= \frac{(-2i\pi)^{n+2}}{(n+1)!}F^{(n+2)}_{-(gu)_2,(gu)_1}(\tau)\\ &= \frac{(-2i\pi)^{n+2}}{(n+1)!}F^{(n+2)}_{\sigma g u}(\tau).\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. □

La forme différentielle $\mathrm{Eis}^n_{\mathcal{D}}(u)$ étant invariante par $\tau \mapsto \tau + N$, elle possède un développement de Fourier en la variable $q^{1/N} = e^{2i\pi\tau/N}$.

Introduisons, pour des entiers $a,b \geq 0$, et $u = (u_1,u_2) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$, les séries d'Eisenstein analytiques-réelles suivantes

$$E^{a,b}_u(\tau) = \sum_{(m,n)\equiv(u_1,u_2)(N)}{}' \frac{1}{(m\tau+n)^{a+1}(m\overline{\tau}+n)^{b+1}} \qquad (\tau \in \mathcal{H}).$$

$$F^{a,b}_u(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}{}' \frac{\zeta_N^{mu_1+nu_2}}{(m\tau+n)^{a+1}(m\overline{\tau}+n)^{b+1}} \qquad (\tau \in \mathcal{H}).$$

On a donc

(19)
$$F_u^{a,b} = \sum_{x,y \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \zeta_N^{xu_1+yu_2} E_{(x,y)}^{a,b}.$$

D'après la proposition 5.4 et la définition de $F_u^{a,b}$, on a

(20)
$$\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^n(u) = -\frac{n!(n+2)}{2i\pi N}\frac{\tau-\overline{\tau}}{2}\sum_{a=0}^n F_{gu}^{a,n-a}(\tau)\psi_{a,n-a} \mod \mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\overline{\tau}.$$

Pour des entiers $k,\ell \in \mathbf{Z}$ et des fonctions $\alpha,\beta : \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$, nous poserons également

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}^{k,\ell}(\tau) = \overline{S_{\alpha,\beta}^{k,\ell}(\tau)} = \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\overline{\alpha}(m)\overline{\beta}(n)m^k n^\ell \overline{q}^{mn/N}.$$

Proposition 8.2. — *Pour $a,b \geq 0$ et $u_1,u_2 \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, on a*

(21)
$$\begin{aligned}
E_{(u_1,u_2)}^{a,b}(\tau) = \delta_0(u_1)N^{-a-b-2}&\left(\zeta\left(\frac{u_2}{N},a+b+2\right)+(-1)^{a+b}\zeta\left(-\frac{u_2}{N},a+b+2\right)\right)\\
&+(-1)^b\frac{2i\pi}{N^{a+b+2}}\binom{a+b}{a}\left(\zeta\left(\frac{u_1}{N},a+b+1\right)+(-1)^{a+b}\zeta\left(-\frac{u_1}{N},a+b+1\right)\right)(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1}\\
&+\frac{(-1)^{b+1}}{b!}\sum_{j=0}^a\frac{(a+b-j)!}{j!(a-j)!}\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)^{j+1}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j}\left(S_{\delta_{u_1},\hat{\delta}_{-u_2}}^{j-a-b-1,j}(\tau)+(-1)^{a+b}S_{\delta_{-u_1},\hat{\delta}_{u_2}}^{j-a-b-1,j}(\tau)\right)\\
&+\frac{(-1)^{b+1}}{a!}\sum_{j=0}^b\frac{(a+b-j)!}{j!(b-j)!}\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)^{j+1}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j}\left(\overline{S}_{\delta_{u_1},\hat{\delta}_{-u_2}}^{j-a-b-1,j}(\tau)+(-1)^{a+b}\overline{S}_{\delta_{-u_1},\hat{\delta}_{u_2}}^{j-a-b-1,j}(\tau)\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. — On suit la méthode classique [**14**, Chap III, §2] pour déterminer le développement de Fourier des séries d'Eisenstein. Pour $a,b \geq 0$, $\tau \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, posons

$$\phi_{a,b,\tau}(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(\tau+n+x)^{a+1}(\overline{\tau}+n+x)^{b+1}}$$

Cette série converge et définit une fonction 1-périodique de x. Rappelons le calcul classique de son développement de Fourier

$$\phi_{a,b,\tau}(x) = \sum_{r\in\mathbf{Z}} c_r(\phi_{a,b,\tau})e^{2i\pi rx}.$$

Lemme 8.3. — *On a*

$$c_r(\phi_{a,b,\tau}) = \begin{cases}
\frac{(-1)^b}{b!}2i\pi\sum_{j=0}^a(-1)^j\frac{(a+b-j)!}{j!(a-j)!}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j}(2i\pi r)^j e^{2i\pi r\tau} & \text{si } \tau\in\mathcal{H}, r\geq 1,\\
\frac{(-1)^b}{a!}2i\pi\sum_{j=0}^b\frac{(a+b-j)!}{j!(b-j)!}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j}(2i\pi r)^j e^{2i\pi r\overline{\tau}} & \text{si } \tau\in\mathcal{H}, r\leq -1,\\
(-1)^b 2i\pi\binom{a+b}{a}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1} & \text{si } \tau\in\mathcal{H}, r=0,\\
(-1)^{a+b}c_{-r}(\phi_{a,b,-\tau}) & \text{si } \tau\in-\mathcal{H}.
\end{cases}$$

Démonstration. — Voir [**15**, Lemma 1] et [**17**, Lemma 5]. □

Exprimons maintenant $E_u^{a,b}$ en termes de $\phi_{a,b,\tau}$. On a

$$\begin{aligned}
E^{a,b}_{(u_1,u_2)}(\tau) &= \delta_{u_1=0} \sum_{n\equiv u_2(N)}{}' \frac{1}{n^{a+b+2}} + \sum_{\substack{m\equiv u_1(N)\\ m\neq 0}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(m\tau+u_2+Nn)^{a+1}(m\overline{\tau}+u_2+Nn)^{b+1}} \\
&= \delta_{u_1=0} \left(\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv u_2(N)}} \frac{1}{n^{a+b+2}} + \sum_{\substack{n\leq -1\\ n\equiv u_2(N)}} \frac{1}{n^{a+b+2}} \right) + N^{-a-b-2} \sum_{\substack{m\equiv u_1(N)\\ m\neq 0}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(\frac{m\tau+u_2}{N}+n)^{a+1}(\frac{m\overline{\tau}+u_2}{N}+n)^{b+1}} \\
&= \delta_{u_1=0} \left(\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv u_2(N)}} \frac{1}{n^{a+b+2}} + (-1)^{a+b} \sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv -u_2(N)}} \frac{1}{n^{a+b+2}} \right) + N^{-a-b-2} \sum_{\substack{m\equiv u_1(N)\\ m\neq 0}} \phi_{a,b,\frac{m\tau+u_2}{N}}(0) \\
&= \delta_{u_1=0} N^{-a-b-2} \left(\sum_{\substack{x>0\\ x\equiv \frac{u_2}{N}(1)}} \frac{1}{x^{a+b+2}} + (-1)^{a+b} \sum_{\substack{x>0\\ x\equiv -\frac{u_2}{N}(1)}} \frac{1}{x^{a+b+2}} \right) + N^{-a-b-2} \sum_{\substack{m\equiv u_1(N)\\ m\neq 0}} \sum_{r\in\mathbf{Z}} c_r(\phi_{a,b,\frac{m\tau+u_2}{N}}) \\
&= \delta_{u_1=0} N^{-a-b-2} \left(\zeta\left(\frac{u_2}{N}, a+b+2\right) + (-1)^{a+b} \zeta\left(-\frac{u_2}{N}, a+b+2\right) \right) \\
&\quad + N^{-a-b-2} \left(\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv u_1(N)}} \sum_{r\in\mathbf{Z}} c_r(\phi_{a,b,\frac{m\tau+u_2}{N}}) + (-1)^{a+b} \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv -u_1(N)}} \sum_{r\in\mathbf{Z}} c_r(\phi_{a,b,\frac{m\tau-u_2}{N}}) \right)
\end{aligned}$$

On distingue ensuite suivant la valeur de r, ce qui donne

$$\begin{aligned}
E^{a,b}_{(u_1,u_2)}(\tau) &= \delta_{u_1=0} N^{-a-b-2} \left(\zeta\left(\frac{u_2}{N}, a+b+2\right) + (-1)^{a+b} \zeta\left(-\frac{u_2}{N}, a+b+2\right) \right) \\
&\quad + N^{-a-b-2} \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv u_1(N)}} (-1)^b 2i\pi \binom{a+b}{a} \left(\frac{m\tau - m\overline{\tau}}{N} \right)^{-a-b-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ (-1)^{a+b} N^{-a-b-2} \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv -u_1(N)}} (-1)^b 2i\pi \binom{a+b}{a} \left(\frac{m\tau - m\overline{\tau}}{N} \right)^{-a-b-1} \\
&+ N^{-a-b-2} \left(\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv u_1(N)}} \sum_{r\geq 1} c_r(\phi_{a,b,\frac{m\tau+u_2}{N}}) + (-1)^{a+b} \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv -u_1(N)}} \sum_{r\geq 1} c_r(\phi_{a,b,\frac{m\tau-u_2}{N}}) \right) \\
&+ N^{-a-b-2} \left(\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv u_1(N)}} \sum_{r\leq -1} c_r(\phi_{a,b,\frac{m\tau+u_2}{N}}) + (-1)^{a+b} \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv -u_1(N)}} \sum_{r\leq -1} c_r(\phi_{a,b,\frac{m\tau-u_2}{N}}) \right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression des coefficients de Fourier de $\phi_{a,b,\tau}$, il vient

