

DEA de Physique Théorique Rhône-Alpin  
TC3, Introduction à la théorie des champs.  
François Delduc

Ce texte est issu du cours d'introduction à la théorie quantique des champs que j'ai donné dans le DEA de Physique Théorique Rhône-Alpin jusqu'en 2002. Certaines parties sont largement inspirées du cours de mon prédécesseur, Georges Girardi. Il est incomplet, il manque le chapitre consacré aux divergences ultra-violettes et à la renormalisation. Il contient encore certainement des erreurs diverses. Je serai très content si on m'en signale (francois.delduc@ens-lyon.fr).

## 1 Systèmes continus, champs classiques

Dans une première partie de ce cours nous allons étudier la théorie des champs classique, c'est-à-dire non quantique (la constante de Planck  $\hbar$  est nulle). La caractéristique principale d'une théorie des champs est qu'elle possède une infinité continue de variables dynamiques. Jusqu'ici, la plupart des systèmes de mécanique que vous avez étudiés comportaient un ensemble fini ou discret de variables dynamiques  $q_i(t)$ . En théorie des champs, les variables dynamiques dépendent d'un ou plusieurs paramètres continus

$$q_i(t) \longrightarrow q(t, x). \quad (1.1)$$

En général, le paramètre continu  $x$  pourra être interprété comme une coordonnée d'espace, et on a donc une variable dynamique en chaque point de l'espace, que l'on appelle un champ. Il nous faudra donc adapter à ce cas le formalisme ordinaire de la mécanique classique. Nous étudierons successivement le point de vue Lagrangien (action, principe du minimum) et le point de vue Hamiltonien (espace des phases, équations de Hamilton).

Bien entendu, vous connaissez déjà plusieurs exemples de théories des champs. La plus fameuse est l'électromagnétisme. Dans ce cas, les variables dynamiques sont contenues dans le champ électromagnétique  $A_\mu(t, \vec{x})$ . Les équations du mouvement, c'est-à-dire les équations de Maxwell, peuvent être obtenues par un principe d'action. En fait, le grand succès de la théorie des champs quantique est d'avoir permis de décrire l'interaction matière-rayonnement dans le cas quantique relativiste. Les principaux développe-

ments de la théorie des champs quantique avant guerre (Dirac, Fermi, Heisenberg, Pauli) et après guerre (Schwinger, Tomonoga, Feynman, Dyson) se situent dans ce cadre. La description obtenue est un développement perturbatif en puissances de la constante de structure fine, qui reproduit avec une extraordinaire précision les données expérimentales. Nous verrons qu'en électrodynamique quantique, ce n'est pas seulement le rayonnement qui est décrit par un champ, mais aussi la matière.

Un autre exemple simple de théorie des champs est l'acoustique. Dans ce cas, le champ mesure l'écart d'un petit élément du gaz par rapport à sa position d'équilibre. À la différence de l'électrodynamique, l'utilisation d'un champ continu en acoustique est une approximation, qui n'est valable que pour des ondes de longueur d'onde très supérieure au libre parcours moyen des molécules du gaz. Comme dernier exemple, citons l'hydrodynamique. Dans ce cas, on étudie le champ des vitesses au sein du fluide en mouvement, qui satisfait à l'équation de Navier-Stokes. Contrairement aux exemples précédents, dans ce cas l'énergie n'est pas conservée, mais dissipée à courte distance du fait de la viscosité.

## 1.1 Quelques rappels de mécanique analytique

On considère un système mécanique dont la position est décrite par un ensemble fini de coordonnées généralisées  $q = (q_1, \dots, q_N)$ . On supposera que la dynamique de ce système peut être obtenue à partir d'un Lagrangien  $L(q, \dot{q}, t)$  qui dépend des coordonnées  $q$  et des vitesses  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ , et peut aussi dépendre explicitement du temps. L'action du système est l'intégrale du Lagrangien entre l'instant initial et l'instant final

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t). \quad (1.2)$$

L'action est fonction de l'ensemble des valeurs que prennent les fonctions  $q_i(t)$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . C'est une fonction des fonctions  $q_i(t)$ , et on dit que  $S$  est une fonctionnelle de  $q_i(t)$ . C'est bien sûr une généralisation de la notion de fonction d'un ensemble discret de variables. Notons que le Lagrangien est une fonction des positions  $q$  et des vitesses  $\dot{q}$  à un instant donné  $t$ , ce n'est pas une fonctionnelle. Supposons que l'on considère une variation infinitésimale de la trajectoire

$$q_i(t) \longrightarrow q_i(t) + \delta q_i(t), \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad (1.3)$$

au premier ordre dans la variation  $\delta q_i(t)$ , la variation de l'action s'écrit

$$S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \delta q_i(t) \frac{\delta S}{\delta q_i(t)}, \quad \frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.4)$$

Cette équation définit la quantité  $\frac{\delta S}{\delta q_i(t)}$ , qui est appelée dérivée fonctionnelle de l'action  $S$  par rapport à  $q_i(t)$ . C'est une généralisation de la notion de dérivée partielle pour une fonction de variables discrètes.

La trajectoire réellement suivie par le système est celle qui minimise l'action  $S$ . On en déduit que l'action ne change pas lors d'une variation infinitésimale autour de la trajectoire réelle, ce qui se traduit par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (1.5)$$

*Exercice 1.A : On modifie le Lagrangien en lui ajoutant une dérivée totale par rapport au temps*

$$L(q, \dot{q}, t) \longrightarrow \hat{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} K(q, t) \quad (1.6)$$

Montrer que les équations d'Euler-Lagrange ne sont pas modifiées.

*Exercice 1.B : On considère une particule de masse  $m$  placée dans un potentiel unidimensionnel. Le Lagrangien est donné par*

$$L = T - V, \quad T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2, \quad V = -m \frac{\alpha}{q^2}. \quad (1.7)$$

*Établir les équations du mouvement. Montrer que l'énergie  $E = T + V$  est conservée. On suppose que la particule se trouve initialement à la position  $-Q$  très grande négative. Dans cette région, le potentiel est négligeable et la particule peut être considérée comme libre. On note sa vitesse initiale  $v_{as} > 0$ . Montrer que le temps nécessaire pour atteindre la position  $+Q$  s'écrit*

$$t_{int} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-Q}^{+Q} dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}, \quad E = \frac{1}{2} m v_{as}^2. \quad (1.8)$$

*Si la particule était libre ( $V = 0$ ) et partait du même point  $-Q$  avec la même vitesse  $v_{as}$ , il mettrait un temps  $t_l$  pour atteindre la position  $Q$ . Calculer le décalage en temps entre la particule en interaction et la particule libre*

$$\Delta t = \lim_{Q \rightarrow \infty} (t_{int} - t_l). \quad (1.9)$$

Justifier le signe de  $\Delta t$ .

Pour passer du formalisme Lagrangien au formalisme Hamiltonien, on introduit les variables conjuguées  $p = (p^1, \dots, p^N)$  des vitesses  $\dot{q}$  définies par

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.10)$$

Dans la suite, on admettra que la donnée d'un point  $(q, p)$  dans l'espace des phases est équivalent à la donnée des positions et vitesses du système. En d'autres termes, le passage des coordonnées  $q$  et vitesses  $\dot{q}$  aux coordonnées  $q$  et moments conjugués  $p$  est un changement de variables inversible. Le Hamiltonien est alors défini par la transformation de Legendre

$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i p^i - L(q, \dot{q}, t). \quad (1.11)$$

Dans toute la suite, on utilisera toujours, sauf indication contraire, la convention d'Einstein qui prévoit que si un indice apparaît deux fois dans une formule, une sommation sur les valeurs de l'indice répété est sous-entendue. Avec cette convention, la formule précédente s'écrit

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p^i - L(q, \dot{q}, t). \quad (1.12)$$

Le Hamiltonien  $H$  est une fonction des variables de l'espace des phases  $q, p$ , et peut dépendre explicitement du temps. Les équations du mouvement sont les équations de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (1.13)$$

Il est commode de réécrire ces équations en utilisant le crochet de Poisson. Si  $F(q, p)$  et  $G(q, p)$  sont deux fonctions sur l'espace des phases, leur crochet de Poisson est une troisième fonction sur l'espace des phases définie par

$$\{F, G\}(q, p) = \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) (q, p). \quad (1.14)$$

On déduit immédiatement de cette équation les crochets de Poisson élémentaires

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p^i, p^j\} = 0, \quad \{q_i, p^j\} = \delta_i^j, \quad (1.15)$$

où  $\delta_i^j$  est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 lorsque  $i$  et  $j$  coïncident, et 0 si ils sont différents. Le crochet de Poisson possède trois propriétés importantes. Il est antisymétrique

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad (1.16)$$

il satisfait à l'identité de Jacobi

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0, \quad (1.17)$$

et enfin, il obéit à la règle de Leibnitz

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + G\{F, H\}. \quad (1.18)$$

Si  $F(q, p, t)$  est une fonction sur l'espace des phases qui peut dépendre explicitement du temps, son évolution est donnée par l'équation

$$\frac{d}{dt}F(q, p, t) = \{F, H\}(q, p, t) + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{q,p}, \quad (1.19)$$

où le second terme du membre de droite prend en compte la dépendance explicite de  $F$  par rapport au temps.

Rappelons que l'on appelle transformation canonique un changement de variables de l'espace des phases

$$q_i, p^i \longrightarrow Q_i, P^i \quad (1.20)$$

qui laisse invariant le crochet de Poisson, c'est-à-dire tel que si  $F$  et  $G$  sont deux fonctions sur l'espace des phases

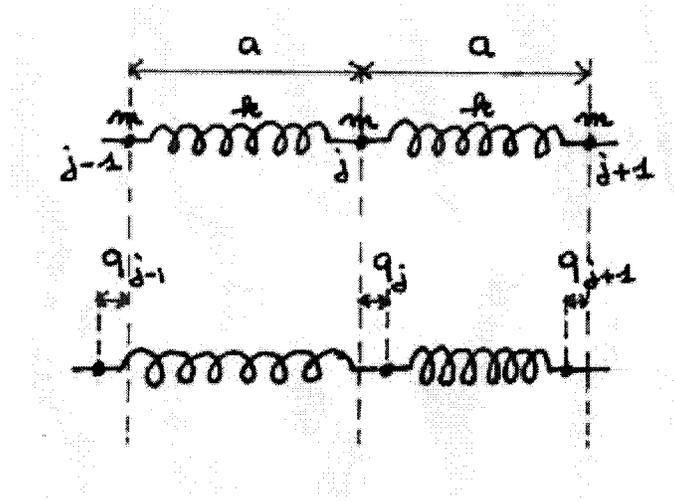
$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P^i} - \frac{\partial F}{\partial P^i} \frac{\partial G}{\partial Q_i}. \quad (1.21)$$

L'évolution elle-même consiste en des transformations canoniques successives. Si l'état du système est caractérisé à l'instant  $t = 0$  par  $q_i(0) = q_i$ ,  $p^i(0) = p^i$  et à l'instant  $t = T$  par  $q_i(T) = Q_i$ ,  $p^i(T) = P^i$ , le changement de variables dans l'espace des phases  $q_i, p^i \rightarrow Q_i, P^i$  est une transformation canonique.

*Exercice 1.C : On considère à nouveau la modification 1.6 du Lagrangien. Montrer que les moments conjugués après modification  $\hat{p}^i$  sont liés aux moments conjugués avant modification  $p^i$  par  $\hat{p}^i = p^i + \frac{\partial}{\partial q_i} K(q, t)$ . Donner l'expression du Hamiltonien  $\hat{H}(q, \hat{p}, t)$  après modification en fonction du Hamiltonien  $H(q, p)$  avant modification et de  $K$ . Montrer que le changement de variables de l'espace des phases  $q_i, p^i \rightarrow q_i, \hat{p}^i$  est une transformation canonique.*

## 1.2 Du discret au continu

On va considérer un système très simple pour illustrer le passage d'un système discret à un système continu. On considère une chaîne infinie de points massifs liés deux à deux par des ressorts sans masse de raideur  $k$ . Tous les points ont la même masse  $m$ , et la distance au repos entre deux points successifs est  $a$ . On note  $q_j$  le déplacement de la masse  $j$  par rapport à sa position d'équilibre.