$$\begin{aligned}
E^{a,b}_{(u_1,u_2)}(\tau) &= \delta_{u_1=0} N^{-a-b-2}\left(\zeta\left(\frac{u_2}{N}, a+b+2\right) + (-1)^{a+b}\zeta\left(-\frac{u_2}{N}, a+b+2\right)\right)\\
&+ (-1)^b \frac{2i\pi}{N^{a+b+2}}\binom{a+b}{a}\left(\zeta\left(\frac{u_1}{N}, a+b+1\right) + (-1)^{a+b}\zeta\left(-\frac{u_1}{N}, a+b+1\right)\right)(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1}\\
&+ N^{-a-b-2}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv u_1(N)}}\sum_{r\geq 1}\frac{(-1)^b}{b!}2i\pi\sum_{j=0}^{a}(-1)^j\frac{(a+b-j)!}{j!(a-j)!}\left(\frac{m(\tau-\overline{\tau})}{N}\right)^{-a-b-1+j}(2i\pi r)^j e^{2i\pi r\frac{m\tau+u_2}{N}}\\
&+ \frac{(-1)^{a+b}}{N^{a+b+2}}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv -u_1(N)}}\sum_{r\geq 1}\frac{(-1)^b}{b!}2i\pi\sum_{j=0}^{a}(-1)^j\frac{(a+b-j)!}{j!(a-j)!}\left(\frac{m(\tau-\overline{\tau})}{N}\right)^{-a-b-1+j}(2i\pi r)^j e^{2i\pi r\frac{m\tau-u_2}{N}}\\
&+ N^{-a-b-2}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv u_1(N)}}\sum_{r\leq -1}\frac{(-1)^b}{a!}2i\pi\sum_{j=0}^{b}\frac{(a+b-j)!}{j!(b-j)!}\left(\frac{m(\tau-\overline{\tau})}{N}\right)^{-a-b-1+j}(2i\pi r)^j e^{2i\pi r(\frac{m\overline{\tau}+u_2}{N})}\\
&+ \frac{(-1)^{a+b}}{N^{a+b+2}}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv -u_1(N)}}\sum_{r\leq -1}\frac{(-1)^b}{a!}2i\pi\sum_{j=0}^{b}\frac{(a+b-j)!}{j!(b-j)!}\left(\frac{m(\tau-\overline{\tau})}{N}\right)^{-a-b-1+j}(2i\pi r)^j e^{2i\pi r(\frac{m\overline{\tau}-u_2}{N})}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
E^{a,b}_{(u_1,u_2)}(\tau) &= \delta_{u_1=0} N^{-a-b-2}\left(\zeta\left(\frac{u_2}{N}, a+b+2\right) + (-1)^{a+b}\zeta\left(-\frac{u_2}{N}, a+b+2\right)\right)\\
&+ (-1)^b \frac{2i\pi}{N^{a+b+2}}\binom{a+b}{a}\left(\zeta\left(\frac{u_1}{N}, a+b+1\right) + (-1)^{a+b}\zeta\left(-\frac{u_1}{N}, a+b+1\right)\right)(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1}\\
&+ \frac{(-1)^{b+1}}{b!}\sum_{j=0}^{a}\frac{(a+b-j)!}{j!(a-j)!}\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)^{j+1}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv u_1(N)}}\sum_{r\geq 1} m^{-a-b-1+j} r^j \zeta_N^{ru_2} q^{\frac{mr}{N}}\\
&+ \frac{(-1)^{a+1}}{b!}\sum_{j=0}^{a}\frac{(a+b-j)!}{j!(a-j)!}\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)^{j+1}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv -u_1(N)}}\sum_{r\geq 1} m^{-a-b-1+j} r^j \zeta_N^{-ru_2} q^{\frac{mr}{N}}\\
&+ \frac{(-1)^{b+1}}{a!}\sum_{j=0}^{b}\frac{(a+b-j)!}{j!(b-j)!}\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)^{j+1}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv u_1(N)}}\sum_{r\geq 1} m^{-a-b-1+j} r^j \zeta_N^{-ru_2} \overline{q}^{\frac{mr}{N}}\\
&+ \frac{(-1)^{a+1}}{a!}\sum_{j=0}^{b}\frac{(a+b-j)!}{j!(b-j)!}\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)^{j+1}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv -u_1(N)}}\sum_{r\geq 1} m^{-a-b-1+j} r^j \zeta_N^{ru_2} \overline{q}^{\frac{mr}{N}}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 8.4. — *Pour $a, b \geq 0$ et $u_1, u_2 \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, on a*

(22)

$$\begin{aligned}
F^{a,b}_{(u_1,u_2)}(\tau) &= \hat{\zeta}\left(\frac{u_2}{N}, a+b+2\right) + (-1)^{a+b}\hat{\zeta}\left(-\frac{u_2}{N}, a+b+2\right)\\
&+ (-1)^b 2i\pi\binom{a+b}{a}\delta_0(u_2)(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1}\left(\hat{\zeta}\left(\frac{u_1}{N}, a+b+1\right) + (-1)^{a+b}\hat{\zeta}\left(-\frac{u_1}{N}, a+b+1\right)\right)\\
&+ \frac{(-1)^{b+1}}{b!}\sum_{j=0}^{a}\frac{(a+b-j)!}{j!(a-j)!}\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)^{j+1}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j} N\big(S^{j-a-b-1,j}_{\hat{\delta}_{-u_1},\delta_{-u_2}}(\tau) + (-1)^{a+b} S^{j-a-b-1,j}_{\hat{\delta}_{u_1},\delta_{u_2}}(\tau)\big)\\
&+ \frac{(-1)^{b+1}}{a!}\sum_{j=0}^{b}\frac{(a+b-j)!}{j!(b-j)!}\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)^{j+1}(\tau-\overline{\tau})^{-a-b-1+j} N\big(\overline{S}^{j-a-b-1,j}_{\hat{\delta}_{u_1},\delta_{u_2}}(\tau) + (-1)^{a+b} \overline{S}^{j-a-b-1,j}_{\hat{\delta}_{-u_1},\delta_{-u_2}}(\tau)\big).
\end{aligned}$$

Démonstration. — On utilise la proposition 8.2 et l'identité (19). □

On déduit le développement de Fourier de $\mathrm{Eis}^n_{\mathcal{D}}(u)$ de la formule (20) et de la proposition 8.4.

9. Calcul du régulateur

Le calcul de l'intégrale de $\mathrm{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2)$ le long du cycle de Shokurov $X^k\{0,\infty\}$ procède en trois étapes. Dans un premier temps, nous intégrons $\mathrm{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2)$ sur les fibres $\gamma_{y,k}$ du cycle de Shokurov. Dans un deuxième temps, nous intégrons le résultat obtenu le long du symbole modulaire $\{0,\infty\}$, à l'aide de la méthode de Rogers-Zudilin. L'expression obtenue (33) comporte six termes : un terme principal (noté A) et cinq termes supplémentaires (notés B à F) provenant des termes constants des séries d'Eisenstein. Dans un troisième temps, nous montrons que tous les termes supplémentaires se simplifient.

Soit $p : E^k(\mathbf{C}) \to Y(N)(\mathbf{C})$ la projection canonique. On a une application naturelle $\nu : \mathcal{H} \to Y(N)(\mathbf{C})$ donnée par $\nu(\tau) = [(\tau,\sigma)]$, qui nous permet de voir le chemin $\{0,\infty\}$ comme une sous-variété de $Y(N)(\mathbf{C})$. Considérons la sous-variété $W = p^{-1}(\{0,\infty\})$ de $E^k(\mathbf{C})$. On a

$$W = \bigcup_{y>0} p^{-1}(\nu(iy)) = \bigcup_{y>0} \{iy\} \times \left(\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{Z}+iy\mathbf{Z}}\right)^k \times \{\sigma\}.$$

Soient $u_1 = (a_1,b_1)$, $u_2 = (a_2,b_2) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. Nous allons calculer la restriction de $\mathrm{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2)$ à W. D'après la proposition 5.4, on a

$$\mathrm{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) = -\frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N}\Im(\tau)\sum_{a=0}^{k_1} F^{a,k_1-a}_{gu_1}(\tau)\psi_{a,k_1-a} \mod d\tau, d\overline{\tau}.$$

Comme $\mathrm{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1)$ est invariante par $\sigma : (\tau,z,g) \mapsto (-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau},\sigma g)$, il vient

$$\mathrm{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) = \sigma^*\,\mathrm{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) = -\frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N}\Im(-\frac{1}{\tau})\sum_{a=0}^{k_1} F^{a,k_1-a}_{\sigma gu_1}(-\frac{1}{\tau})\tau^{-a}\overline{\tau}^{-k_1+a}\psi_{a,k_1-a} \mod d\tau, d\overline{\tau}.$$

En restreignant à W, il vient

$$\begin{aligned} p_1^*\,\mathrm{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1)|_W &= -\frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N}y^{-1}\sum_{a=0}^{k_1} F^{a,k_1-a}_{-u_1}(\frac{i}{y})(iy)^{-a}(-iy)^{-k_1+a}p_1^*\psi_{a,k_1-a} \mod dy \\ &= -\frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N}y^{-1}(iy)^{-k_1}\sum_{a=0}^{k_1} F^{a,k_1-a}_{-u_1}(\frac{i}{y})(-1)^{-k_1+a}p_1^*\psi_{a,k_1-a} \mod dy \qquad (23) \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 8.4, il vient

$$\begin{aligned} F^{a,k_1-a}_{-u_1}(\frac{i}{y}) &= \alpha_1 + (-1)^{k_1-a}\binom{k_1}{a}\beta_1 y^{k_1+1} \\ &+ \frac{(-1)^{k_1+1-a}}{(k_1-a)!}N\sum_{\ell=0}^{a}\frac{(k_1-\ell)!}{\ell!(a-\ell)!}(-\frac{2i\pi}{N})^{\ell+1}(\frac{2i}{y})^{-k_1-1+\ell}\left(S^{\ell-k_1-1,\ell}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1}S^{\ell-k_1-1,\ell}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y})\right) \\ &+ \frac{(-1)^{k_1+1-a}}{a!}N\sum_{\ell=0}^{k_1-a}\frac{(k_1-\ell)!}{\ell!(k_1-a-\ell)!}(-\frac{2i\pi}{N})^{\ell+1}(\frac{2i}{y})^{-k_1-1+\ell}\left(\overline{S}^{\ell-k_1-1,\ell}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1}\overline{S}^{\ell-k_1-1,\ell}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y})\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N},k_1+2) + (-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N},k_1+2) \\ \beta_1 &= 2i\pi\delta_{b_1=0}(2i)^{-k_1-1}\left(\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N},k_1+1) + (-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N},k_1+1)\right). \end{aligned}$$

En reportant dans (23), il vient

$$p_1^*\,\mathrm{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1)|_W = \eta_0 + \eta_1 \qquad (24)$$

avec

$$\eta_0 = -\frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N} i^{-k_1} \sum_{a=0}^{k_1} \left((-1)^{k_1-a} \alpha_1 y^{-k_1-1} + \binom{k_1}{a} \beta_1 \right) p_1^* \psi_{a,k_1-a}$$

(25)
$$\eta_1 = (-1)^{k_1+1} \frac{k_1!(k_1+2)}{2^{k_1+3}\pi} \sum_{\ell=0}^{k_1} \left(S^{\ell-k_1-1,\ell}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1} S^{\ell-k_1-1,\ell}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) \right) \Omega_\ell$$
$$+ (-1)^{k_1+1} \frac{k_1!(k_1+2)}{2^{k_1+3}\pi} \sum_{\ell=0}^{k_1} \left(\overline{S}^{\ell-k_1-1,\ell}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1} \overline{S}^{\ell-k_1-1,\ell}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y}) \right) \overline{\Omega_\ell} \mod \mathrm{d}y$$

où l'on a posé, pour tout $0 \le \ell \le k_1$:

$$\Omega_\ell = \frac{(k_1-\ell)!}{\ell!} (\frac{4\pi}{N})^{\ell+1} y^{-\ell} \sum_{a=\ell}^{k_1} \frac{p_1^* \psi_{a,k_1-a}}{(k_1-a)!(a-\ell)!}.$$

D'autre part, en utilisant la proposition 8.1, on a

$$\begin{aligned} p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2) &= (-1)^{k_2+1} \frac{k_2+2}{N} (2i\pi)^{k_2} F^{(k_2+2)}_{\sigma g u_2}(\tau) \frac{\mathrm{d}q}{q} \wedge p_2^* \psi_{k_2,0} \\ &= (-1)^{k_2+1} \frac{k_2+2}{N} (2i\pi)^{k_2+1} F^{(k_2+2)}_{\sigma g u_2}(\tau) \mathrm{d}\tau \wedge p_2^* \psi_{k_2,0} \end{aligned}$$

d'où

$$p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2)|_W = i \frac{k_2+2}{N} (-2i\pi)^{k_2+1} F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) \mathrm{d}y \wedge p_2^* \psi_{k_2,0}$$

puis

$$\pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2))|_W = i \frac{k_2+2}{2N} (-2i\pi)^{k_2+1} \mathrm{d}y \wedge \left(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) p_2^* \psi_{k_2,0} - \overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) p_2^* \psi_{0,k_2} \right).$$

Lemme 9.1. — *Soit $0 \le a \le k_1$ un entier. On a*

(26)
$$\int_{\gamma_{y,k}} p_1^* \psi_{a,k_1-a} \wedge p_2^* \psi_{k_2,0} = (-1)^{k_1-a} (iy)^k$$

(27)
$$\int_{\gamma_{y,k}} p_1^* \psi_{a,k_1-a} \wedge p_2^* \psi_{0,k_2} = (-1)^{k-a} (iy)^k$$

Démonstration. — Cela résulte d'un calcul direct. □

Lemme 9.2. — *Pour tout entier $0 \le \ell \le k_1$, on a*

$$\int_{\gamma_{y,k}} \Omega_\ell \wedge p_2^* \psi_{k_2,0} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < k_1 \\ \frac{i^k}{k_1!} (\frac{4\pi}{N})^{k_1+1} y^{k_2} & \text{si } \ell = k_1. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_{y,k}} \Omega_\ell \wedge p_2^* \psi_{0,k_2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < k_1 \\ (-1)^{k_2} \frac{i^k}{k_1!} (\frac{4\pi}{N})^{k_1+1} y^{k_2} & \text{si } \ell = k_1. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_{y,k}} \overline{\Omega_\ell} \wedge p_2^* \psi_{k_2,0} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < k_1 \\ (-1)^{k_1} \frac{i^k}{k_1!} (\frac{4\pi}{N})^{k_1+1} y^{k_2} & \text{si } \ell = k_1. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_{y,k}} \overline{\Omega_\ell} \wedge p_2^* \psi_{0,k_2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < k_1 \\ (-1)^{k} \frac{i^k}{k_1!} (\frac{4\pi}{N})^{k_1+1} y^{k_2} & \text{si } \ell = k_1. \end{cases}$$

Démonstration. — On applique le lemme 9.1 avec $m = k = k_1 + k_2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{y,k}} \Omega_\ell \wedge p_2^* \psi_{k_2,0} &= \frac{(k_1-\ell)!}{\ell!} (\frac{4\pi}{N})^{\ell+1} y^{-\ell} \sum_{a=\ell}^{k_1} \frac{1}{(k_1-a)!(a-\ell)!} \int_{\gamma_{y,k}} p_1^* \psi_{a,k_1-a} \wedge p_2^* \psi_{k_2,0} \\ &= \frac{(k_1-\ell)!}{\ell!} (\frac{4\pi}{N})^{\ell+1} y^{-\ell} \sum_{a=\ell}^{k_1} \frac{(-1)^{k_1-a}(iy)^k}{(k_1-a)!(a-\ell)!} \\ &= \frac{(k_1-\ell)!}{\ell!} (\frac{4\pi}{N})^{\ell+1} y^{-\ell} (iy)^k \sum_{a=0}^{k_1-\ell} \frac{(-1)^{k_1-\ell-a}}{(k_1-\ell-a)!a!} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < k_1 \\ \frac{i^k}{k_1!} (\frac{4\pi}{N})^{k_1+1} y^{k_2} & \text{si } \ell = k_1. \end{cases}\end{aligned}$$

Les autres cas se traitent de manière similaire. □

On intègre $\eta_0 \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2))$ sur les fibres de $X^k\{0,\infty\} \to \{0,\infty\}$ grâce au lemme 9.1, ce qui donne

$$\begin{aligned}(28)\quad &\int_{\gamma_{y,k}} \eta_0 \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2)) \\ &= -(-1)^{k_1} \frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N} i^{-k_1} \cdot i \frac{k_2+2}{2N} (-2i\pi)^{k_2+1} \mathrm{d}y \sum_{a=0}^{k_1} \left((-1)^{k_1-a} \alpha_1 y^{-k_1-1} + \binom{k_1}{a} \beta_1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \int_{\gamma_{y,k}} p_1^* \psi_{a,k_1-a} \wedge \left(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) p_2^* \psi_{k_2,0} - \overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) p_2^* \psi_{0,k_2} \right) \\ &= -(-1)^{k_1} \frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N} i^{-k_1} \cdot i \frac{k_2+2}{2N} (-2i\pi)^{k_2+1} \mathrm{d}y \sum_{a=0}^{k_1} \left((-1)^{k_1-a} \alpha_1 y^{-k_1-1} + \binom{k_1}{a} \beta_1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) (-1)^{k_1-a} (iy)^k - \overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) (-1)^{k-a} (iy)^k \right) \\ &= -(-1)^{k_1} \frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N} i^{-k_1} \cdot i \frac{k_2+2}{2N} (-2i\pi)^{k_2+1} \sum_{a=0}^{k_1} \left((-1)^{k_1-a} \alpha_1 y^{-k_1-1} + \binom{k_1}{a} \beta_1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot (-1)^{k_1-a} (iy)^k \left(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1} \overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) \right) \mathrm{d}y \\ &= -(-1)^{k_1} \frac{k_1!(k_1+2)}{2\pi N} i^{k_2+1} \frac{k_2+2}{2N} (-2i\pi)^{k_2+1} \sum_{a=0}^{k_1} \left(\alpha_1 y^{k_2-1} + (-1)^{k_1-a} \binom{k_1}{a} \beta_1 y^k \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1} \overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) \right) \mathrm{d}y \\ &= -(-1)^{k_1} \frac{k_1!(k_1+2)(k_2+2)}{2N^2} (2\pi)^{k_2} \left((k_1+1) \alpha_1 y^{k_2-1} + \delta_{k_1=0} \beta_1 y^k \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1} \overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) \right) \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On intègre $\eta_1 \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2))$ sur les fibres de $X^k\{0,\infty\} \to \{0,\infty\}$ grâce au lemme 9.2, ce qui donne

$$\begin{aligned}(29)\quad &\int_{\gamma_{y,k}} \eta_1 \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2)) \\ &= -i^{k_1} \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k_1+2}} (2\pi)^{k_1+k_2+1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1} S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1} \overline{S}^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) + \overline{S}^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y}) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1} \overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) \right) y^{k_2} \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Puisque $\overline{S}^{k,\ell}_{\alpha,\beta}(\frac{i}{y}) = S^{k,\ell}_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}(\frac{i}{y})$ et comme $\overline{\delta_a} = \delta_a$ et $\overline{\hat{\delta}_a} = \hat{\delta}_{-a}$, il vient

$$\begin{aligned}
&S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1} S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1}\overline{S}^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) + \overline{S}^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y})\\
&= S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1} S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) + (-1)^{k_1} S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1},\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}) + S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{b_1}}(\frac{i}{y})\\
&= S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1}+\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{b_1}+(-1)^{k_1}\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y}).
\end{aligned}$$