Le Lagrangien de ce système s'écrit

$$L = T - V, \quad T = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2, \quad V = \sum_j \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2. \quad (1.22)$$

Dans la suite, il sera commode d'écrire le Lagrangien (1.22) sous la forme

$$L = a \sum_j L_j, \quad L_j = \frac{1}{2} \left[ \frac{m}{a} \dot{q}_j^2 - ka \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{a} \right)^2 \right]. \quad (1.23)$$

Notons que dans le système considéré, l'interaction entre les masses ponctuelles est à courte portée, uniquement entre plus proches voisins. Les équations du mouvement, écrites sous une forme adaptée à la limite continue, sont données par

$$-\frac{m}{a} \ddot{q}_j - ka \frac{2q_j - q_{j+1} - q_{j-1}}{a^2} = 0 \quad (1.24)$$

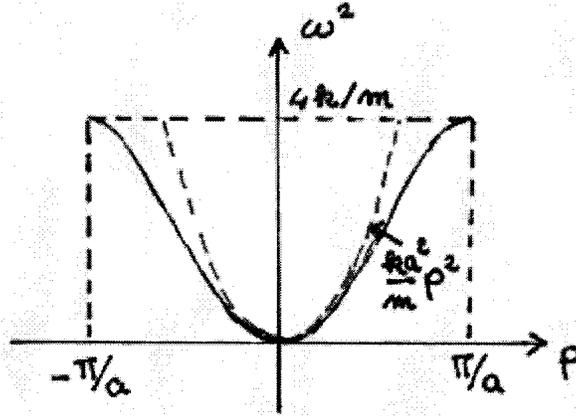
C'est un système d'équations linéaires, dont on peut chercher les solutions en ondes planes

$$q_j(t) = qe^{i(\omega t - py_j)}, \quad y_j = ja. \quad (1.25)$$

Cette expression ne change pas si l'on ajoute à  $p$  un multiple de  $\frac{2\pi}{a}$ , on peut donc se limiter à  $-\frac{\pi}{a} \leq p \leq \frac{\pi}{a}$ . On trouve que l'onde plane est solution des équations du mouvement si la relation de dispersion

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}(1 - \cos ap) \quad (1.26)$$

est satisfaite.



Si l'on se limite à des valeurs de  $p$  très petites devant  $\frac{2\pi}{a}$ , c'est-à-dire à des ondes de longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{p}$  très grande devant la distance entre deux masses  $a$ , la relation de dispersion devient linéaire

$$\omega^2 = \frac{ka^2}{m} p^2. \quad (1.27)$$

On a donc des ondes planes se propageant à la vitesse  $v = \left| \frac{\omega}{p} \right| = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}$ . Puisqu'on étudie seulement les ondes de grandes longueurs d'onde, on s'attend à ce que le caractère discret à courte distance du système puisse être oublié, et qu'on puisse le décrire par des variables continues. Cette limite continue est obtenue en faisant tendre l'intervalle  $a$  entre deux masses vers zéro, en respectant les règles suivantes

- $a \rightarrow 0$
- $\frac{m}{a} \rightarrow \mu$  (densité linéique de masse)
- $ka \rightarrow \kappa$  (module d'Young)
- $y_j = ja \rightarrow y$  (variable continue)
- $q_j(t) \rightarrow q(t, y)$  (champ)
- $\frac{q_{j+1} - q_j}{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} q(t, y)$
- $a \sum_j \rightarrow \int dy$

Le Lagrangien du système continu s'écrit alors

$$L[q, \frac{\partial q}{\partial t}] = \int dy \mathcal{L} \left( q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial y} \right), \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \kappa \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (1.28)$$

La fonction  $\mathcal{L}$  est appelée densité lagrangienne. Elle dépend du champ  $q$  et de ses dérivées temporelle et spatiale. Notons que le Lagrangien  $L$  dans (1.28) est maintenant lui-même une fonctionnelle, qui dépend des valeurs du champ  $q$  et de sa dérivée par rapport au temps  $\frac{\partial q}{\partial t}$  en tout point  $y$ , mais à un instant donné  $t$ . L'action est l'intégrale sur le temps du Lagrangien

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dy \mathcal{L} \left( q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial y} \right). \quad (1.29)$$

Dans l'action (1.29), les paramètres de temps  $t$  et d'espace  $y$  jouent des rôles tout à fait similaires. Il faut insister sur le fait que les variables dynamiques sont les champs en chaque point,  $y$  joue donc le rôle d'un "indice continu". Le Lagrangien obtenu décrit par exemple la dynamique d'une corde vibrante, mais des Lagrangiens très similaires apparaissent dans de nombreux systèmes physiques

L'action est une fonctionnelle de  $q$  qui dépend des valeurs du champ en tout point de l'espace et du temps. Le fait qu'on soit parti d'un système discret ne comportant que des interactions à courte portée se traduit dans la limite continue par le fait que l'action (1.29) est l'intégrale sur l'espace-temps d'une fonction  $\mathcal{L}$  qui ne dépend que des valeurs du champ et de ses dérivées en un point de l'espace et du temps. On dit que l'action (1.29) est une fonctionnelle locale du champ.

*Exercice 1.D : Supposons que l'on remplace le potentiel  $V$  dans (1.22) par le suivant*

$$V = a^2 \sum_{j < l} \frac{1}{2} \sigma (q_j - q_l)^2. \quad (1.30)$$

On a maintenant une interaction à longue portée, puisque toutes les masses sont reliées entre elles par des ressorts de même raideur  $a^2\sigma$ . En supposant que le paramètre  $\sigma$  reste fini dans la limite  $a \rightarrow 0$ , donner l'action du système dans la limite continue. Cette action est-elle une fonctionnelle locale ?

Les solutions des équations du mouvement sont les minima de l'action (1.29). On considère une variation infinitésimale du champ

$$q(t, y) \longrightarrow q(t, y) + \delta q(t, y), \quad \delta q(t_1, y) = \delta q(t_2, y) = 0. \quad (1.31)$$

On supposera que la variation  $\delta q(t, y)$  s'annule en dehors d'un intervalle fini en  $y$ . La variation de l'action (1.29) s'écrit alors

$$\begin{aligned} S[q + \delta q] - S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int dy \delta q(t, y) \frac{\delta S}{\delta q(t, y)}, \\ \frac{\delta S}{\delta q(t, y)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_y}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\frac{\delta S}{\delta q(t, y)} = 0 \Leftrightarrow -\mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0. \quad (1.33)$$

C'est une équation d'onde, la vitesse de propagation des ondes s'écrivant  $v = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ . Toute solution peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes

$$q(t, y) = \int \frac{dp}{2\pi} (a(p)e^{i(\omega t + py)} + \bar{a}(p)e^{-i(\omega t + py)}), \quad \omega = v|p|. \quad (1.34)$$

On va maintenant étudier la même limite continue dans le cadre du formalisme Hamiltonien. Les moments conjugués  $p^i$  des variables dynamiques  $q_j$  s'écrivent

$$p^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = a \frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}_j} = m \dot{q}_j. \quad (1.35)$$

Le Hamiltonien s'écrit

$$H(q_j, p^j) = \dot{q}_j p^j - L = T + V = \sum_j \left( \frac{1}{2m} (p^j)^2 + \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \right). \quad (1.36)$$

Afin de préparer la limite continue, on réécrit cette formule sous la forme

$$H(q_j, p^j) = a \sum_j \left( \dot{q}_j \frac{p^j}{a} - L_j \right) = a \sum_j \left( \frac{a}{2m} \left( \frac{p^j}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} k a \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{a} \right)^2 \right). \quad (1.37)$$

Les crochets de Poisson élémentaires s'écrivent comme dans (1.15). Dans la limite  $a \rightarrow 0$ , la masse  $m$  de chaque point matériel tend vers 0, et donc l'impulsion de chaque point matériel tend vers 0. La quantité qui reste finie dans la limite continue est la densité linéique de moment

$$\pi^j(t) = \frac{p^j(t)}{a} = \frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}_j} \rightarrow \pi(t, y) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(t, y)} \quad (1.38)$$

Du fait du rôle particulier joué par le temps dans le formalisme hamiltonien, il sera parfois commode d'utiliser les notations

$$q(t, y) \equiv q_t(y), \quad \pi(t, y) \equiv \pi_t(y). \quad (1.39)$$

Les crochets de Poisson des densités de moment  $\pi^j$  avec les variables dynamiques  $q_j$  s'écrivent dans le modèle discret

$$\{q_j(t), \pi^{j'}(t)\} = \frac{1}{a} \delta_j^{j'}. \quad (1.40)$$

La limite lorsque  $a \rightarrow 0$  du membre de droite de cette équation n'est autre que la distribution de Dirac

$$\frac{1}{a} \delta_j^{j'} \rightarrow \delta(y - y') \quad (1.41)$$

On obtient alors, dans la limite continue, les expressions suivantes pour le Hamiltonien et le crochet de Poisson

$$\begin{aligned} H[q_t, \pi_t] &= \int dy \left( \frac{\partial q}{\partial t}(t, y) \pi(t, y) - \mathcal{L} \left( \frac{\partial q}{\partial t}(t, y), \frac{\partial q}{\partial y}(t, y) \right) \right) \\ &= \int dy \left( \frac{1}{2\mu} (\pi_t(y))^2 + \frac{1}{2} \kappa \left( \frac{\partial}{\partial y} q_t(y) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\{q_t(y), \pi_t(y')\} = \delta(y - y'). \quad (1.43)$$

Notons que l'espace des phases est paramétré par les valeurs du champ  $q_t(y)$  et de la densité de moment  $\pi_t(y)$  en tout point  $y$  à un instant donné, par exemple  $t = 0$ . L'espace de phase est donc un espace de fonctions, et le Hamiltonien est une fonctionnelle. La notion de dérivée partielle va donc être remplacée par celle de dérivée fonctionnelle. Soit  $F[q_t, \pi_t]$  une fonctionnelle sur l'espace des phases. On considère deux points voisins  $q_t, \pi_t$  et  $q_t + \delta q_t, \pi_t + \delta \pi_t$  de l'espace de phase. Les fonctions  $\delta q_t(y)$  et  $\delta \pi_t(y)$  sont infinitésimales

et s'annulent en dehors d'un intervalle borné. La variation de la fonctionnelle  $F$  entre ces deux points s'écrit alors au plus bas ordre

$$F[q_t + \delta q_t, \pi_t + \delta \pi_t] - F[q_t, \pi_t] = \int dy \left( \delta q_t(y) \frac{\delta F}{\delta q_t(y)} + \delta \pi_t(y) \frac{\delta F}{\delta \pi_t(y)} \right). \quad (1.44)$$

Cette équation définit les dérivées fonctionnelles de  $F$  par rapport à  $q_t(y)$  et  $\pi_t(y)$ . Par exemple, les dérivées fonctionnelles du hamiltonien s'écrivent

$$\frac{\delta H}{\delta q_t(y)} = -\kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} q_t(y), \quad \frac{\delta H}{\delta \pi_t(y)} = \frac{1}{\mu} \pi_t(y). \quad (1.45)$$

Si  $F[q_t, \pi_t]$  et  $G[q_t, \pi_t]$  sont deux fonctionnelles sur l'espace des phases, leur crochet de Poisson s'écrit

$$\{F, G\}[q_t, \pi_t] = \int dy \left( \frac{\delta F}{\delta q_t(y)} \frac{\delta G}{\delta \pi_t(y)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_t(y)} \frac{\delta G}{\delta q_t(y)} \right), \quad (1.46)$$

qui est la généralisation pour un système continu de l'équation (1.14). Pour une fonctionnelle  $F[q_t, \pi_t, t]$  qui peut dépendre explicitement du temps, l'équation d'évolution s'écrit

$$\frac{d}{dt} F[q_t, \pi_t, t] = \{F, H\}[q_t, \pi_t, t] + \frac{\partial}{\partial t} F[q_t, \pi_t, t] \Big|_{q_t, \pi_t}, \quad (1.47)$$

où, comme dans l'équation (1.19), le second terme du membre de droite mesure la dépendance explicite de  $F$  par rapport au temps.

*Exercice 1.E : On note  $\frac{\partial q}{\partial t}(t, y) \equiv \dot{q}_t(y)$ . Le Lagrangien du système continu est l'intégrale sur l'espace de la densité lagrangienne*

$$L[q_t, \dot{q}_t] = \int dy \mathcal{L} \left( \frac{\partial q}{\partial t}(t, y), \frac{\partial q}{\partial y}(t, y) \right). \quad (1.48)$$

*Le Lagrangien est une fonctionnelle du champ  $q_t(y)$  et de la vitesse  $\dot{q}_t(y)$  à un instant donné. Montrer que les équations du mouvement (1.32) s'écrivent*

$$\frac{\delta L}{\delta q_t(y)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_t(y)} = 0, \quad (1.49)$$

*qui est identique à la seconde des équations dans (1.5). Montrer que l'on a les équations*

$$\pi_t(y) = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_t(y)}, \quad H[q_t, \pi_t] = \int dy \dot{q}_t(y) \pi_t(y) - L[q_t, \dot{q}_t], \quad (1.50)$$

analogues respectivement à (1.10) et (1.12).

On va maintenant développer le formalisme général de la théorie des champs classique, d'abord dans le cadre lagrangien, puis dans le cadre hamiltonien.