En mettant ensemble (28) et (29), il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_{y,k}} p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2))\\
&= (-1)^{k_1+1}\frac{k_1!(k_1+2)(k_2+2)}{2N^2}(2\pi)^{k_2}\Big((k_1+1)\alpha_1 y^{k_2-1} + \delta_{k_1=0}\beta_1 y^{k_2}\Big)\Big(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1}\overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy)\Big)\mathrm{d}y\\
&\quad - i^{k_1}\frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k_1+2}}(2\pi)^{k_1+k_2+1} S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1}+\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{b_1}+(-1)^{k_1}\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y})\Big(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1}\overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy)\Big) y^{k_2}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.3, le terme constant de la série d'Eisenstein $F^{(k_2+2)}_{-u_2}$ est réel, et on a

$$\begin{aligned}
&F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1}\overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy)\\
&= \zeta(-\frac{a_2}{N}, -k_2-1) + (-1)^{k_2+1}\zeta(-\frac{a_2}{N}, -k_2-1)\\
&\quad + N^{-k_2-1}\left(\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ n\equiv -a_2(N)}} \zeta_N^{-b_2 m} n^{k_2+1} e^{-\frac{2\pi mny}{N}} + (-1)^{k_2}\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ n\equiv a_2(N)}} \zeta_N^{b_2 m} n^{k_2+1} e^{-\frac{2\pi mny}{N}}\right)\\
&\quad + (-1)^{k_2+1}N^{-k_2-1}\left(\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ n\equiv -a_2(N)}} \zeta_N^{b_2 m} n^{k_2+1} e^{-\frac{2\pi mny}{N}} + (-1)^{k_2}\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ n\equiv a_2(N)}} \zeta_N^{-b_2 m} n^{k_2+1} e^{-\frac{2\pi mny}{N}}\right)\\
&= (1+(-1)^{k_2+1})\zeta(-\frac{a_2}{N}, -k_2-1) + N^{-k_2-1} S^{0,k_2+1}_{\hat{\delta}_{b_2}+(-1)^{k_2+1}\hat{\delta}_{-b_2},\delta_{-a_2}-\delta_{a_2}}(iy).
\end{aligned}$$

Lemme 9.3. — *Pour $s \in \mathbf{C}$, $\Re(s) < 0$, la fonction $y \mapsto \Big(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1}\overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy)\Big) y^{s-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et on a*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Big(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1}\overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy)\Big) y^s \frac{\mathrm{d}y}{y} &= i^{k_2+2}(2\pi)^{s-k_2-2}\Gamma(-s+k_2+2)\cdot\\
\cdot\Big(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, -s+k_2+2) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, -s+k_2+2)\Big)&\Big(\zeta(-\frac{b_2}{N}, -s+1) + (-1)^{k_2+1}\zeta(\frac{b_2}{N}, -s+1)\Big).
\end{aligned}$$

Démonstration. — L'hypothèse $\Re(s) < 0$ entraîne que l'intégrale converge lorsque $y \to +\infty$. On a $\overline{F}^{(k_2+2)}_{-a_2,-b_2}(iy) = F^{(k_2+2)}_{-a_2,b_2}(iy)$. Pour montrer l'intégrabilité lorsque $y \to 0$, on effectue le changement de variables $y \mapsto 1/y$ et on utilise le lemme 3.4 avec $g = \sigma$, ce qui donne

$$F^{(k_2+2)}_{-a_2,-b_2}(i/y) = (iy)^{k_2+2} F^{(k_2+2)}_{-b_2,a_2}(iy).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
&\Big(F^{(k_2+2)}_{-a_2,-b_2}(i/y) + (-1)^{k_2+1} F^{(k_2+2)}_{-a_2,b_2}(i/y)\Big) y^{-s-1}\\
&= (iy)^{k_2+2}\Big(F^{(k_2+2)}_{-b_2,a_2}(iy) + (-1)^{k_2+1} F^{(k_2+2)}_{b_2,a_2}(iy)\Big) y^{-s-1}
\end{aligned}$$

Le terme constant de la série d'Eisenstein $F^{(k_2+2)}_{-b_2,a_2} + (-1)^{k_2+1} F^{(k_2+2)}_{b_2,a_2}$ est nul, ce qui montre la convergence de l'intégrale de départ pour $\mathfrak{R}(s) < 0$. Par changement de variables dans cette même intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \Big(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1}\overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy)\Big) y^s \frac{\mathrm{d}y}{y}\\
&\qquad = i^{k_2+2} \int_0^\infty \Big(F^{(k_2+2)}_{-b_2,a_2}(iy) + (-1)^{k_2+1} F^{(k_2+2)}_{b_2,a_2}(iy)\Big)\, y^{-s+k_2+2} \frac{\mathrm{d}y}{y}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.3, on a

$$\begin{aligned}
&F^{(k_2+2)}_{-b_2,a_2}(iy) + (-1)^{k_2+1} F^{(k_2+2)}_{b_2,a_2}(iy)\\
&= N^{-k_2-1}\Big(S^{0,k_2+1}_{\hat{\delta}_{-a_2},\delta_{-b_2}}(iy) + (-1)^{k_2} S^{0,k_2+1}_{\hat{\delta}_{a_2},\delta_{b_2}}(iy) + (-1)^{k_2+1} S^{0,k_2+1}_{\hat{\delta}_{-a_2},\delta_{b_2}}(iy) - S^{0,k_2+1}_{\hat{\delta}_{a_2},\delta_{-b_2}}(iy)\Big)\\
&= N^{-k_2-1} S^{0,k_2+1}_{\hat{\delta}_{-a_2}-\hat{\delta}_{a_2},\delta_{-b_2}+(-1)^{k_2+1}\delta_{b_2}}(iy).
\end{aligned}$$

Grâce au lemme 7.1, on en déduit

$$\begin{aligned}
&i^{k_2+2}\int_0^\infty \Big(F^{(k_2+2)}_{-b_2,a_2}(iy) + (-1)^{k_2+1} F^{(k_2+2)}_{b_2,a_2}(iy)\Big)\, y^{-s+k_2+2}\frac{\mathrm{d}y}{y}\\
&= \frac{i^{k_2+2}}{N^{k_2+1}} \int_0^\infty S^{0,k_2+1}_{\hat{\delta}_{-a_2}-\hat{\delta}_{a_2},\delta_{-b_2}+(-1)^{k_2+1}\delta_{b_2}}(iy) y^{-s+k_2+2}\frac{\mathrm{d}y}{y}\\
&= \frac{i^{k_2+2}}{N^{k_2+1}} (\frac{2\pi}{N})^{s-k_2-2}\Gamma(s-k_2+2) L(\hat{\delta}_{-a_2} - \hat{\delta}_{a_2}, -s+k_2+2) L(\delta_{-b_2} + (-1)^{k_2+1}\delta_{b_2}, -s+1)\\
&= i^{k_2+2}(2\pi)^{s-k_2-2}\Gamma(-s+k_2+2)\Big(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, -s+k_2+2) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, -s+k_2+2)\Big)\cdot\\
&\qquad \cdot \Big(\zeta(-\frac{b_2}{N}, -s+1) + (-1)^{k_2+1}\zeta(\frac{b_2}{N}, -s+1)\Big).
\end{aligned}$$

□

Pour $\mathfrak{R}(s) \ll 0$, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\int_{X^k\{0,\infty\}} y^s p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2))\\
&= (-1)^{k_1+1} k_1! \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{2N^2}(2\pi)^{k_2} \int_0^\infty \Big(F^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy) + (-1)^{k_2+1}\overline{F}^{(k_2+2)}_{-u_2}(iy)\Big)\cdot\\
&\qquad \cdot \big((k_1+1)\alpha_1 y^{k_2-1} + \delta_{k_1=0}\beta_1 y^{k_2}\big)\, y^s \mathrm{d}y\\
&\quad - i^{k_1}\frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k_1+2}}(2\pi)^{k_1+k_2+1}\int_0^\infty S^{-1,k_1}_{\hat{\delta}_{a_1}+\hat{\delta}_{-a_1},\delta_{b_1}+(-1)^{k_1}\delta_{-b_1}}(\frac{i}{y})\cdot\\
&\qquad \cdot\Big((1+(-1)^{k_2+1})\zeta(-\frac{a_2}{N}, -k_2-1) + N^{-k_2-1} S^{0,k_2+1}_{\hat{\delta}_{b_2}+(-1)^{k_2+1}\hat{\delta}_{-b_2},\delta_{-a_2}-\delta_{a_2}}(iy)\Big)\, y^{s+k_2}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

En appliquant les lemmes 7.1, 9.3 et la proposition 7.2, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_{X^k\{0,\infty\}} y^s p_1^* \operatorname{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}_{\mathrm{hol}}^{k_2}(u_2)) \\
&= (-1)^{k_1} \frac{(k_1+2)!(k_2+2)}{2N^2} (2i\pi)^{k_2} \alpha_1 (2\pi)^{s-2} \Gamma(-s+2) \cdot \\
&\quad \cdot \Big(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, -s+2) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, -s+2) \Big) \Big(\zeta(-\frac{b_2}{N}, -s-k_2+1) + (-1)^{k_2+1} \zeta(\frac{b_2}{N}, -s-k_2+1) \Big) \\
&\quad + \delta_{k_1=0} \beta_1 \frac{k_2+2}{N^2} (2i\pi)^{k_2} (2\pi)^{s-1} \Gamma(-s+1) \cdot \\
&\quad \cdot \Big(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, -s+1) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, -s+1) \Big) \Big(\zeta(-\frac{b_2}{N}, -s-k_2) + (-1)^{k_2+1} \zeta(\frac{b_2}{N}, -s-k_2) \Big) \\
&\quad - i^{k_1} \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k_1+2}} (2\pi)^{k_1+k_2+1} (1+(-1)^{k_2+1}) \zeta(-\frac{a_2}{N}, -k_2-1) (\frac{2\pi}{N})^{s+k_2+1} \Gamma(-s-k_2-1) \cdot \\
&\quad \cdot \Big(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, -s-k_2) + \hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, -s-k_2) \Big) N^{s+k+1} \Big(\zeta(\frac{b_1}{N}, -s-k-1) + (-1)^{k_1} \zeta(-\frac{b_1}{N}, -s-k-1) \Big) \\
&\quad - i^{k_1} \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k_1+2}} (2\pi)^{k_1+k_2+1} N^{-k_2-1} \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^\infty S^{s+k_2,0}_{\hat{\delta}_{a_1}+\hat{\delta}_{-a_1}, \hat{\delta}_{b_2}+(-1)^{k_2+1}\hat{\delta}_{-b_2}}(iy) S^{k_1,-s}_{\delta_{b_1}+(-1)^{k_1}\delta_{-b_1}, \delta_{-a_2}-\delta_{a_2}}(\frac{i}{y}) y^{s+k_2} \mathrm{d}y.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

L'expression précédente est une fonction méromorphe de s, et tous les termes qui la composent sont holomorphes au voisinage de $s=0$, excepté les termes suivants :

(1) L'expression $\zeta(\pm\frac{b_2}{N}, -s-k_2+1)$ a un pôle simple lorsque $k_2=0$. Mais dans ce cas

$$\zeta(-\frac{b_2}{N}, -s-k_2+1) + (-1)^{k_2+1}\zeta(\frac{b_2}{N}, -s-k_2+1) = \zeta(-\frac{b_2}{N}, -s+1) - \zeta(\frac{b_2}{N}, -s+1)$$

est holomorphe en $s=0$; sa valeur est $\zeta^*(-\frac{b_2}{N}, 1) - \zeta^*(\frac{b_2}{N}, 1)$.

(2) Le facteur $\Gamma(-s-k_2-1)$ a un pôle simple. Mais ce terme n'intervient que si k_2 est impair, et dans ce cas on a

$$\zeta(\frac{b_1}{N}, -k-1) + (-1)^{k_1}\zeta(-\frac{b_1}{N}, -k-1) = -\frac{B_{k+2}(\{\frac{b_1}{N}\})}{k+2} + (-1)^k \frac{B_{k+2}(\{-\frac{b_1}{N}\})}{k+2} = 0.$$

L'expression précédente est donc holomorphe en $s=0$. Nous allons calculer l'intégrale (30) pour $s=0$, soit

$$I := \int_0^\infty S^{k_2,0}_{\hat{\delta}_{a_1}+\hat{\delta}_{-a_1}, \hat{\delta}_{b_2}+(-1)^{k_2+1}\hat{\delta}_{-b_2}}(iy) S^{k_1,0}_{\delta_{b_1}+(-1)^{k_1}\delta_{-b_1}, \delta_{-a_2}-\delta_{a_2}}(\frac{i}{y}) y^{k_2} \mathrm{d}y.$$

Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant [**2**, Lemmas 8 and 9].

Lemme 9.4. — *Soit $f = \sum_{n=0}^\infty a_n q^n \in M_k(\Gamma_1(M))$ et $g = \sum_{n=0}^\infty b_n q^n \in M_\ell(\Gamma_1(M))$ avec $k, \ell \geq 1$. Soit $h = W_M(g)$. Alors on a*

$$M^{s/2} \int_0^\infty f^*(iy) g^*(\frac{i}{My}) y^s \frac{\mathrm{d}y}{y} = \Lambda(fh, s+\ell) - a_0\Lambda(h, s+\ell) - b_0\Lambda(f, s). \tag{31}$$

En particulier, on a

$$M^{k/2} \int_0^\infty f^*(iy) g^*(\frac{i}{My}) y^k \frac{\mathrm{d}y}{y} = \Lambda^*(fh, k+\ell) - a_0\Lambda(h, k+\ell) - b_0\Lambda^*(f, k). \tag{32}$$

En faisant le changement de variables $y \to Ny$ dans I, on a

$$I = N^{k_2+1} \int_0^\infty S^{k_2,0}_{\hat{\delta}_{a_1}+\hat{\delta}_{-a_1}, \hat{\delta}_{b_2}+(-1)^{k_2+1}\hat{\delta}_{-b_2}}(iNy) S^{k_1,0}_{\delta_{b_1}+(-1)^{k_1}\delta_{-b_1}, \delta_{-a_2}-\delta_{a_2}}(\frac{i}{Ny}) y^{k_2} \mathrm{d}y.$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned}
S^{k_2,0}_{\hat{\delta}_{a_1}+\hat{\delta}_{-a_1},\hat{\delta}_{b_2}+(-1)^{k_2+1}\hat{\delta}_{-b_2}}(iNy) &= H^{(k_2+1),*}_{b_2,a_1}(iy) + H^{(k_2+1),*}_{b_2,-a_1}(iy)\\
S^{k_1,0}_{\delta_{b_1}+(-1)^{k_1}\delta_{-b_1},\delta_{-a_2}-\delta_{a_2}}(\frac{i}{Ny}) &= G^{(k_1+1),*}_{b_1,-a_2}(\frac{i}{N^2y}) - G^{(k_1+1),*}_{b_1,a_2}(\frac{i}{N^2y}).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 9.4 avec $M = N^2$, $f = H^{(k_2+1)}_{b_2,a_1} + H^{(k_2+1)}_{b_2,-a_1}$ et $g = G^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2} - G^{(k_1+1)}_{b_1,a_2}$, il vient

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \Lambda^*(f\cdot W_{N^2}(g), k+2)\\
&= \Lambda^*(W_{N^2}(f)\cdot g, 0)\\
&= i^{-k_2-1}N\Lambda^*\Big((G^{(k_2+1)}_{b_2,a_1} + G^{(k_2+1)}_{b_2,-a_1})(G^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2} - G^{(k_1+1)}_{b_1,a_2}), 0\Big)\\
I_2 &= -a_0(f)\Lambda(W_{N^2}(g), k+2)\\
I_3 &= -a_0(g)\Lambda^*(f, k_2+1).
\end{aligned}$$

Calcul de I_2. Grâce aux lemmes 3.10 et 3.14, on a

$$\begin{aligned}
\Lambda(W_{N^2}(g), k+2) &= \frac{i^{k_1+1}}{N}\Lambda(H^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2} - H^{(k_1+1)}_{b_1,a_2}, k+2)\\
&= \frac{i^{k_1+1}}{N}N^{k+2}(2\pi)^{-k-2}\Gamma(k+2)\cdot\\
&\quad\Big(\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2)\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, k_2+2) + (-1)^{k_1+1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2)\hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, k_2+2)\\
&\qquad -\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2)\hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, k_2+2) + (-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2)\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, k_2+2)\Big)\\
&= i^{k_1+1}N^{k+1}(2\pi)^{-k-2}(k+1)!\Big(\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2) + (-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2)\Big)\\
&\quad\Big(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, k_2+2) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, k_2+2)\Big).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
I_2 &= -i^{k_1+1}N^{k+1}(2\pi)^{-k-2}(k+1)!a_0(H^{(k_2+1)}_{b_2,a_1} + H^{(k_2+1)}_{b_2,-a_1})\cdot\\
&\quad\Big(\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2) + (-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2)\Big)\Big(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, k_2+2) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, k_2+2)\Big).
\end{aligned}$$

Calcul de I_3. Si $k_1 \geq 1$ et $a_2 \neq 0$, alors $a_0(g) = 0$. Si $a_2 = 0$, alors $g = 0$. On peut donc supposer $k_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$. Si $b_1 \neq 0$, alors $a_0(g) = 0$. On peut donc supposer $b_1 = 0$. Alors

$$a_0(g) = \left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{-a_2}{N}\right\}\right) - \left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{a_2}{N}\right\}\right) = \left\{\frac{a_2}{N}\right\} - \left\{-\frac{a_2}{N}\right\} = 2\left\{\frac{a_2}{N}\right\} - 1.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\Lambda(f,s) &= N^s(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\Big(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N}, s)\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, s-k_2) + (-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N}, s)\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, s-k_2)\\
&\qquad +\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N}, s)\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, s-k_2) + (-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N}, s)\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, s-k_2)\Big)\\
&= N^s(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\Big(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N}, s) + (-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N}, s)\Big)\Big(\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, s-k_2) + \hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, s-k_2)\Big).
\end{aligned}$$