### 1.3 Champs classiques : Formulation lagrangienne

On appellera champ classique une fonction  $\varphi(x)$  d'un ensemble de variables  $x = (x^0, x^1, \dots, x^{D-1})$ , où  $x^0 = t$  est la variable de temps, et  $x^1, \dots, x^{D-1}$  sont des paramètres d'espace. On utilisera la notation  $x^I$ ,  $I = 0, \dots, D-1$  pour désigner une variable quelconque d'espace-temps, et  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, D-1$  lorsqu'on se limitera aux variables d'espace. Les variables d'espace-temps prennent leurs valeurs dans un domaine  $\Omega^D = \mathbb{R} \times \Omega^{D-1}$  de  $\mathbb{R}^D$ .  $\Omega^{D-1}$  est le domaine de variation des paramètres d'espace. On notera  $\partial\Omega^{D-1}$  le bord du domaine spatial, et dans la suite on supposera que la valeur du champ sur  $\partial\Omega^{D-1}$  est fixée. On parle dans ce cas de conditions aux limites de Dirichlet. À titre d'exemple, on pourrait supposer que la corde vibrante étudiée au paragraphe précédent 1.2 s'étend seulement de  $y = 0$  à  $y = L$  ( $\Omega^1 = [0, L]$ ), et qu'elle est fixée en ces points  $q(t, 0) = q(t, L) = 0$ . On ne considérera donc pas pour l'instant le cas de conditions aux limites libres (conditions aux limites de Neumann).

On utilisera la notation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^I} = \partial_I\varphi. \quad (1.51)$$

La dynamique du champ  $\varphi$  est déterminée par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x) \quad (1.52)$$

qui est une fonction du champ et de ses dérivées premières en un point de l'espace-temps, et peut dépendre explicitement du temps et de l'espace. L'action correspondante s'écrit

$$S_\Omega[\varphi] = \int_{\Omega^D} d^D x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.53)$$

L'action est une fonctionnelle locale du champ, elle possède la propriété que si le domaine  $\Omega^D$  est l'union de deux domaines  $\Omega_1^D$  et  $\Omega_2^D$ , l'action totale est la somme des actions restreintes à chaque domaine

$$S_\Omega[\varphi] = S_{\Omega_1}[\varphi] + S_{\Omega_2}[\varphi], \quad S_{\Omega_i}[\varphi] = \int_{\Omega_i^D} d^D x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x). \quad (1.54)$$

Les équations du mouvement sont obtenues en demandant que l'action sur tout domaine compact  $\Lambda^D \subset \Omega^D$  soit minimale. On considère une variation infinitésimale du champ

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x), \quad \delta\varphi(x) = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Lambda^D. \quad (1.55)$$

Au plus bas ordre en  $\delta\varphi$ , la variation de l'action s'écrit alors

$$\begin{aligned} S_\Lambda[\varphi + \delta\varphi] - S_\Lambda[\varphi] &= \int_{\Lambda^D} \delta\varphi(x) \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}, \\ \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} - \partial_I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_I\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Les équations (1.55), (1.56) définissent la quantité  $\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}$ , dérivée fonctionnelle de l'action  $S$  par rapport au champ. Les équations du mouvement s'écrivent donc

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} = 0 \iff \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} - \partial_I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_I\varphi(x)} = 0. \quad (1.57)$$

On vérifie facilement que l'addition à la densité lagrangienne d'une divergence

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x) \longrightarrow \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x) + \partial_I K^I(\varphi(x), x), \quad (1.58)$$

ne modifie pas les équations du mouvement.

*Exercice 1.F :* Soit  $\Gamma[\varphi]$  une fonctionnelle quelconque du champ, et  $x$  un point intérieur à  $\Omega^D$ . La dérivée fonctionnelle de  $\Gamma$  par rapport à  $\varphi(x)$  est obtenue en considérant une variation  $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$  à support compact, et en écrivant la variation de la fonctionnelle sous la forme

$$\Gamma[\varphi + \delta\varphi] - \Gamma[\varphi] = \int d^D x \delta\varphi(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)}. \quad (1.59)$$

Calculer la dérivée fonctionnelle  $\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)}$  pour les fonctionnelles suivantes. (a)  $\Gamma[\varphi] = \int d^D x \frac{1}{2}(\varphi(x))^2$ , (b)  $\Gamma[\varphi] = \int d^D x \frac{1}{2}\eta^{IJ} \partial_I\varphi \partial_J\varphi$ ,  $\eta^{IJ} = \eta^{JI}$ , (c)  $\Gamma[\varphi] = \varphi(x_0)$ , (d)  $\Gamma[\varphi] = \int d^D x \int d^D y \frac{1}{2}\varphi(x)G(x, y)\varphi(y)$ ,  $G(x, y) = G(y, x)$ .

*Exercice 1.G :* À quatre dimensions d'espace-temps ( $\Omega^4 = \mathbb{R}^4$ ), on considère un champ complexe  $\psi(t, \vec{x})$ ,  $\bar{\psi}(t, \vec{x})$  dont la dynamique est déterminée par la densité lagrangienne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial\psi, \partial\bar{\psi}, x) &= i\bar{\psi}(t, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \bar{\psi}(t, \vec{x}) \vec{\nabla} \psi(t, \vec{x}) \\ &\quad - \bar{\psi}(t, \vec{x}) V(\vec{x}) \psi(t, \vec{x}), \end{aligned} \quad (1.60)$$

où  $\vec{\nabla}$  est le gradient par rapport aux 3 dimensions d'espace et  $V(\vec{x})$  est une fonction des trois variables d'espace. Donner les équations du mouvement. Comme d'habitude dans le cas de variables complexes, lorsqu'on calcule des dérivées, ou des variations infinitésimales, on considérera  $\psi$  et son complexe conjugué  $\bar{\psi}$  comme indépendants. Avez-vous déjà rencontré ces équations au cours de vos brillantes études ? La densité lagrangienne (1.60) a la désagréable propriété de ne pas être réelle. Montrer que sa partie imaginaire s'écrit

$$\mathcal{L} - \bar{\mathcal{L}} = i \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\psi} \psi). \quad (1.61)$$

En déduire qu'on obtiendrait les mêmes équations du mouvement à partir de la densité lagrangienne réelle  $\frac{1}{2}(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}})$ .

**Remarque :** Comme dans le cas de variables discrètes, on peut considérer des changements de variables fonctionnels

$$\varphi(x) \rightarrow \psi(x) \equiv \psi[\varphi](x) \quad (1.62)$$

où la notation  $\psi[\varphi](x)$  signifie que la nouvelle fonction  $\psi(x)$  est en chaque point  $x$  une fonctionnelle de  $\varphi$ . On suppose ce changement de variable inversible, c'est-à-dire que l'on peut également exprimer  $\varphi(x) = \varphi[\psi](x)$  en fonction de  $\psi$ . Tout fonctionnelle  $\Gamma[\varphi]$  de  $\varphi$  peut également être considérée comme une fonctionnelle  $\gamma[\psi] = \Gamma[\varphi[\psi]]$  de  $\psi$ , et l'on a la règle de dérivation

$$\frac{\delta \gamma}{\delta \psi(x)} = \int d^D y \frac{\delta \varphi(y)}{\delta \psi(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(y)}, \quad (1.63)$$

qui est une généralisation directe de la règle de changement de variables dans les dérivées partielles.

## 1.4 Champs classiques : Formulation hamiltonienne

Pour la théorie des champs considérée dans le paragraphe précédent, on définit la densité de moment conjugué par

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi(x)}{\partial t}}. \quad (1.64)$$

Afin de souligner le rôle particulier joué par le temps dans le formalisme hamiltonien, il sera utile d'utiliser les notations

$$\varphi(x) = \varphi_t(\vec{x}), \quad \pi(x) = \pi_t(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x^1, \dots, x^{D-1}). \quad (1.65)$$

Le Hamiltonien du système est donné par

$$H[\varphi_t, \pi_t, t] = \int_{\Omega^{D-1}} d^{D-1}x \left( \pi(x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x) \right). \quad (1.66)$$

Dans le membre de droite de cette équation, la variable  $x^0$  est prise égale à  $t$ . Le Hamiltonien est une fonctionnelle des variables de l'espace des phases  $\varphi_t(\vec{x})$ ,  $\pi_t(\vec{x})$  en tout point  $\vec{x}$  de l'espace à un instant donné  $t$ . Le Hamiltonien peut également dépendre explicitement du temps  $t$ . Le crochet de Poisson de deux fonctionnelles  $F[\varphi_t, \pi_t]$  et  $G[\varphi_t, \pi_t]$  sur l'espace des phases s'écrit

$$\{F, G\}[\varphi_t, \pi_t] = \int_{\Omega^{D-1}} d^{D-1}x \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_t(\vec{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi_t(\vec{x})} - \frac{\delta F}{\delta \pi_t(\vec{x})} \frac{\delta G}{\delta \varphi_t(\vec{x})} \right). \quad (1.67)$$

On déduit de cette équation les crochets de Poisson élémentaires

$$\begin{aligned} \{\varphi_t(\vec{x}), \varphi_t(\vec{y})\} &= 0, & \{\pi_t(\vec{x}), \pi_t(\vec{y})\} &= 0, \\ \{\varphi_t(\vec{x}), \pi_t(\vec{y})\} &= \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (1.68)$$

L'évolution d'une fonctionnelle  $F[\varphi_t, \pi_t, t]$  sur l'espace des phases, qui peut dépendre explicitement du temps, est donnée par

$$\frac{d}{dt} F[\varphi_t, \pi_t, t] = \{F, H\}[\varphi_t, \pi_t] + \left. \frac{\partial}{\partial t} F[\varphi_t, \pi_t, t] \right|_{\varphi_t, \pi_t}. \quad (1.69)$$

On en déduit les équations de Hamilton pour les variables de l'espace des phases

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(\vec{x}) = \frac{\delta H}{\delta \pi_t(\vec{x})}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \pi_t(\vec{x}) = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_t(\vec{x})}. \quad (1.70)$$

## 1.5 Symétries et théorème de Noether en mécanique

Commençons par rappeler quelques faits bien connus sur les symétries en mécanique classique. Considérons une particule de masse  $m$  placée dans un potentiel central. L'action est donnée par

$$S[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}), \quad L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}^2). \quad (1.71)$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \Leftrightarrow m \ddot{x}^i = -\frac{\partial}{\partial x^i} V(\vec{x}^2), \quad a = 1, 2 \quad (1.72)$$

Considérons la transformation

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{y} = -\vec{x}. \quad (1.73)$$

On montre facilement qu'en terme des nouvelles variables  $\vec{y}(t)$ , les équations du mouvement gardent la même forme

$$m\ddot{y}^i = -\frac{\partial}{\partial y^i} V(\vec{y}^2) \quad (1.74)$$

On en déduit que si l'on connaît une solution  $\vec{x}_0(t)$  des équations du mouvement, alors sa transformée  $\vec{y}_0(t) = -\vec{x}_0(t)$  est une solution des mêmes équations du mouvement. On dit que la transformation (1.73) est une symétrie des équations du mouvement.

De manière plus générale, considérons une transformation quelconque du système

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}'. \quad (1.75)$$

On supposera la transformation (1.75) inversible, c'est-à-dire qu'on peut exprimer les variables  $\vec{x}'$  en fonction des variables  $\vec{x}$ , ou bien les variables  $\vec{x}$  en fonction des variables  $\vec{x}'$ . On dira que cette transformation est une symétrie si les équations du mouvement pour les variables  $\vec{x}'$  ont la même forme que les équations du mouvement pour les variables  $\vec{x}$

$$m\ddot{x}'^i = -\frac{\partial}{\partial x'^i} V(\vec{x}'^2) \quad (1.76)$$

Que peut on dire sur ce qui arrive à l'action dans une telle transformation ? Pour discuter cette question, on va distinguer deux points de vue sur la transformation (1.75).

Dans le premier, dit point de vue passif, on suppose que l'on a deux observateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  qui utilisent des règles différentes pour repérer les points de l'espace. À un même point de l'espace,  $\mathcal{O}$  attribue les coordonnées  $\vec{x}$  alors que  $\mathcal{O}'$  lui attribue les coordonnées  $\vec{x}'$ . La transformation (1.75) est la donnée des règles qui permettent de passer d'un système de référence à l'autre. L'action  $S$  ne dépend que de la trajectoire suivie par la particule entre  $t_1$  et  $t_2$ , et pas de la façon dont on la repère. Néanmoins, chaque observateur calcule la valeur de l'action en utilisant son propre système de référence. Pour  $\mathcal{O}$ , l'action s'écrit

$$S_{\mathcal{O}}[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}), \quad (1.77)$$

et pour  $\mathcal{O}'$ , en utilisant les règles de changement de système de référence

$$S_{\mathcal{O}'}[\vec{x}'] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}(\vec{x}'), \frac{d}{dt} \vec{x}(\vec{x}')), \quad S_{\mathcal{O}'}[\vec{x}'] = S_{\mathcal{O}}[\vec{x}]. \quad (1.78)$$

Les deux observateurs expriment donc la même action dans des coordonnées différentes. Comme les fonctionnelles  $S_{\mathcal{O}}[\vec{x}]$  et  $S_{\mathcal{O}'}[\vec{x}']$  sont les mêmes, elles ont bien sûr leurs minima aux mêmes points. En d'autres termes, si  $\vec{x}_0(t)$  est solution des équations du mouvement déduites de  $S_{\mathcal{O}}[\vec{x}]$ , alors sa transformée  $\vec{x}'_0(t)$  est solution des équations du mouvement déduites de  $S_{\mathcal{O}'}[\vec{x}']$ . Cela signifie-t-il que toute transformation est une symétrie ? Pas du tout, car l'action exprimée dans le second système de référence ne fait en général pas intervenir le même Lagrangien

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{O}'}[\vec{x}'] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}(\vec{x}'), \frac{d}{dt} \vec{x}(\vec{x}')) = \int_{t_1}^{t_2} dt L'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}'), \\ &\iff L'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}') = L(\vec{x}(\vec{x}'), \frac{d}{dt} \vec{x}(\vec{x}')). \end{aligned} \quad (1.79)$$

Les équations du mouvement pour  $\mathcal{O}'$

$$\frac{\delta S_{\mathcal{O}'}}{\delta x'_i(t)} = 0 \iff \frac{\partial L'}{\partial x'_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_i} = 0 \quad (1.80)$$

n'ont donc en général pas la même forme que les équations du mouvement pour  $\mathcal{O}$ . Pour que l'on ait une symétrie, et donc que les équations du mouvement gardent la même forme, une condition suffisante est que le Lagrangien ne change pas, ou plutôt qu'il ne change que par une dérivée totale par rapport au temps

$$L'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}') = L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}') + \frac{d}{dt} K(\vec{x}'), \quad (1.81)$$

ou encore, en utilisant (1.79)

$$\boxed{L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}') + \frac{d}{dt} K(\vec{x}')} \quad (1.82)$$

Si cette condition est satisfaite, la transformation (1.75) est appelée une symétrie de l'action (1.71). On vérifie facilement que l'inversion (1.73) est une symétrie de l'action, et dans ce cas les lois physiques sont les mêmes pour  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ .

Dans le second point de vue, dit point de vue actif, on suppose que l'observateur fait effectivement une transformation du système physique. Par

exemple, il étudie la particule précédente dans une position et avec une vitesse tournées par rapport à la précédente (rotation), ou autre. Dans ce cas, la transformation (1.75) associe à un point  $\vec{x}$  de l'espace un autre point  $\vec{x}'$  dans le même système de référence. Comme c'est le même système qui est étudié avant et après transformation, on doit bien sûr utiliser le même lagrangien

$$S[\vec{x}'] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}'). \quad (1.83)$$

Comme on utilise le même Lagrangien, les équations du mouvement auront nécessairement la même forme. Cependant, en général les fonctionnelles  $S[\vec{x}]$  et  $S[\vec{x}']$  ne coïncident pas

$$S[\vec{x}] \neq S[\vec{x}'[\vec{x}]], \quad (1.84)$$

et donc ces deux fonctionnelles n'ont pas leurs minima aux mêmes points. En d'autres termes, si  $\vec{x}_0(t)$  est une trajectoire solution des équations du mouvement, sa transformée  $\vec{x}'_0(t)$  n'est en général pas solution des équations du mouvement. Pour que les minima coïncident, une condition suffisante est que les fonctionnelles  $S[\vec{x}]$  et  $S[\vec{x}']$  coïncident, ou du moins coïncident à l'intégrale d'une dérivée par rapport au temps près

$$S[\vec{x}] = S[\vec{x}'] + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} K(\vec{x}'). \quad (1.85)$$

Cette équation doit être satisfaite pour toute trajectoire  $x(t)$ , ce qui conduit à nouveau à l'équation (1.81). On obtient donc la même condition caractérisant les symétries de l'action dans les deux points de vue.

Prenons l'exemple d'une rotation du point matériel considéré plus haut

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}', \quad x'_i = O_i^j x_j, \quad (1.86)$$

où  $O$  est la matrice de la rotation,  $O^t O = \mathbf{1}$ . Alors l'équation (1.82) est immédiatement vérifiée. En effet, pour le Lagrangien (1.71)

$$\frac{1}{2} m (\dot{\vec{x}})^2 - V(\vec{x}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{x}}')^2 - V(\vec{x}'^2), \quad (1.87)$$

du fait de l'invariance du produit scalaire sous une rotation. On en déduit

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}'). \quad (1.88)$$

L'équation (1.79) est donc réalisée, sans qu'il soit nécessaire d'introduire une dérivée totale par rapport au temps. Toute rotation est une symétrie de l'action (1.71).

Supposons que  $O$  soit la matrice d'une rotation d'un angle  $\theta$  autour d'un vecteur unitaire  $\vec{n}$ , et notons  $\vec{\xi} = \theta\vec{n}$ . Il existe une différence importante entre le cas d'une rotation et celui de l'inversion considérée dans (1.73). La transformation d'inversion ne contient aucun paramètre que l'on puisse faire varier, on dit que c'est une transformation discrète. Au contraire, on peut faire varier continûment les composantes du vecteur  $\vec{\xi}$ , on dit que les rotations forment un ensemble de transformations continues. Rappelons au passage que l'ensemble des rotations forme un groupe, le produit de deux rotations est encore une rotation et toute rotation possède un inverse qui est aussi une rotation. Les symétries continues jouent un rôle particulier en mécanique, car si un système est invariant sous un groupe de symétries continues, alors il possède des charges conservées, encore appelées intégrales premières du mouvement. La démonstration générale de cette propriété, appelée théorème de Noether, sera donnée dans le prochain paragraphe. Pour l'instant, supposons que les composantes du vecteur  $\vec{\xi}$  sont infinitésimalement petites. Dans ce cas, le point transformé  $\vec{x}'$  diffère très peu du point  $\vec{x}$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}, \quad \delta\vec{x} = \vec{\xi} \wedge \vec{x}. \quad (1.89)$$

La variation infinitésimale du lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned} L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}') - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) &= \delta x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \delta \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \\ &= \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) + \frac{d}{dt} \left( \delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right). \end{aligned} \quad (1.90)$$

En utilisant l'équation (1.88), on obtient alors

$$\delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) + \frac{d}{dt} \left( \delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0. \quad (1.91)$$

Le premier terme entre parenthèses dans le membre de gauche de cette équation est proportionnel aux équations d'Euler-Lagrange. On en déduit que si les équations du mouvement sont satisfaites, c'est-à-dire si l'on suit la particule sur une trajectoire réelle,

$$\frac{d}{dt} \left( \delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0. \quad (1.92)$$

En conséquence, la quantité

$$\delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m(\vec{\xi} \wedge \vec{x}) \dot{\vec{x}} = \vec{\xi} \vec{L}, \quad \vec{L} = m\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}}. \quad (1.93)$$

est conservée. Comme les paramètres  $\xi_i$  sont certes infinitésimalement petits mais néanmoins arbitraires et indépendants du temps, on retrouve ainsi la conservation du moment cinétique  $\vec{L}$  pour une particule dans un potentiel central. On voit donc que la conservation du moment cinétique est une conséquence de l'invariance par rotation. Notons que le nombre de quantités conservées, les trois composantes de  $\vec{L}$ , s'identifie au nombre des paramètres de transformation, les trois composantes de  $\vec{\xi}$ .

Avant de passer au formalisme général, considérons un point de vue un peu différent, qui permet parfois un calcul plus aisé des charges de Noether. On suppose maintenant qu'on applique à chaque instant une rotation différente

$$\vec{x}(t) \longrightarrow \vec{x}'(t) = O(t)\vec{x}(t), \quad O(t)^t O(t) = \mathbf{1}, \quad O(t_1) = O(t_2) = \mathbf{1}. \quad (1.94)$$

On dit dans ce cas qu'on applique une transformation locale, par opposition aux transformations globales (indépendantes du temps) considérées jusqu'ici. Pour une transformation infinitésimale, cela signifie que le vecteur  $\vec{\xi}(t)$  dépend du temps et s'annule à  $t_1$  et  $t_2$ . Dans une telle transformation, la variation de la vitesse s'écrit

$$\delta \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\vec{\xi} \wedge \vec{x}) = \dot{\vec{\xi}} \wedge \vec{x} + \vec{\xi} \wedge \dot{\vec{x}} \Rightarrow \delta(\dot{\vec{x}}^2) = 2\dot{\vec{x}}(\dot{\vec{\xi}} \wedge \vec{x}) = 2\dot{\vec{\xi}}(\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}}). \quad (1.95)$$

La variation de l'action (1.71) dans une telle transformation est alors donnée par

$$\delta S[\vec{x}] = S[\vec{x}'] - S[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{\xi}} \vec{L}. \quad (1.96)$$

Cette variation ne s'écrit pas comme une dérivée totale par rapport au temps, les rotations locales ne sont pas des symétries de l'action (1.71). Il y a cependant une trace du fait que l'action est invariante sous les rotations globales, en effet la variation ne dépend que de la dérivée par rapport au temps du paramètre de transformation  $\vec{\xi}$ . Enfin, si  $\vec{x}(t)$  est une solution des équations du mouvement, l'action est extrémale, et sa variation est nulle sous toute variation, en particulier sous une rotation locale. Donc, pour une solution

des équations du mouvement, on a

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{\xi}} \vec{L} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{\xi} \dot{\vec{L}} = 0. \quad (1.97)$$

Cette équation doit être satisfaite pour toute valeur du paramètre local  $\vec{\xi}(t)$ , on en déduit à nouveau la conservation du moment cinétique  $\vec{L}$ .

**Remarque :** *Les deux observateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  introduits plus hauts peuvent ne pas utiliser seulement des règles différentes de calcul des positions, mais ils peuvent également utiliser des horloges différentes, c'est-à-dire des règles différentes pour le calcul des temps. Ce cas sera inclus dans le formalisme général. Il est important, puisque la conservation de l'énergie est une conséquence de l'invariance par translation dans le temps.*

## 1.6 Symétries et théorème de Noether en théorie des champs

On considère à nouveau le champ classique  $\varphi(x)$  du paragraphe 1.3. On va s'intéresser aux transformations continues que peut subir ce système. De manière générale, une telle transformation peut concerner à la fois les coordonnées d'espace-temps et le champ

$$\begin{aligned} T_\lambda : x &\longrightarrow x_\lambda, & x_\lambda &= (x_\lambda^0, \dots, x_\lambda^{D-1}) \in \Omega^D, \\ & & \varphi(x) &\longrightarrow \varphi_\lambda(x_\lambda), \end{aligned} \quad (1.98)$$

où  $\lambda$  est le paramètre réel que l'on peut faire varier continûment. On supposera que  $T_{\lambda=0}$  est la transformation identité. Pour ce qui concerne les coordonnées,  $T_\lambda$  est une application inversible de  $\Omega^D$  dans lui-même. En particulier, la matrice jacobienne dont les éléments de matrice s'écrivent  $\frac{\partial x_\lambda^I}{\partial x^J}$  est supposée partout inversible. Si  $\Omega^D$  possède un bord, la transformation  $T_\lambda$  respecte les conditions aux limites de Dirichlet sur le bord. Ces conditions assurent que la transformation  $T_\lambda$  applique le système physique sur lui-même, et non sur un autre système physique. Pour ce qui concerne le champ, on se limitera au cas où le champ transformé  $\varphi_\lambda(x_\lambda = T_\lambda(x))$  est fonction du champ initial  $\varphi(x)$  et des coordonnées  $x$ , et pas des dérivées du champ. La transformation du champ est supposée inversible.

Du point de vue passif, On a deux observateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_\lambda$  qui utilisent des règles différentes pour repérer les points de l'espace-temps et mesurer les

champs. On dira que la transformation  $T_\lambda$  est une symétrie des équations du mouvement si les équations du mouvement ont la même forme pour  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_\lambda$ . Par exemple, dans le cas de la corde vibrante, l'équation d'onde (1.33) doit garder sa forme

$$-\mu \frac{\partial^2 q_\lambda}{\partial t_\lambda^2} + \kappa \frac{\partial^2 q_\lambda}{\partial y_\lambda^2} = 0. \quad (1.99)$$

Comme les deux observateurs étudient le même système physique, il utilisent pour décrire la dynamique la même action (1.53) qu'ils expriment soit en fonction des coordonnées  $x$  et du champ  $\varphi$ , soit en fonction des coordonnées  $x_\lambda$  et du champ  $\varphi_\lambda$

$$\begin{aligned} S_{\Omega, \mathcal{O}}[\varphi] &= \int_{\Omega^D} d^D x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x), \\ S_{\Omega, \mathcal{O}_\lambda}[\varphi_\lambda] &= \int_{\Omega^D} d^D x_\lambda \mathcal{L}_\lambda(\varphi_\lambda(x_\lambda), \partial^\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda), x_\lambda), \\ S_{\Omega, \mathcal{O}}[\varphi] &= S_{\Omega, \mathcal{O}_\lambda}[\varphi_\lambda[\varphi]] \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}_\lambda(\varphi_\lambda(x_\lambda), \partial^\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda), x_\lambda) &= \left| \det \frac{\partial x}{\partial x_\lambda} \right| \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x), \end{aligned} \quad (1.100)$$

On a utilisé la notation  $\partial_I^\lambda = \frac{\partial}{\partial x_\lambda^I}$ , et  $\left| \det \frac{\partial x}{\partial x_\lambda} \right|$  est le Jacobien du changement de variables. En général, la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_\lambda$  est une fonction différente de la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$ . Pour que les équations du mouvement coïncident, il suffit que ces deux fonctions soient identiques à une dérivée d'espace-temps près

$$\mathcal{L}_\lambda(\varphi_\lambda(x_\lambda), \partial^\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda), x_\lambda) = \mathcal{L}(\varphi_\lambda(x_\lambda), \partial^\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda), x_\lambda) + \partial_I^\lambda K_\lambda^I(\varphi_\lambda, x_\lambda). \quad (1.101)$$