Comme $a_1 \neq 0$, les fonctions $\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, s)$ et $\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, s)$ sont holomorphes sur $\mathbf{C}$, d'où

$$\Lambda^*(f, k_2+1) = \Lambda(f, k_2+1) = N^{k_2+1}(2\pi)^{-k_2-1}k_2!\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N}, k_2+1) + (-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N}, k_2+1)\right)\cdot \\ \cdot\left(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, 1) + \hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, 1)\right).$$

On a alors

$$I_3 = \delta_{k_1=0}\delta_{a_2\neq 0}\delta_{b_1=0}N^{k_2+1}(2\pi)^{-k_2-1}k_2!\left(1-2\left\{\frac{a_2}{N}\right\}\right)\cdot \\ \cdot\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N}, k_2+1) + (-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N}, k_2+1)\right)\left(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, 1) + \hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, 1)\right)$$

Alors l'intégrale régularisée de $p_1^* \operatorname{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}_{\mathrm{hol}}^{k_2}(u_2))$ le long de $X^k\{0,\infty\}$ est donnée par

$$\int_{X^k\{0,\infty\}}^{*} p_1^* \operatorname{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}_{\mathrm{hol}}^{k_2}(u_2)) = A+B+C+D+E+F \tag{33}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= A^{k_1,k_2}(u_1,u_2) \\
&= i^{k_1-k_2+1}\frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k_1+k_2+2}}(2\pi)^{k_1+k_2+1}\Lambda^*((G_{b_2,a_1}^{(k_2+1)} + G_{b_2,-a_1}^{(k_2+1)})(G_{b_1,-a_2}^{(k_1+1)} - G_{b_1,a_2}^{(k_1+1)}), 0) \\
B &= B^{k_1,k_2}(u_1,u_2) \\
&= (-1)^{k_1}\frac{(k_1+2)!(k_2+2)}{8\pi^2N^2}(2i\pi)^{k_2}\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k_1+2) + (-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k_1+2)\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, 2) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, 2)\right)\left(\zeta^{(*)}(-\frac{b_2}{N}, -k_2+1) + (-1)^{k_2+1}\zeta^{(*)}(\frac{b_2}{N}, -k_2+1)\right) \\
C &= C^{k_1,k_2}(u_1,u_2) \\
&= \delta_{k_1=0}\delta_{b_1=0}\delta_{a_2\neq 0}\frac{k_2+2}{2N^2}(2i\pi)^{k_2}\left(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, 1) + \hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, 1)\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, 1) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, 1)\right)\left(\zeta(-\frac{b_2}{N}, -k_2) + (-1)^{k_2+1}\zeta(\frac{b_2}{N}, -k_2)\right) \\
D &= D^{k_1,k_2}(u_1,u_2) \\
&= -\delta_{k_2\equiv 1(2)}i^{k_1}\frac{(k_1+2)(k_2+2)}{2N^2}(2\pi)^{k_1+2k_2+2}\left(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, -k_2) + \hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, -k_2)\right)\cdot \\
&\quad \cdot\zeta(-\frac{a_2}{N}, -k_2-1)\cdot\lim_{s\to 0}\left(\Gamma(s-k_2-1)\left(\zeta(\frac{b_1}{N}, s-k-1) + (-1)^{k_1}\zeta(-\frac{b_1}{N}, s-k-1)\right)\right) \\
E &= E^{k_1,k_2}(u_1,u_2) \\
&= -i^{k_1}\frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k_1+2}}(2\pi)^{k_1+k_2+1}N^{-k_2-1}I_2 \\
&= (-1)^{k_1}i\frac{(k_1+2)(k_2+2)(k+1)!}{8\pi N^2}a_0(H_{b_2,a_1}^{(k_2+1)} + H_{b_2,-a_1}^{(k_2+1)})\cdot \\
&\quad \cdot\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2) + (-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2)\right)\left(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, k_2+2) - \hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, k_2+2)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= F^{k_1,k_2}(u_1,u_2)\\
&= -i^{k_1}\frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k_1+2}}(2\pi)^{k_1+k_2+1}N^{-k_2-1}I_3\\
&= \delta_{k_1=0}\delta_{b_1=0}\delta_{a_2\neq 0}\frac{k_2!(k_2+2)}{2N^2}\left(2\left\{\frac{a_2}{N}\right\}-1\right)\cdot\\
&\qquad\cdot\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N},k_2+1)+(-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N},k_2+1)\right)\left(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N},1)+\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N},1)\right).
\end{aligned}$$

Dans la formule pour B, le symbole $\zeta^{(*)}$ indique que l'on prend la valeur régularisée lorsque $k_2=0$.

Montrons maintenant que les termes C et F se simplifient. D'après la formule (8), on a

$$\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N},1)-\hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N},1)=2i\pi\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{a_2}{N}\right\}\right). \tag{34}$$

D'autre part, en appliquant la formule de Hurwitz (6) en $s=k_2+1$, il vient

$$\begin{aligned}
\zeta(-\frac{b_2}{N},-k_2) &= \frac{k_2!}{(2\pi)^{k_2+1}}\left((-i)^{k_2+1}\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N},k_2+1)+i^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N},k_2+1)\right)\\
&= (-i)^{k_2+1}\frac{k_2!}{(2\pi)^{k_2+1}}\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N},k_2+1)+(-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N},k_2+1)\right).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\zeta(\frac{b_2}{N},-k_2)=(-i)^{k_2+1}\frac{k_2!}{(2\pi)^{k_2+1}}\left(\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N},k_2+1)+(-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N},k_2+1)\right).$$

On en déduit

$$\zeta(-\frac{b_2}{N},-k_2)+(-1)^{k_2+1}\zeta(\frac{b_2}{N},-k_2)=2\frac{(-i)^{k_2+1}k_2!}{(2\pi)^{k_2+1}}\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N},k_2+1)+(-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N},k_2+1)\right). \tag{35}$$

En reportant (34) et (35) dans le terme C, on obtient

$$\begin{aligned}
C &= \delta_{k_1=0}\delta_{b_1=0}\delta_{a_2\neq 0}\frac{k_2+2}{2N^2}(2i\pi)^{k_2}\left(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N},1)+\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N},1)\right)\cdot\\
&\qquad\cdot 2i\pi\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{a_2}{N}\right\}\right)2\frac{(-i)^{k_2+1}k_2!}{(2\pi)^{k_2+1}}\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N},k_2+1)+(-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N},k_2+1)\right)\\
&= \delta_{k_1=0}\delta_{b_1=0}\delta_{a_2\neq 0}\frac{k_2!(k_2+2)}{2N^2}\left(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N},1)+\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N},1)\right)\cdot\\
&\qquad\cdot\left(1-2\left\{\frac{a_2}{N}\right\}\right)\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_2}{N},k_2+1)+(-1)^{k_2+1}\hat{\zeta}(\frac{b_2}{N},k_2+1)\right)\\
&= -F.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant simplifier d'autres termes, en distinguant les cas suivant k_2.

Premier cas : $k_2=0$.

On a alors $D=0$. Nous allons montrer que $B+E=0$. On a

$$\begin{aligned}
B &= (-1)^{k_1}\frac{(k_1+2)!}{4\pi^2N^2}\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N},k_1+2)+(-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N},k_1+2)\right)\cdot\\
&\qquad\cdot\left(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N},2)-\hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N},2)\right)\left(\zeta^*(-\frac{b_2}{N},1)-\zeta^*(\frac{b_2}{N},1)\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E &= (-1)^{k_1}i\frac{(k_1+2)!}{4\pi N^2}a_0(H^{(1)}_{b_2,a_1}+H^{(1)}_{b_2,-a_1})\cdot\\
&\qquad\cdot\left(\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N},k_1+2)+(-1)^{k_1}\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N},k_1+2)\right)\left(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N},2)-\hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N},2)\right).
\end{aligned}$$

Si $b_2=0$, alors $H^{(1)}_{0,a_1}+H^{(1)}_{0,-a_1}=0$ et donc $B=E=0$. Nous pouvons donc supposer $b_2\neq 0$. D'après la formule (9), on a

$$\zeta^*(-\frac{b_2}{N},1)-\zeta^*(\frac{b_2}{N},1)=i\pi\frac{\zeta_N^{-b_2}+1}{\zeta_N^{-b_2}-1}=i\pi\frac{1+\zeta_N^{b_2}}{1-\zeta_N^{b_2}}.$$

D'après la définition 3.9 et en utilisant l'identité

$$\frac{1+\zeta_N^{a}}{1-\zeta_N^{a}}+\frac{1+\zeta_N^{-a}}{1-\zeta_N^{-a}}=0 \qquad (a\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}-\{0\}),$$

il vient

$$a_0(H^{(1)}_{b_2,a_1}+H^{(1)}_{b_2,-a_1})=-\frac{1+\zeta_N^{b_2}}{1-\zeta_N^{b_2}}.$$

En reportant dans B et E, on obtient $B+E=0$. Au final, on a donc dans ce cas

$$\begin{aligned}&\int^*_{X^k\{0,\infty\}} p_1^*\operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1)\wedge\pi_{k_2+1}(p_2^*\operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2))=A\\ &=i^{k_1+1}\frac{(k_1+2)}{2N^{k_1+2}}(2\pi)^{k_1+1}\Lambda^*((G^{(1)}_{b_2,a_1}+G^{(1)}_{b_2,-a_1})(G^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2}-G^{(k_1+1)}_{b_1,a_2}),0)\end{aligned}$$

Second cas : $k_2\geq 1$.