Si cette condition est satisfaite, on dira que la transformation  $T_\lambda$  est une symétrie de l'action. En utilisant (1.100), cette condition s'écrit encore

$$\left| \det \frac{\partial x_\lambda}{\partial x} \right| (\mathcal{L}(\varphi_\lambda(x_\lambda), \partial^\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda), x_\lambda) + \partial_I^\lambda K_\lambda^I(\varphi_\lambda, x_\lambda)) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.102)$$

Finalement, en introduisant la quantité

$$H_\lambda^I(\varphi(x), x) = - \left| \det \frac{\partial x_\lambda}{\partial x} \right| \frac{\partial x^I}{\partial x_\lambda^J} K_\lambda^J(\varphi_\lambda(x_\lambda), x_\lambda), \quad (1.103)$$

La condition d'invariance prend la forme

$$\boxed{\left| \det \frac{\partial x_\lambda}{\partial x} \right| \mathcal{L}(\varphi_\lambda(x_\lambda), \partial^\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda), x_\lambda) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x) + \partial_I H_\lambda^I(\varphi(x), x).} \quad (1.104)$$

Du point de vue actif, la transformation  $T_\lambda$  est interprétée comme une transformation effectivement réalisée par l'observateur. Comme celui-ci étudie le même système dans deux configurations différentes, il calcule l'action en utilisant la même densité lagrangienne avant

$$S_\Omega[\varphi] = \int_{\Omega^D} d^D x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x), \quad (1.105)$$

et après transformation

$$S_\Omega[\varphi_\lambda] = \int_{\Omega^D} d^D x_\lambda \mathcal{L}(\varphi_\lambda(x_\lambda), \partial^\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda), x_\lambda). \quad (1.106)$$

En général, ces deux fonctionnelles ne coïncident pas,  $S_\Omega[\varphi_\lambda[\varphi]] \neq S_\Omega[\varphi]$ , et donc la transformée d'une solution des équations du mouvement n'est pas une solution des mêmes équations du mouvement. Une condition suffisante pour que la transformée d'une solution soit une solution est que les fonctionnelles coïncident, à l'intégrale d'une dérivée d'espace-temps près. La condition d'invariance de l'action s'écrit donc

$$S_\Omega[\varphi_\lambda[\varphi]] = S_\Omega[\varphi] + \int_{\Omega^D} d^D x \partial_I H_\lambda^I(\varphi(x), x), \quad (1.107)$$

qui conduit à nouveau à la condition (1.104).

En général, on vérifie l'équation d'invariance en utilisant des transformations infinitésimales. On peut alors ne garder que la partie linéaire dans le paramètre infinitésimal  $\lambda$  de la transformation. La variation infinitésimale des coordonnées d'espace-temps s'écrit

$$x_\lambda^I = x^I + \delta x^I, \quad \delta x^I = \lambda \xi^I(x), \quad (1.108)$$

Au premier ordre en  $\lambda$ , on a alors

$$\varphi_\lambda(x_\lambda) = \varphi_\lambda(x) + \delta x^I \partial_I \varphi_\lambda(x). \quad (1.109)$$

On définit la variation infinitésimale du champ en comparant les fonctions  $\varphi_\lambda$  et  $\varphi$  au même point  $x$

$$\delta\varphi(x) = \varphi_\lambda(x) - \varphi(x) = \lambda V(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.110)$$

On a alors, au plus bas ordre dans le paramètre infinitésimal  $\lambda$

$$\varphi_\lambda(x_\lambda) = \varphi(x) + \delta x^I \partial_I \varphi(x) + \delta\varphi(x). \quad (1.111)$$

La définition (1.110) de la variation du champ possède la propriété commode que la variation d'une dérivée est la dérivée de la variation

$$\delta \partial_I \varphi(x) = \partial_I \varphi_\lambda(x) - \partial_I \varphi(x) = \partial_I \delta \varphi(x). \quad (1.112)$$

Notons enfin les relations

$$\partial_I = \frac{\partial x^J}{\partial x^I} \partial_J = \partial_I^\lambda + (\partial_I \delta x^J) \partial_J + O(\lambda^2), \quad (1.113)$$

$$\det \frac{\partial x_\lambda}{\partial x} = \det(\mathbf{1} + \frac{\partial \delta x}{\partial x}) = 1 + \frac{\partial \delta x^I}{\partial x^I} + O(\lambda^2). \quad (1.114)$$

En utilisant les équations (1.111), (1.112) et (1.113), on obtient

$$\partial_I^\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda) = \partial_I \varphi(x) + \partial_I \delta \varphi(x) + \delta x^J \partial_J \partial_I \varphi(x). \quad (1.115)$$

Au premier ordre dans le paramètre infinitésimal, l'équation d'invariance (1.104) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x^I}{\partial x^I} \mathcal{L} + \delta x^I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^I} \Big|_{\varphi(x), \partial \varphi(x)} + (\delta \varphi(x) + \delta x^I \partial_I \varphi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \Big|_{\partial \varphi(x), x} \\ + (\partial_I \delta \varphi(x) + \delta x^J \partial_J \partial_I \varphi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x), x} = \partial_I H_\lambda^I(\varphi(x), x), \end{aligned} \quad (1.116)$$

où l'on ne garde dans le second membre que le terme linéaire en  $\lambda$ . Dans le membre de gauche, on rassemble tous les termes fonctions de  $\delta x^I$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x^I}{\partial x^I} \mathcal{L} + \delta x^I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^I} \Big|_{\varphi(x), \partial \varphi(x)} + \delta x^I \partial_I \varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \Big|_{\partial \varphi(x), x} \\ + \delta x^I \partial_I \partial_J \varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_J \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x), x} = \partial_I (\delta x^I \mathcal{L}(\varphi, \partial \varphi, x)), \end{aligned} \quad (1.117)$$

Dans le second membre, la dérivée  $\partial_I$  prend en compte toute les dépendances de la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  dans les coordonnées  $x$ , c'est-à-dire aussi bien la dépendance explicite que celle qui vient par l'intermédiaire du champ et de ses dérivées. Notons que l'on a ainsi obtenu une divergence, comme dans le membre de droite de l'équation d'invariance. On obtiendra une autre divergence en réécrivant le terme de (1.116) proportionnel à la dérivée de la variation du champ sous la forme

$$\partial_I \delta \varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi(x)} = \partial_I \left( \delta \varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi(x)} \right) - \delta \varphi(x) \partial_I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi(x)}. \quad (1.118)$$

On rassemble alors tous les termes qui sont des divergences dans le membre de droite, et on introduit la notation

$$H_\lambda^I - \delta x^I \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x) - \delta\varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi(x)} = \lambda J^I(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.119)$$

$J^I$  est appelé le courant de Noether associé à la transformation de symétrie. L'équation d'invariance s'écrit désormais

$$\delta\varphi(x) \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} = \delta\varphi(x) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi(x)} \right) = \lambda \partial_I J^I(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.120)$$

Remarquons que le membre de gauche est proportionnel aux équations du mouvement, donc si le champ satisfait aux équations du mouvement, la divergence du courant de Noether s'annule

$$\partial_I J^I(\varphi(x), \partial\varphi(x), x) = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0. \quad (1.121)$$

On dit que le courant de Noether est un courant conservé. Vous avez en fait déjà rencontré ce type de situation en électromagnétisme. Dans ce cas, la densité de charge électrique  $\rho(t, \vec{x})$  et la densité de courant électrique  $\vec{j}(t, \vec{x})$  sont reliées par l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad (1.122)$$

dont la forme est identique à celle de l'équation (1.121). Il est alors logique d'interpréter la composante temporelle  $J^0$  du courant de Noether comme une densité de charge, et les composantes spatiales  $J^i$  comme une densité de courant. On définit la charge contenue à l'intérieur d'un domaine d'espace  $\Sigma^{D-1} \subset \Omega^{D-1}$  comme l'intégrale de la densité de charge

$$Q_\Sigma = \int_{\Sigma^{D-1}} d^{D-1}x J^0(\varphi(x), \partial\varphi(x), x), \quad (1.123)$$

Si le domaine  $\Sigma^{D-1}$  n'est pas borné, la charge  $Q_\Sigma$  n'est pas nécessairement définie. Demander que la charge soit définie pour tout domaine pourra contraindre le comportement asymptotique à grande distance du champ. En supposant le domaine borné, étudions l'évolution dans le temps de la charge

$$\frac{d}{dt} Q_\Sigma = \int_{\Sigma^{D-1}} d^{D-1}x \partial_0 J^0(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.124)$$

En utilisant l'équation (1.121), on obtient

$$\frac{d}{dt}Q_\Sigma = - \int_{\Sigma^{D-1}} d^{D-1}x \partial_i J^i(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.125)$$

L'intégrale de la divergence d'un vecteur sur le domaine  $\Sigma^{D-1}$  s'identifie au flux de ce vecteur à travers la surface, notée  $\partial\Sigma^{D-1}$ , de ce domaine. Notons  $N_i$  les composantes du vecteur normal à  $\partial\Sigma^{D-1}$  en un point  $x$ , dirigé vers l'extérieur du domaine  $\Sigma^{D-1}$ . On a alors

$$\frac{d}{dt}Q_\Sigma = - \int_{\partial\Sigma^{D-1}} d^{D-2}x N_i J^i(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.126)$$

Cette équation nous dit, comme en électromagnétisme, que la variation de la charge à l'intérieur d'un domaine donné s'identifie au courant total qui entre dans ce domaine.

En général, les composantes spatiales  $J^i$  du courant de Noether dépendent du champ et de ses dérivées, et s'annulent lorsque le champ et ses dérivées s'annulent. Si à tout instant entre  $t_1$  et  $t_2$  le champ possède un support spatial borné, et que le domaine spatial  $\Sigma^{D-1}$  est suffisamment grand pour contenir ce support, cela signifie que le champ et ses dérivées s'annulent sur le bord de  $\Sigma^{D-1}$ , et donc le courant s'annule également. Dans ce cas, la charge  $Q_\Sigma$  est conservée entre  $t_1$  et  $t_2$ . En particulier, la charge totale  $Q_\Omega$  est conservée. Dans la suite de ce cours, le domaine de variation des paramètres d'espace sera en général  $\Omega^{D-1} = \mathbf{R}^{D-1}$ , et l'on supposera que le champ décroît suffisamment vite à l'infini spatial pour que le flux du courant tende vers 0 lorsque  $\Sigma^{D-1}$  tend vers  $\mathbf{R}^{D-1}$ . Dans ce cas également, la charge totale est conservée.

**Transformations locales :** On suppose désormais que le paramètre infinitésimal dépend du point d'espace-temps considéré. Les lois de transformations (1.108) et (1.110) deviennent

$$\begin{aligned} \delta x^I &= x_\lambda^I - x^I = \lambda(x)\xi^I(x), \\ \delta\varphi(x) &= \varphi_\lambda(x) - \varphi(x) = \lambda(x)V(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \end{aligned} \quad (1.127)$$

Remarquons que, dans l'équation (1.120) qui définit le courant de Noether, le paramètre de transformation n'apparaît que comme un facteur global. Cette équation est donc inchangée lorsqu'on considère des transformations locales

$$\delta\varphi(x) \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} = \lambda(x)\partial_I J^I(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.128)$$

On considère un domaine borné  $\Theta^D$ , et l'on suppose que le paramètre  $\lambda(x)$  s'annule sur le bord de ce domaine. La variation de l'action sur ce domaine s'écrit

$$\begin{aligned} \delta S_\Theta &= S_\Theta[\varphi + \delta\varphi] - S_\Theta[\varphi] \\ &= \int_{\Theta^D} d^D x \left( \partial_I(\delta x^I \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x)) + \delta\varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} + \partial_I \delta\varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi(x)} \right) \end{aligned} \quad (1.129)$$

Les variations des champs et des coordonnées sont proportionnelles au paramètre  $\lambda(x)$ , et s'annulent donc sur le bord du domaine  $\Theta^D$ . On obtient alors après intégration par parties

$$\delta S_\Theta = \int_{\Theta^D} d^D x \delta\varphi(x) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi(x)} \right) = \int_{\Theta^D} d^D x \delta\varphi(x) \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)}. \quad (1.130)$$

On utilise alors l'équation (1.128) pour obtenir

$$\begin{aligned} \delta S_\Theta &= \int_{\Theta^D} d^D x \lambda(x) \partial_I J^I(\varphi(x), \partial\varphi(x), x) \\ &= - \int_{\Theta^D} d^D x \partial_I \lambda(x) J^I(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \end{aligned} \quad (1.131)$$

On en déduit que si l'action est invariante, à un terme de bord près, sous les transformations globales, sa variation sous une transformation locale ne dépend que des dérivées du paramètre. De plus, la variation locale de l'action est déterminée par le courant de Noether ; on dit que le courant de Noether mesure la réponse de l'action du système à une transformation locale.

### Remarques :

- Si l'on a plusieurs symétries continues, à chacune d'elles correspond un courant de Noether et une charge conservée
- En général, on ne s'intéresse pas à un seul champ  $\varphi$ , mais à un ensemble de champs  $\varphi_a$ . On a aussi plusieurs paramètres de transformations  $\lambda^A$ , et donc plusieurs courants. L'étude précédente s'étend sans difficulté à ce cas en tenant compte des variations de tous les champs. Ainsi, la relation (1.120) qui définit le courant de Noether devient

$$\delta\varphi_a(x) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_I \varphi_a(x)} \right) = \lambda^A \partial_I J_A^I(\varphi(x), \partial\varphi(x), x). \quad (1.132)$$

- On sépare parfois les symétries en deux types distincts. Les symétries internes sont caractérisées par le fait que les coordonnées d'espace

temps ne changent pas ( $x_\lambda^I = x^I$ ) et donc que la transformation n'agit que sur le ou les champs. Un exemple est donné dans le prochain exercice. On regroupe d'autre part sous le nom de symétries géométriques toutes les transformations de symétries qui agissent sur les coordonnées d'espace-temps. On peut citer les translations d'espace et de temps, les rotations, les changements de référentiel galiléen, et en relativité les transformations de Lorentz.

- Remarquons que l'équation (1.120) définit seulement la divergence du courant de Noether, et non le courant lui-même. Si l'on modifie le courant de telle manière que sa divergence reste inchangée, le courant après modification est physiquement tout aussi acceptable que le courant avant modification. Il est facile de modifier le courant sans modifier sa divergence. On introduit un tenseur à deux indices  $A^{IJ}(\varphi, \partial\varphi, x)$  fonction du champ, de ses dérivées et des coordonnées, que l'on suppose antisymétrique,  $A^{IJ} = -A^{JI}$ . Alors le courant modifié

$$\hat{J}^I = J^I + \partial_J A^{IJ}, \quad (1.133)$$

est conservé si  $J^I$  l'est, puisque les dérivées partielles commutent. Le terme ajouté  $\partial_J A^{IJ}$  est appelé un terme d'amélioration, sans doute parce qu'il permet parfois de simplifier la forme du courant. Bien sûr, si l'on modifie le courant, on modifie aussi la charge

$$\hat{Q}_\Sigma = \int_{\Sigma^{D-1}} d^{D-1}x \hat{J}^0 = \int_{\Sigma^{D-1}} d^{D-1}x (J^0 + \partial_J A^{0J}). \quad (1.134)$$

Du fait de l'antisymétrie du tenseur  $A^{IJ}$ , l'indice de sommation  $J$  dans  $\partial_J A^{0J}$  est nécessairement un indice spatial, et l'on peut donc écrire

$$\hat{Q}_\Sigma = Q_\Sigma + \int_{\Sigma^{D-1}} d^{D-1}x \partial_j A^{0j} = Q_\Sigma + \int_{\partial\Sigma^{D-1}} d^{D-2}x N_i A^{0i}. \quad (1.135)$$

La charge est donc modifiée par l'addition d'un terme de surface. Dans les deux circonstances décrites plus haut, c'est à dire si le champ est à support borné ou décroît rapidement à grande distance, la charge totale n'est pas modifiée.

*Exercice 1.H :* On considère à nouveau le système introduit dans l'exercice 1.G. Montrer que ce système possède une invariance de l'action donnée par

les transformations

$$t \rightarrow t_\alpha = t, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}_\alpha = \vec{x},$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi_\alpha(t, \vec{x}) = e^{i\alpha}\psi(t, \vec{x}), \quad \bar{\psi}(t, \vec{x}) \rightarrow \bar{\psi}_\alpha(t, \vec{x}) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(t, \vec{x}),$$

où  $\alpha$  est le paramètre continu de la transformation. Donner l'expression du courant de Noether associée à cette symétrie interne, et la charge contenue dans un volume  $\mathcal{V}$ . Comment interpréteriez-vous cette charge ?

Nettement plus difficile, on va maintenant étudier certaines symétries géométriques de ce modèle dans le cas d'une particule libre, c'est-à-dire lorsque  $V(\vec{x}) = 0$ . L'action considérée s'écrit alors

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial\psi, \partial\bar{\psi}) = \int d^4x (i\bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \bar{\psi} \vec{\nabla} \psi). \quad (1.136)$$

- Translation d'espace : montrer que les transformations

$$t \rightarrow t' = t, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a},$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi'(t', \vec{x}') = \psi(t, \vec{x}), \quad \bar{\psi}(t, \vec{x}) \rightarrow \bar{\psi}'(t', \vec{x}') = \bar{\psi}(t, \vec{x}) \quad (1.137)$$

où les composantes du vecteur  $\vec{a}$  sont les trois paramètres de transformation, sont des symétries de l'action (1.136). Calculer les courants de Noether et les charges contenues dans un volume  $\mathcal{V}$ , que l'on notera  $\vec{P}_\mathcal{V}$ . Comment interpréteriez-vous cette charge ?

- Translation dans le temps : montrer que la transformation

$$t \rightarrow t' = t + T, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x},$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi'(t', \vec{x}') = \psi(t, \vec{x}), \quad \bar{\psi}(t, \vec{x}) \rightarrow \bar{\psi}'(t', \vec{x}') = \bar{\psi}(t, \vec{x}) \quad (1.138)$$

où  $T$  est le paramètre de transformation, est une symétrie de l'action (1.136). Calculer le courant de Noether et la charge contenue dans un volume  $\mathcal{V}$ , que l'on notera  $E_\mathcal{V}$ . Comment interpréteriez-vous cette charge ?

- Changement de référentiel galiléen : Montrer que les transformations

$$t \rightarrow t' = t, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t,$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi'(t', \vec{x}') = e^{i(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 t + m\vec{v}\vec{x})} \psi(t, \vec{x}),$$

$$\bar{\psi}(t, \vec{x}) \rightarrow \bar{\psi}'(t', \vec{x}') = e^{-i(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 t + m\vec{v}\vec{x})} \bar{\psi}(t, \vec{x}). \quad (1.139)$$

où les composantes du vecteur  $\vec{v}$  sont les trois paramètres de transformation, sont des symétries de l'action (1.136). Calculer les courants de Noether. Montrer que les charges correspondantes, qui sont les trois composantes d'un vecteur noté  $\vec{G}_V$ , s'écrivent

$$\vec{G}_V = t\vec{P}_V + m \int_V d^3x \bar{\psi}(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) \vec{x}. \quad (1.140)$$

## 1.7 Symétries dans le formalisme hamiltonien

Dans ce paragraphe, on se propose de traduire dans le formalisme hamiltonien la condition d'invariance (1.120) dérivée dans le formalisme lagrangien. Pour simplifier l'écriture, on va considérer un système de mécanique avec un nombre fini de coordonnées généralisées  $q_i(t)$ . Tous les résultats que nous allons dériver s'étendent sans difficulté au cas de la théorie des champs. L'évolution est déterminée par le lagrangien  $L(q, \dot{q}, t)$ . On étudie une transformation infinitésimale

$$\begin{aligned} t \rightarrow t' &= t + \delta t, & q_i(t) &\rightarrow q'_i(t'), \\ q'_i(t) - q_i(t) &= \delta q_i(t) = \lambda F_i(q, \dot{q}, t), \end{aligned} \quad (1.141)$$

où  $\lambda$  est le paramètre infinitésimal de transformation. Le fait que cette transformation soit une symétrie de l'action se traduit par l'équation

$$\sum_i \delta q_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \lambda \frac{d}{dt} J(q, \dot{q}, t), \quad (1.142)$$

où  $J$  est la charge conservée associée à la symétrie. Cette équation doit être satisfaite pour **toute** configuration des coordonnées  $q_i(t)$  et des vitesses  $\dot{q}_i(t)$  qui satisfont la relation

$$\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} q_i(t). \quad (1.143)$$

On définit les moments conjugués par

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.144)$$

On supposera le changement de variables  $\dot{q}_i \rightarrow p^i$  inversible. Le Hamiltonien est donné par

$$H(q, p) = p^i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t). \quad (1.145)$$

Rappelons que les vitesses sont données par la relation inverse de (1.144)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}. \quad (1.146)$$

On rappelle aussi que les coordonnées  $q_i$  sont "spectatrices" dans la transformation de Legendre, c'est-à-dire que l'on a l'équation

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{\dot{q}, t} = - \left. \frac{\partial H}{\partial q_i} \right|_{p, t}. \quad (1.147)$$

Désormais, on considérera les fonctions  $F_i$  dans (1.141) et  $J$  dans (1.142) comme des fonctions sur l'espace des phases, c'est-à-dire des fonctions des variables  $q_i$ ,  $p^i$  et du temps  $t$ . La dérivée par rapport au temps de la charge s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} J(q, p, t) = \dot{q}_i \frac{\partial J}{\partial q^i} + \dot{p}^i \frac{\partial J}{\partial p^i} + \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{q, p} = \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial J}{\partial q^i} + \dot{p}^i \frac{\partial J}{\partial p^i} + \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{q, p}. \quad (1.148)$$

L'équation (1.142) qui traduit l'invariance de l'action devient dans l'espace des phases

$$\sum_i \delta q_i \left( - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{p}^i \right) = \lambda \left( \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial J}{\partial q^i} + \dot{p}^i \frac{\partial J}{\partial p^i} + \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{q, p} \right), \quad (1.149)$$

qui doit être satisfaite pour toute configuration  $q_i(t)$ ,  $p^i(t)$  satisfaisant la relation

$$\frac{d}{dt} q_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p^i} = \{q_i, H\}. \quad (1.150)$$

En particulier, à un instant donné les vitesses  $\dot{q}_i(t)$  sont déterminées par la donnée à cet instant de  $q_i(t)$  et  $p^i(t)$ , mais les dérivées des moments  $\dot{p}^i(t)$  ne le sont pas. L'équation (1.149) est une équation linéaire sur les variables  $\dot{p}^i$ , qui doit être satisfaite pour toute valeur de ces variables. On en déduit que le coefficient de chacune de ces variables doit s'annuler, ce qui conduit aux équations

$$\delta q_i = - \lambda \frac{\partial J}{\partial p^i} = \{\lambda J, q_i\}. \quad (1.151)$$

Lorsque l'on prend en compte ces identités, l'équation (1.149) se réduit à

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial J}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \lambda \left( \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial J}{\partial q^i} + \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{q, p} \right) \\ &\Leftrightarrow \{J, H\} + \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{q, p} = 0, \end{aligned} \quad (1.152)$$

qui n'est autre que l'équation de conservation de la charge dans le formalisme hamiltonien.

Nous avons donné dans l'équation (1.151) la loi de transformation des coordonnées  $q_i$ . Il nous reste à déterminer la loi de transformation des moments  $p^i$ . Pour cela, il suffit de considérer une solution des équations du mouvement. On va calculer  $\delta\dot{q}_i$  de deux manières distinctes comme une fonction sur l'espace des phases, ce qui conduira au résultat recherché. Calculons tout d'abord la variation de la vitesse

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} \rightarrow \delta\dot{q}_i = \frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^j} \delta p^j + \frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial q_j} \delta q_j. \quad (1.153)$$

Calculons d'autre part la dérivée par rapport au temps de la variation des coordonnées

$$\delta\dot{q}_i = \{\delta q_i, H\} + \left. \frac{\partial \delta q_i}{\partial t} \right|_{q,p} = \{\{\lambda J, q_i\}, H\} + \left\{ \lambda \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{q,p}, q_i \right\}. \quad (1.154)$$

En utilisant l'identité de Jacobi, on obtient

$$\delta\dot{q}_i = -\{\{q_i, H\}, \lambda J\} + \left\{ \lambda \left( \{J, H\} + \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{q,p} \right), q_i \right\} \quad (1.155)$$

Le deuxième terme dans le membre de droite s'annule du fait de la conservation de la charge (1.152), et l'on obtient finalement

$$\delta\dot{q}_i = -\left\{ \frac{\partial H}{\partial p^i}, \lambda J \right\} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^j} \lambda \frac{\partial J}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial q_j} \delta q_j. \quad (1.156)$$

Par comparaison avec (1.153), on obtient alors

$$\delta p^i = -\lambda \frac{\partial J}{\partial q_i} = \{\lambda J, p^i\}. \quad (1.157)$$

Résumons les résultats obtenus. À une symétrie continue est associée dans le formalisme hamiltonien une fonction  $J(q, p, t)$  sur l'espace des phases, qui peut dépendre explicitement du temps, et qui est conservée au cours du mouvement (équation(1.152)). De plus, cette fonction détermine les transformations infinitésimales des variables de l'espace des phases

$$\delta q_i = \{\lambda J, q_i\}, \quad \delta p^i = \{\lambda J, p^i\}. \quad (1.158)$$

On en déduit que la variation d'une fonction quelconque  $G(q, p)$  sur l'espace des phases sous une transformation de symétrie infinitésimale est donnée par le crochet de Poisson avec la charge

$$\delta G(q, p) = \{\lambda J, G\}(q, p). \quad (1.159)$$

Remarquons enfin que l'équation (1.158) signifie que le changement de variables de l'espace des phases de  $q_i, p^i$  à  $Q_i = q_i + \delta q_i, P^i = p^i + \delta p^i$  est une transformation canonique. La quantité  $\lambda J(q, p, t)$  est appelée le générateur infinitésimal de cette transformation canonique. Une symétrie continue dans le formalisme Hamiltonien est donc une transformation canonique dont le générateur infinitésimal est conservé au cours du mouvement.