Puisque $\zeta(-\frac{b_2}{N},-k_2+1)=(-1)^{k_2}\zeta(\frac{b_2}{N},-k_2+1)$, on a $B=0$ (lorsque $k_2=1$, on utilise ici l'hypothèse $b_2\neq 0$).

Comparons les termes D et E. On a

$$\begin{aligned}E=(-1)^{k_1}i\frac{(k_1+2)(k_2+2)(k+1)!}{8\pi N^2}&\Big(\hat\zeta(-\frac{a_1}{N},-k_2)+\hat\zeta(\frac{a_1}{N},-k_2)\Big)\cdot\\ \cdot\Big(\hat\zeta(-\frac{b_1}{N},k+2)+(-1)^{k_1}\hat\zeta(\frac{b_1}{N},k+2)\Big)&\Big(\hat\zeta(\frac{a_2}{N},k_2+2)-\hat\zeta(-\frac{a_2}{N},k_2+2)\Big)\end{aligned}$$

D'après (11), on a $\hat\zeta(-\frac{a_1}{N},-k_2)+\hat\zeta(\frac{a_1}{N},-k_2)=0$ si k_2 est pair. Donc E est nul dès que k_2 est pair, et nous supposons désormais k_2 impair. Par la formule d'Hurwitz en $s=k_2+2$, on obtient

$$\begin{aligned}\zeta(-\frac{a_2}{N},-k_2-1)&=\frac{(k_2+1)!}{(2\pi)^{k_2+2}}\Big((-i)^{k_2+2}\hat\zeta(-\frac{a_2}{N},k_2+2)+i^{k_2+2}\hat\zeta(\frac{a_2}{N},k_2+2)\Big)\\ &=\frac{i^{k_2+2}(k_2+1)!}{(2\pi)^{k_2+2}}\Big(\hat\zeta(\frac{a_2}{N},k_2+2)-\hat\zeta(-\frac{a_2}{N},k_2+2)\Big).\end{aligned}$$

Appliquons maintenant la formule d'Hurwitz aux termes à l'intérieur de la limite dans D. Il vient

$$\begin{aligned}\zeta(\frac{b_1}{N},s-k-1)&=\frac{\Gamma(k+2-s)}{(2\pi)^{k+2-s}}\Big(e^{-\frac{i\pi}{2}(k+2-s)}\hat\zeta(\frac{b_1}{N},k+2-s)+e^{\frac{i\pi}{2}(k+2-s)}\hat\zeta(-\frac{b_1}{N},k+2-s)\Big)\\ \zeta(-\frac{b_1}{N},s-k-1)&=\frac{\Gamma(k+2-s)}{(2\pi)^{k+2-s}}\Big(e^{-\frac{i\pi}{2}(k+2-s)}\hat\zeta(-\frac{b_1}{N},k+2-s)+e^{\frac{i\pi}{2}(k+2-s)}\hat\zeta(\frac{b_1}{N},k+2-s)\Big)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}&\zeta(\frac{b_1}{N},s-k-1)+(-1)^{k_1}\zeta(-\frac{b_1}{N},s-k-1)\\ &=\frac{\Gamma(k+2-s)}{(2\pi)^{k+2-s}}\Big(e^{-\frac{i\pi}{2}(k+2-s)}(1-e^{-i\pi s})\hat\zeta(\frac{b_1}{N},k+2-s)+e^{\frac{i\pi}{2}(k+2-s)}(1-e^{i\pi s})\hat\zeta(-\frac{b_1}{N},k+2-s)\Big)\end{aligned}$$

Lorsque $s \to 0$, on a $\Gamma(s-k_2-1) \sim \frac{1}{(k_2+1)!} s^{-1}$ et $1-e^{\pm i\pi s} \sim \mp i\pi s$ d'où

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\Big(\Gamma(s-k_2-1)\Big(\zeta(\frac{b_1}{N}, s-k-1)+(-1)^{k_1}\zeta(-\frac{b_1}{N}, s-k-1)\Big)\Big)\\
&= \frac{(k+1)!}{(k_2+1)!(2\pi)^{k+2}}\Big((-i)^{k+2} i\pi \hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2) + i^{k+2}(-i\pi)\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2)\Big)\\
&= \frac{(k+1)!(-i)^{k+2} i\pi}{(k_2+1)!(2\pi)^{k+2}}\Big(\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2)+(-1)^{k_1}\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2)\Big).
\end{aligned}$$

En reportant dans D, on obtient

$$\begin{aligned}
D &= -i^{k_1}\frac{(k_1+2)(k_2+2)}{2N^2}(2\pi)^{k_1+2k_2+2}\Big(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, -k_2)+\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, -k_2)\Big)\cdot\\
&\quad \cdot \frac{i^{k_2+2}(k_2+1)!}{(2\pi)^{k_2+2}}\Big(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, k_2+2)-\hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, k_2+2)\Big)\cdot\\
&\quad \cdot \frac{(k+1)!(-i)^{k+2} i\pi}{(k_2+1)!(2\pi)^{k+2}}\Big(\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2)+(-1)^{k_1}\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2)\Big)\\
&= -i\frac{(k_1+2)(k_2+2)(k+1)!}{8\pi N^2}\Big(\hat{\zeta}(\frac{a_1}{N}, -k_2)+\hat{\zeta}(-\frac{a_1}{N}, -k_2)\Big)\cdot\\
&\quad \cdot\Big(\hat{\zeta}(\frac{a_2}{N}, k_2+2)-\hat{\zeta}(-\frac{a_2}{N}, k_2+2)\Big)\cdot\\
&\quad \cdot\Big(\hat{\zeta}(\frac{b_1}{N}, k+2)+(-1)^{k_1}\hat{\zeta}(-\frac{b_1}{N}, k+2)\Big)\\
&= -E.
\end{aligned}$$

Au final, on a donc dans ce cas

$$\int^*_{X^k\{0,\infty\}} p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2)) = A.$$

Dans tous les cas, on a donc

$$\int^*_{X^k\{0,\infty\}} p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2)) = A^{k_1,k_2}(u_1,u_2).$$

Démonstration du théorème 1.1. — Rappelons que la forme différentielle $\operatorname{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\operatorname{Eis}^{k_1,k_2}_{\mathcal{D}}(u_1,u_2) &= p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2))\\
&\qquad + (-1)^{k_1+1}\pi_{k_1+1}(p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathrm{hol}}(u_1)) \wedge p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathcal{D}}(u_2)\\
&= p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathcal{D}}(u_1) \wedge \pi_{k_2+1}(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathrm{hol}}(u_2))\\
&\qquad + (-1)^{(k_1+1)(k_2+1)} p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathcal{D}}(u_2) \wedge \pi_{k_1+1}(p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathrm{hol}}(u_1)).
\end{aligned}$$

Notons $\theta : E^k \to E^k$ l'isomorphisme défini par

$$\theta : E^k = E^{k_2} \times_{Y(N)} E^{k_1} \xrightarrow{\cong} E^{k_1} \times_{Y(N)} E^{k_2} = E^k.$$

Cet isomorphisme laisse stable le cycle de Shokurov $X^k\{0,\infty\}$ en multipliant l'orientation par $(-1)^{k_1k_2}$. Il vient donc

$$\begin{aligned}
&\int^*_{X^k\{0,\infty\}} p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathcal{D}}(u_2) \wedge \pi_{k_1+1}(p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathrm{hol}}(u_1))\\
&= (-1)^{k_1k_2}\int^*_{X^k\{0,\infty\}} \theta^*\left(p_2^* \operatorname{Eis}^{k_2}_{\mathcal{D}}(u_2) \wedge \pi_{k_1+1}(p_1^* \operatorname{Eis}^{k_1}_{\mathrm{hol}}(u_1))\right)\\
&= (-1)^{k_1k_2} A^{k_2,k_1}(u_2,u_1).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_{X^k\{0,\infty\}}^* \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k_1,k_2}(u_1,u_2)\\
&= A^{k_1,k_2}(u_1,u_2) + (-1)^{k_1+k_2+1}A^{k_2,k_1}(u_2,u_1)\\
&= \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k+2}}(2\pi)^{k+1}\Big(i^{k_1-k_2+1}\Lambda^*\Big((G^{(k_2+1)}_{b_2,a_1}+G^{(k_2+1)}_{b_2,-a_1})(G^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2}-G^{(k_1+1)}_{b_1,a_2}),0\Big)\\
&\qquad +(-1)^{k_1+k_2+1}i^{k_2-k_1+1}\Lambda^*\Big((G^{(k_1+1)}_{b_1,a_2}+G^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2})(G^{(k_2+1)}_{b_2,-a_1}-G^{(k_2+1)}_{b_2,a_1}),0\Big)\Big)\\
&= \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{4N^{k+2}}(2\pi)^{k+1}i^{k_1-k_2+1}\cdot\\
&\quad \Lambda^*\Big((G^{(k_2+1)}_{b_2,a_1}+G^{(k_2+1)}_{b_2,-a_1})(G^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2}-G^{(k_1+1)}_{b_1,a_2})-(G^{(k_1+1)}_{b_1,a_2}+G^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2})(G^{(k_2+1)}_{b_2,-a_1}-G^{(k_2+1)}_{b_2,a_1}),0\Big)\\
&= \frac{(k_1+2)(k_2+2)}{2N^{k+2}}(2\pi)^{k+1}i^{k_1-k_2+1}\Lambda^*\Big(G^{(k_2+1)}_{b_2,a_1}G^{(k_1+1)}_{b_1,-a_2}-G^{(k_2+1)}_{b_2,-a_1}G^{(k_1+1)}_{b_1,a_2},0\Big).
\end{aligned}$$

□

Nous terminons par un résultat partiel pour le calcul du régulateur dans le cas où $k_i = 1$ et $b_i = 0$.