**Algèbre des charges conservées :** Si l'on dispose de deux charges conservées  $Q_1$  et  $Q_2$ , on montre facilement que leur crochet de Poisson est également une charge conservée. On pourrait donc imaginer engendrer de cette manière une infinité de charges conservées par crochets de Poisson successifs. En général cependant, ce n'est pas ce qui va arriver. On obtiendra un ensemble fini de charges conservées  $Q^a, a = 1 \cdots N$ , telles que le crochet de Poisson de deux quelconques d'entre elles soient une combinaison linéaire des charges appartenant à l'ensemble

$$\{Q^a, Q^b\} = f^{ab}{}_c Q^c. \quad (1.160)$$

En général, les quantités  $f^{ab}{}_c$  sont des constantes, indépendantes des variables de l'espace des phases et du temps. Dans ce cas, l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires des charges possède une structure d'algèbre dont la loi de produit est le crochet de Poisson. Les constantes  $f^{ab}{}_c$  sont appelées les constantes de structure de l'algèbre.

D'autre part, les quantités  $Q^a$  sont les charges de Noether associées à des transformations de symétrie, et l'on sait qu'elles déterminent les variations infinitésimales des variables de l'espace des phases sous ces symétries

$$\delta_\lambda q_i = \{\lambda_a Q^a, q_i\}. \quad (1.161)$$

Supposons que l'on fasse deux transformations infinitésimales successives de paramètres  $\lambda_a$  et  $\lambda'_a$ , et que l'on compare les résultats obtenus suivant l'ordre dans lequel on applique les transformations infinitésimales

$$[\delta_\lambda, \delta_{\lambda'}]q_i = \delta_\lambda(\delta_{\lambda'}q_i) - \delta_{\lambda'}(\delta_\lambda q_i). \quad (1.162)$$

On dit que l'on calcule le commutateur des transformations infinitésimales. En utilisant (1.161), on obtient

$$[\delta_\lambda, \delta_{\lambda'}]q_i = \{\lambda_a Q^a, \{\lambda'_b Q^b, q_i\}\} - \{\lambda'_b Q^b, \{\lambda_a Q^a, q_i\}\}. \quad (1.163)$$

En utilisant l'identité de Jacobi, cette équation devient

$$[\delta_\lambda, \delta_{\lambda'}]q_i = \{\{\lambda_a Q^a, \lambda'_b Q^b\}, q_i\} \quad (1.164)$$

Si l'on tient compte de l'algèbre des crochets de Poisson des charges (1.160), on aboutit à

$$[\delta_\lambda, \delta_{\lambda'}]q_i = \{\lambda_a \lambda'_b f^{ab}{}_c Q^c, q_i\} = \delta_{\lambda''} q_i, \quad \lambda''_a = \lambda_b \lambda'_c f^{bc}{}_a. \quad (1.165)$$

On trouve donc que le commutateur de deux transformations infinitésimales est aussi une transformation infinitésimale. On dit que les transformations infinitésimales forment une algèbre dont la loi de produit est le commutateur. De plus, l'algèbre des transformations infinitésimales est isomorphe à l'algèbre des crochets de Poisson des charges.

**Remarques :** *De temps en temps, il peut arriver que des constantes apparaissent dans le crochet de Poisson des charges*

$$\{Q^a, Q^b\} = f^{ab}{}_c Q^c + C^{ab}. \quad (1.166)$$

où les  $C^{ab}$  sont indépendants des variables de l'espace des phases et du temps. La matrice  $C$  est appelée charge centrale de l'algèbre des charges conservées. Notons que la matrice  $C$  n'est pas définie de manière unique. Supposons que l'on redéfinisse les charges en leur ajoutant une constante  $\hat{Q}^a = Q^a + t^a$ , où les  $t^a$  sont indépendants des variables de l'espace des phases et du temps. Le crochet de Poisson de deux charges ainsi redéfinies s'écrit

$$\{\hat{Q}^a, \hat{Q}^b\} = f^{ab}{}_c \hat{Q}^c + \hat{C}^{ab}, \quad \hat{C}^{ab} = C^{ab} - f^{ab}{}_c t^c. \quad (1.167)$$

Souvent, mais pas toujours, il est possible de choisir les  $t^a$  tels que tous les  $\hat{C}^{ab}$  s'annulent, on est alors ramené au cas plus simple de l'équation (1.160). Enfin, vous montrerez sans difficulté que la charge centrale qui peut être présente dans les crochets de Poisson des charges n'a aucune conséquence sur le commutateur des transformations infinitésimales.

**Exemple :** Considérons à nouveau le point matériel dans un potentiel central étudié dans le paragraphe 1.5. Les moments conjugués des positions s'écrivent

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}^i, \quad (1.168)$$

où le Lagrangien est donné dans l'équation (1.71). Les charges conservées associées à l'invariance par rotation sont les composantes du moment cinétique, donné dans (1.93). Son expression en fonction des variables de l'espace des phases est

$$\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p} \iff L^i = \sum_{j,k} \epsilon^{ijk} x^j p^k, \quad (1.169)$$

où  $\epsilon^{ijk}$  est le tenseur complètement antisymétrique à trois indices tel que  $\epsilon^{123} = 1$ . Vérifions que les charges conservées engendrent par crochet de Poisson les variations infinitésimales par rotation des coordonnées. Il faut prendre garde au fait qu'avec nos définitions générales, les charges de Noether associées à l'invariance par rotation sont les composantes du vecteur  $-\vec{L}$ .

$$\begin{aligned} \delta x^i &= \{-\vec{\xi} \vec{L}, x^i\} = -\sum_{jkl} \epsilon^{jkl} \xi^j \{x^k p^l, x^i\} = \sum_{jk} \epsilon^{jki} \xi^j x^k. \\ &\iff \delta \vec{x} = \vec{\xi} \wedge \vec{x}. \end{aligned} \quad (1.170)$$

Calculons le crochet de Poisson de deux charges

$$\begin{aligned} \{L^i, L^j\} &= \sum_{klmn} \epsilon^{ikl} \epsilon^{jmn} \{x^k p^l, x^m p^n\} \\ &= \sum_{klmn} \epsilon^{ikl} \epsilon^{jmn} (\delta^{kn} x^m p^l - \delta^{lm} x^k p^n) \\ &= \sum_{klm} (\epsilon^{ikl} \epsilon^{jmk} - \epsilon^{imk} \epsilon^{jkl}) x^m p^l. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Dans l'espace à trois dimensions, les indices ne peuvent prendre que trois valeurs distinctes, et donc tout tenseur complètement antisymétrique à quatre indices est identiquement nul. On en déduit l'identité

$$\epsilon^{ikl} \epsilon^{jmn} - \epsilon^{jik} \epsilon^{lmn} + \epsilon^{lji} \epsilon^{kmn} - \epsilon^{klj} \epsilon^{imn} = 0. \quad (1.172)$$

En appliquant cette identité à l'équation (1.171), on obtient

$$\{L^i, L^j\} = \sum_{klm} \epsilon^{jik} \epsilon^{lmk} x^m p^l = \sum_k \epsilon^{ijk} L^k. \quad (1.173)$$

On vérifie ainsi que les composantes du moment cinétique forment une algèbre sous le crochet de Poisson. Notons que vous avez déjà rencontré cette même

algèbre, à un facteur près, lorsque vous avez étudié les relations de commutation des composantes du moment cinétique en mécanique quantique.

*Exercice 1.I : Dans l'espace à 3 dimensions, supposons que, pour un système mal fichu, les crochets de Poisson des composantes du moment cinétique contiennent une charge centrale*

$$\{L^i, L^j\} = \sum_k \epsilon^{ijk} L^k + C^{ij}. \quad (1.174)$$

Montrer qu'avec un choix convenable de constantes  $t^i$ , la redéfinition  $\hat{L}^i = L^i + t^i$  permet de se débarrasser de la charge centrale.

*Exercice 1.J : On considère dans l'espace à trois dimensions un point matériel libre de masse  $m$ . Le Lagrangien s'écrit  $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2$ . On va étudier quelques symétries géométriques de ce modèle.*

- Translation d'espace : montrer que les transformations

$$t \rightarrow t' = t, \quad \vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}'(t) = \vec{x}(t) + \vec{a}, \quad (1.175)$$

où les composantes du vecteur  $\vec{a}$  sont les trois paramètres de transformation, sont des symétries de l'action. Calculer les charges de Noether associées, que l'on notera  $\vec{P}$ .

- Changement de référentiel galiléen : Montrer que les transformations

$$t \rightarrow t' = t, \quad \vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}'(t) = \vec{x}(t) + \vec{v}t, \quad (1.176)$$

où les composantes du vecteur  $\vec{v}$  sont les trois paramètres de transformation, sont des symétries de l'action. Calculer les charges de Noether associées, que l'on notera  $\vec{G}$ .

- Algèbre des charges conservées : calculer les crochets de Poisson

$$\{P^i, P^j\}, \quad \{P^i, G^j\}, \quad \{G^i, G^j\}. \quad (1.177)$$

Donner l'algèbre des transformations infinitésimales de translation d'espace et de changement de référentiel galiléen.

*Exercice 1.K : On considère à nouveau le système étudié dans les exercices 1.G et 1.H. On veut tout d'abord établir le formalisme hamiltonien pour ce*

ystème. Vérifier que les densités de moment conjugué des champs  $\psi(t, \vec{x})$  et  $\bar{\psi}(t, \vec{x})$  s'écrivent

$$\pi_\psi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial t}} = i\bar{\psi}(t, \vec{x}), \quad \pi_{\bar{\psi}}(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}} = 0, \quad (1.178)$$

où la densité lagrangienne est donnée dans l'équation (1.60). On est là dans une situation inhabituelle. En effet, la relation entre moments conjugués  $\pi_\psi$ ,  $\pi_{\bar{\psi}}$  et vitesses  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$  est très loin d'être inversible : les moments conjugués ne dépendent pas des vitesses ! Cette situation est en fait caractéristique des systèmes dont le Lagrangien est linéaire dans les vitesses. Il n'est pas question de donner ici un traitement complet de tels systèmes. On va simplement remarquer que la première des équations (1.178) nous dit que le champ  $\bar{\psi}$  est, à un facteur  $i$  près, la densité de moment conjugué du champ  $\psi$ . Il n'est alors pas nécessaire d'introduire un moment conjugué pour le champ  $\bar{\psi}$ , et les coordonnées de l'espace des phases sont données par les fonctions  $\psi(t, \vec{x})$  et  $\bar{\psi}(t, \vec{x})$  en tout point  $\vec{x}$  à un instant donné  $t$ . Le Hamiltonien et le crochet de Poisson sont donnés par

$$H[\psi, \bar{\psi}] = \int d^3x \left( i\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{L} \right) = \int d^3x \left( \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \bar{\psi} \vec{\nabla} \psi + \bar{\psi} V \psi \right) \\ \{ \psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{x}') \} = -i\delta^3(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (1.179)$$

Vérifier que les équations de Hamilton redonnent les équations du mouvement obtenues dans le formalisme lagrangien.