Théorème 9.5. — *Soit $k \geq 0$ un entier. Soit $N \geq 3$ un entier, et soient $a, a', b, c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Supposons $(a,b),(a',b) \neq (0,0)$ si $k=0$, et $b \neq 0$ si $k=1$. Alors*

$$\begin{aligned}
&\int_{X^{k+1}\{0,\infty\}}^* \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k,1}((a,b),(c,0)) - \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k,1}((a',b),(c,0))\\
&= \frac{3(k+2)}{2N^{k+3}}(2\pi)^{k+2}i^k\Lambda^*\Big((G^{(2)}_{0,a}-G^{(2)}_{0,a'})G^{(k+1)}_{b,-c}-\big(G^{(2)}_{0,-a}-G^{(2)}_{0,-a'}\big)G^{(k+1)}_{b,c},0\Big)
\end{aligned}$$

Notons que les séries d'Eisenstein $G^{(2)}_{0,a}$ sont seulement quasi-modulaires, mais que les différences $G^{(2)}_{0,a}-G^{(2)}_{0,a'}$ sont modulaires.

Démonstration. — On a comme dans le calcul précédent

$$\begin{aligned}
&\int_{X^{k+1}\{0,\infty\}}^* p_1^*(\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^k(a,b)-\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^k(a',b))\wedge\pi_2(p_2^*\,\mathrm{Eis}^1_{\mathrm{hol}}(c,0))\\
&= A^{k,1}((a,b),(c,0)) - A^{k,1}((a',b),(c,0)) + B^{k,1}((a,b),(c,0)) - B^{k,1}((a',b),(c,0))\\
&\quad + C^{k,1}((a,b),(c,0)) - C^{k,1}((a',b),(c,0)) + D^{k,1}((a,b),(c,0)) - D^{k,1}((a',b),(c,0))\\
&\quad + E^{k,1}((a,b),(c,0)) - E^{k,1}((a',b),(c,0)) + F^{k,1}((a,b),(c,0)) - F^{k,1}((a',b),(c,0)).
\end{aligned}$$

Comme $B^{k,1}((a,b),(c,0))$ ne dépend pas de a, on a $B^{k,1}((a,b),(c,0)) - B^{k,1}((a',b),(c,0)) = 0$. On a également

$$\begin{aligned}
C^{k,1}((a,b),(c,0)) + F^{k,1}((a,b),(c,0)) &= 0\\
C^{k,1}((a',b),(c,0)) + F^{k,1}((a',b),(c,0)) &= 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs les termes D et E ne font pas intervenir b_2, donc le calcul précédent montre que

$$\begin{aligned}
D^{k,1}((a,b),(c,0)) + E^{k,1}((a,b),(c,0)) &= 0\\
D^{k,1}((a',b),(c,0)) + E^{k,1}((a',b),(c,0)) &= 0.
\end{aligned}$$

Il reste

$$\int_{X^{k+1}\{0,\infty\}}^{*} p_1^*(\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^k(a,b)-\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^k(a',b))\wedge\pi_2(p_2^*\,\mathrm{Eis}_{\mathrm{hol}}^1(c,0))$$
$$=A^{k,1}((a,b),(c,0))-A^{k,1}((a',b),(c,0))$$
$$=i^k\frac{3(k+2)}{4N^{k+3}}(2\pi)^{k+2}\Lambda^*\Big((G_{0,a}^{(2)}-G_{0,a'}^{(2)}+G_{0,-a}^{(2)}-G_{0,-a'}^{(2)})(G_{b,-c}^{(k+1)}-G_{b,c}^{(k+1)}),0\Big).\tag{36}$$

D'autre part, en notant $q_1:E^{1+k}\to E$ et $q_2:E^{1+k}\to E^k$ les deux projections canoniques, il vient

$$\int_{X^{k+1}\{0,\infty\}}^{*} q_1^*\,\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^1(c,0)\wedge\pi_{k+1}(q_2^*(\mathrm{Eis}_{\mathrm{hol}}^k(a,b)-\mathrm{Eis}_{\mathrm{hol}}^k(a',b)))$$
$$=A^{1,k}((c,0),(a,b))-A^{1,k}((c,0),(a',b))+B^{1,k}((c,0),(a,b))-B^{1,k}((c,0),(a',b))$$
$$+C^{1,k}((c,0),(a,b))-C^{1,k}((c,0),(a',b))+D^{1,k}((c,0),(a,b))-D^{1,k}((c,0),(a',b))$$
$$+E^{1,k}((c,0),(a,b))-E^{1,k}((c,0),(a',b))+F^{1,k}((c,0),(a,b))-F^{1,k}((c,0),(a',b)).$$

On vérifie directement que tous les termes B à F sont nuls, et il reste

$$\int_{X^{k+1}\{0,\infty\}}^{*} q_1^*\,\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^1(c,0)\wedge\pi_{k+1}(q_2^*(\mathrm{Eis}_{\mathrm{hol}}^k(a,b)-\mathrm{Eis}_{\mathrm{hol}}^k(a',b)))$$
$$=A^{1,k}((c,0),(a,b))-A^{1,k}((c,0),(a',b))$$
$$=i^{2-k}\frac{3(k+2)}{4N^{k+3}}(2\pi)^{k+2}\Lambda^*\Big((G_{0,-a}^{(2)}-G_{0,-a'}^{(2)}-G_{0,a}^{(2)}+G_{0,a'}^{(2)})(G_{b,c}^{(k+1)}+G_{b,-c}^{(k+1)}),0\Big).\tag{37}$$

D'après (36) et (37), on obtient finalement

$$\int_{X^{k+1}\{0,\infty\}}^{*} \mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k,1}((a,b),(c,0))-\mathrm{Eis}_{\mathcal{D}}^{k,1}((a',b),(c,0))$$
$$=A^{k,1}((a,b),(c,0))-A^{k,1}((a',b),(c,0))+(-1)^k\Big(A^{1,k}((c,0),(a,b))-A^{1,k}((c,0),(a',b))\Big)$$
$$=\frac{3(k+2)}{2N^{k+3}}(2\pi)^{k+2}i^k\Lambda^*\left(\big(G_{0,a}^{(2)}-G_{0,a'}^{(2)}\big)G_{b,-c}^{(k+1)}-\big(G_{0,-a}^{(2)}-G_{0,-a'}^{(2)}\big)G_{b,c}^{(k+1)},0\right).$$

□

Références

[1] A. A. Beilinson – « Higher regulators of modular curves », in *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 1–34.

[2] F. Brunault – « Regulators of Siegel units and applications », *J. Number Theory* **163** (2016), p. 542–569.

[3] P. Colmez – « La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique », *Astérisque* (2004), no. 294, p. ix, 251–319.

[4] C. Deninger – « Extensions of motives associated to symmetric powers of elliptic curves and to Hecke characters of imaginary quadratic fields », in *Arithmetic geometry (Cortona, 1994)*, Sympos. Math., XXXVII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 99–137.

[5] C. Deninger & A. J. Scholl – « The Beĭlinson conjectures », in *L-functions and arithmetic (Durham, 1989)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 153, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, p. 173–209.

[6] N. Diamantis, M. Neururer & F. Strömberg – « A correspondence of modular forms and applications to values of L-series », *Research in Number Theory* **1** (2015), p. 1–12.

[7] M. T. Gealy – « On the Tamagawa Number Conjecture for Motives Attached to Modular Forms », Phd thesis, California Institute of Technology, December 2005, `http://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-12162005-124435`.

[8] A. Huber & G. Kings – « Dirichlet motives via modular curves », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 3, p. 313–345.

[9] K. Kato – « p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms », *Astérisque* **295** (2004), p. ix, 117–290, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III).

[10] M. Knopp & S. Robins – « Easy proofs of Riemann's functional equation for $\zeta(s)$ and of Lipschitz summation », *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 7, p. 1915–1922.

[11] T. Miyake – *Modular forms*, english éd., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda.

[12] M. Rogers & W. Zudilin – « From L-series of elliptic curves to Mahler measures », *Compos. Math.* **148** (2012), no. 2, p. 385–414.

[13] N. Schappacher & A. J. Scholl – « The boundary of the Eisenstein symbol », *Math. Ann.* **290** (1991), no. 2, p. 303–321.

[14] B. Schoeneberg – *Elliptic modular functions : an introduction*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974, Translated from the German by J. R. Smart and E. A. Schwandt, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 203.

[15] G. Shimura – « On the holomorphy of certain Dirichlet series », *Proc. London Math. Soc. (3)* **31** (1975), no. 1, p. 79–98.

[16] V. V. Šokurov – « Shimura integrals of cusp forms », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **44** (1980), no. 3, p. 670–718, 720.

[17] J. Sturm – « Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight », *Amer. J. Math.* **102** (1980), no. 2, p. 219–240.

[18] A. Weil – *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Reprint of the 1976 original.

[19] W. Zudilin – « Regulator of modular units and Mahler measures », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **156** (2014), no. 2, p. 313–326.

F. Brunault • *E-mail :* `francois.brunault@ens-lyon.fr`, ÉNS Lyon, UMPA, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France