On se restreint à nouveau au cas libre. On supposera que les fonctions  $\psi(t, \vec{x})$  et  $\bar{\psi}(t, \vec{x})$  décroissent rapidement lorsque  $|\vec{x}|$  tend vers l'infini. Montrer que les crochets de Poisson des charges totales  $\vec{P}_{\mathbf{R}^3}$  et  $\vec{G}_{\mathbf{R}^3}$  définies dans l'exercice 1.H sont données par

$$\{ P_{\mathbf{R}^3}^i, P_{\mathbf{R}^3}^j \} = 0, \quad \{ P_{\mathbf{R}^3}^i, G_{\mathbf{R}^3}^j \} = m\delta^{ij} Q_{\mathbf{R}^3}, \quad \{ G_{\mathbf{R}^3}^i, G_{\mathbf{R}^3}^j \} = 0. \quad (1.180)$$

## 1.8 Exemple de théorie des champs relativiste

**Groupe de Poincaré :** Dans la suite de ce cours, on va s'intéresser particulièrement à des théories des champs qui ont pour invariance le groupe de Poincaré, composé des transformations de Lorentz et des translations

d'espace-temps. On va donc commencer ce paragraphe par quelques rappels sur ce groupe. On se place à quatre dimensions d'espace-temps, la généralisation à d'autres dimensions ne posant pas de problème particulier. On prendra la vitesse de la lumière  $c$  égale à 1. Les coordonnées d'espace-temps, ou coordonnées sur l'espace de Minkowski, seront notées  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .  $x^0 = t$  est la coordonnée de temps, et les coordonnées d'espace prises isolément seront notées  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La métrique de Lorentz est donnée par la matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.181)$$

Ses éléments de matrice seront notés  $\eta_{\mu\nu}$ , et les éléments de la matrice inverse seront notés  $\eta^{\mu\nu}$ ,

$$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (1.182)$$

Ces deux matrices seront utilisées pour monter et descendre les indices d'un quadrivecteur quelconque  $V^\mu$

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu}V^\nu, \quad V^\mu = \eta^{\mu\nu}V_\nu. \quad (1.183)$$

Par exemple, on notera

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (1.184)$$

Le groupe de Poincaré est le groupe des transformations des coordonnées d'espace-temps qui laissent invariant l'élément de longueur lorentzien

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (1.185)$$

Il est composé des translations de temps et d'espace et des transformations de Lorentz

$$T_{\Lambda,a} : \quad x^\mu \longrightarrow x_a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.186)$$

où la matrice  $\Lambda$  satisfait

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \iff \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu. \quad (1.187)$$

L'ensemble des transformations de Lorentz forme un sous-groupe du groupe de Poincaré. Il est composé de quatre parties disconnectées. En effet, l'équation (1.187) qui définit les transformations de Lorentz implique

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \det \Lambda = \pm 1, \quad (1.188)$$

et, en prenant  $\mu = \nu = 0$ ,

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_i)^2 \Rightarrow \Lambda^0_0 \geq 1 \text{ ou } \Lambda^0_0 \leq -1. \quad (1.189)$$

On ne peut évidemment pas passer continûment de  $\det \Lambda = 1$  à  $\det \Lambda = -1$ , ni de  $\Lambda^0_0 \geq 1$  à  $\Lambda^0_0 \leq -1$ . On a donc quatre possibilités. On admettra que l'ensemble des transformations qui satisfont à l'une de ces possibilités est un ensemble connexe, que l'on appelle une composante connexe du groupe. Les transformations telles que  $\det \Lambda = 1$  sont appelées transformations de Lorentz propres, et celles qui sont telles que  $\Lambda^0_0 \geq 1$  sont appelées transformations de Lorentz orthochrones. On vérifie facilement que l'ensemble des transformations de Lorentz propres orthochrones, c'est-à-dire la composante connexe qui contient l'identité, forme un sous-groupe que l'on note  $SO^\uparrow(1, 3)$ . Dans la suite de ce cours, sauf indication contraire, lorsqu'on parlera de transformations de Lorentz, on sous-entendra toujours des transformations propres orthochrones.

On a vu que la transformation identique est propre orthochrone. Il est facile de construire une transformation dans chacune des trois autres composantes connexes. On utilisera la transformation de parité

$$P : x^0 \rightarrow x^0, \quad x^i \rightarrow -x^i \quad \det P = -1, \quad P^0_0 = 1, \quad (1.190)$$

et la transformation de renversement du temps

$$T : x^0 \rightarrow -x^0, \quad x^i \rightarrow x^i \quad \det T = -1, \quad T^0_0 = -1. \quad (1.191)$$

La dernière composante connexe est atteinte en utilisant le produit  $PT$  des deux transformations précédentes. Notons que si une transformation  $\Lambda$  appartient à la composante caractérisée par  $\det \Lambda = -1$  et  $\Lambda^0_0 \geq 1$ , alors le produit  $P\Lambda$  est une transformation propre orthochrone. Pour connaître le comportement d'une théorie sous la totalité des transformations appartenant aux quatre composantes connexes, il suffit donc de connaître son comportement sous les transformations propres orthochrones, et sous les deux transformations discrètes parité  $P$  et renversement du temps  $T$ .

$\det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1$ Contient l'identité Sous-groupe $SO^\uparrow(1,3)$	$\det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 \geq 1$ Contient la parité $P$
$\det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \leq -1$ Contient le produit $PT$	$\det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 \leq -1$ Contient le renversement du temps $T$

On considère maintenant un champ réel  $\varphi(x)$ , et l'on suppose que les transformations des coordonnées et du champ sous les transformations de Poincaré s'écrivent

$$T_{\Lambda,a} : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x). \quad (1.192)$$

Ces lois de transformations sont caractéristiques de ce que l'on appelle le champ scalaire. C'est en fait une loi de transformation très naturelle. Prenons un exemple qui n'a rien à voir avec la relativité, disons le champ de température à l'intérieur d'un fluide,  $T(\vec{x})$ . Dans le point de vue actif, si je fais tourner le fluide de telle manière qu'un point  $\vec{x}$  du fluide soit envoyé en  $\vec{x}'$ , alors la température après rotation au point  $\vec{x}'$ ,  $T'(\vec{x}')$ , est identique à la température avant rotation au point  $\vec{x}$ ,  $T(\vec{x})$ . On voit immédiatement que cette loi de transformation n'est pas correcte pour des grandeurs tensorielles, par exemple le champ des vitesses d'un fluide ou le champ électromagnétique. On laisse au lecteur le soin de trouver les modifications nécessaires dans ces deux cas.

Dans la suite, il sera très utile d'avoir la forme des transformations infinitésimales sur les coordonnées et le champ. Pour les translations, il suffit de prendre les  $a^\mu$  infinitésimaux. Une transformation de Lorentz infinitésimale s'écrit  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ , où chacun des  $\omega^\mu{}_\nu$  est infinitésimal. La relation de définition (1.187) des transformations de Lorentz implique

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad \omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \omega^\rho{}_\nu. \quad (1.193)$$

On calcule alors facilement la variation du champ en un point. Au premier ordre dans les paramètres infinitésimaux

$$\begin{aligned}\varphi'(x') &= \varphi'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \varphi(x) = \varphi(x) \\ \Rightarrow \delta \varphi(x) &= \varphi'(x) - \varphi(x) = -\delta x^\mu \partial_\mu \varphi(x), \quad \delta x^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu.\end{aligned}\quad (1.194)$$

Il nous faut maintenant spécifier la dynamique du champ. On aura très souvent dans la suite l'occasion de considérer une action du type suivant

$$\begin{aligned}S[\varphi] &= \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)), \\ \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) &= \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2(\varphi(x))^2) - \frac{g}{4!}(\varphi(x))^4\right)\end{aligned}\quad (1.195)$$

La partie quadratique dans le champ de la densité lagrangienne est usuellement appelée densité lagrangienne libre. La partie qui contient des puissances supérieures à 2 dans le champ est la densité lagrangienne d'interaction. Dans le cas présent, l'interaction comprend seulement un terme d'ordre 4 dans les champs, et  $g$  est appelée la constante de couplage. Les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} = 0 \leftrightarrow (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\varphi = -\frac{g}{3!}\varphi^3.\quad (1.196)$$

On définit l'opérateur d'Alembertien par  $\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \Delta$ . Lorsque la constante de couplage  $g$  s'annule, on obtient l'équation de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi = 0.\quad (1.197)$$

Vérifions que l'action (1.195) est invariante sous les transformations de Poincaré (1.192). On va utiliser le point de vue actif, et donc utiliser la même densité lagrangienne pour la nouvelle configuration

$$S[\varphi'] = \int d^4x' \left( \frac{1}{2}(\partial'_\mu \varphi' \partial'^\mu \varphi' - m^2 \varphi'^2) - \frac{g}{4!} \varphi'^4 \right).\quad (1.198)$$

Le Jacobien du changement de coordonnées s'écrit

$$\det \frac{\partial x'}{\partial x} = \det \Lambda = 1.\quad (1.199)$$

La transformation des dérivées d'espace-temps est donnée par

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu.\quad (1.200)$$

On obtient alors

$$\partial'_\mu \varphi' \partial'^\mu \varphi' = \eta^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi. \quad (1.201)$$

En tenant compte des lois de transformation (1.192) et des équations (1.199) et (1.201), on vérifie que l'action est invariante sous les transformations de Poincaré

$$S[\varphi'] = S[\varphi] \quad (1.202)$$

On n'a pas besoin dans ce cas de l'intégrale d'une divergence. On va maintenant dériver les courants de Noether associés à l'invariance sous les transformations de Poincaré. Considérons tout d'abord seulement une translation. Les paramètres  $a^\nu$  forment un quadrivecteur, les courants de Noether correspondants forment donc un tenseur à deux indices noté  $T^\mu{}_\nu$  et appelé le tenseur énergie-impulsion. Comme il n'y a pas de terme de bord, le plus simple pour calculer le tenseur énergie-impulsion est d'utiliser la formule (1.119)

$$\begin{aligned} a^\nu T^\mu{}_\nu &= -\delta\varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} - \delta x^\mu \mathcal{L} = a^\nu (\partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}) \\ \Leftrightarrow T_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\rho} T^\rho{}_\nu = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (1.203)$$

Si le champ  $\varphi$  est solution des équations du mouvement, le tenseur énergie-impulsion est conservé

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0. \quad (1.204)$$

Remarquons que le tenseur énergie-impulsion est un tenseur symétrique,  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ . Les composantes  $T_{00}$  et  $T_{0i}$  s'interprètent respectivement comme une densité d'énergie et une densité d'impulsion

$$T_{00} = \frac{1}{2} ((\partial_0 \varphi)^2 + \sum_{i=1}^3 (\partial_i \varphi)^2 + m^2 \varphi^2) + \frac{g}{4!} \varphi^4, \quad T_{0i} = \partial_0 \varphi \partial_i \varphi. \quad (1.205)$$

Notons que la densité d'énergie est comme d'habitude la somme d'une densité d'énergie cinétique et d'une densité d'énergie potentielle. Les composantes  $T_{j0}$  et  $T_{ji}$  sont les densités de courant d'énergie et d'impulsion.

Dérivons maintenant les courants de Noether associés à l'invariance par transformation de Lorentz. Les paramètres des transformations de Lorentz  $\omega_{\nu\rho}$  forment un tenseur antisymétrique à deux indices, il n'y a donc que 6 paramètres indépendants. Un choix de paramètres indépendants est  $\omega_{\nu\rho}$ ,  $\nu < \rho$ . On obtiendra un nombre identique de courants de Noether indépendants, que l'on peut noter  $\mathcal{M}^{\mu,\nu\rho}$ ,  $\nu < \rho$ , et qui peuvent être vus comme les composantes

indépendantes d'un tenseur à trois indices, antisymétrique sur les deux derniers indices,  $\mathcal{M}^{\mu,\nu\rho} = -\mathcal{M}^{\mu,\rho\nu}$ . On peut à nouveau utiliser la formule (1.119) pour établir l'expression des courants. Sous une transformation de Lorentz infinitésimale, on aura

$$\begin{aligned} \sum_{\nu < \rho} \omega_{\nu\rho} \mathcal{M}^{\mu,\nu\rho} &= \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} \mathcal{M}^{\mu,\nu\rho} = -\delta\varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_\mu \varphi} - \delta x^\mu \mathcal{L} \\ &= \omega^\nu{}_\rho x^\rho (\partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu). \end{aligned} \quad (1.206)$$

Les courants de Noether associés à l'invariance par transformation de Lorentz s'écrivent donc

$$\mathcal{M}^{\mu,\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu \quad (1.207)$$

La conservation de ces courants pour une solution des équations du mouvement

$$\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu,\nu\rho} = 0 \quad (1.208)$$

est une conséquence de la conservation du tenseur énergie-impulsion et de la symétrie de ce tenseur. Les courants  $\mathcal{M}^{\mu,ij}$  sont associés à l'invariance par rotation, et les courants  $\mathcal{M}^{\mu,0i}$  à l'invariance par changement de référentiel, ou "boost" de Lorentz. On définit le moment cinétique du champ par

$$L^i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon^{ijk} \int d^3x \mathcal{M}^{0,jk} \Rightarrow \vec{L} = \int d^3x \partial_0 \varphi (\vec{x} \wedge \vec{\nabla}) \varphi. \quad (1.209)$$

### Solutions de l'équation de Klein-Gordon :

On se limite dans ce paragraphe au cas libre,  $g = 0$ . L'équation du mouvement est alors l'équation de Klein-Gordon (1.197). On passe en transformée de Fourier

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \varphi(p), \quad \varphi(-p) = \bar{\varphi}(p). \quad (1.210)$$

L'équation de Klein-Gordon s'écrit sur la transformée de Fourier

$$(-p^2 + m^2)\varphi(p) = 0. \quad (1.211)$$

La solution de cette équation est

$$\varphi(p) = 2\pi \delta(p^2 - m^2) a(p). \quad (1.212)$$

On notera  $\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . L'équation  $p^2 - m^2 = 0$  a pour solutions  $p^0 = \pm \omega(\vec{p})$ . Il est d'usage de séparer les solutions en fonction du signe de  $p^0$

$$\varphi(p) = 2\pi \delta(p^2 - m^2) (\theta(p^0) a(\vec{p}) + \theta(-p^0) \bar{a}(-\vec{p})). \quad (1.213)$$

La fonction complexe arbitraire  $a(\vec{p})$  ne dépend que des composantes spatiales du quadrivecteur  $p$ , puisque  $p^0$  est fixé. On obtient alors la forme des solutions de l'équation de Klein-Gordon (on a fait dans le second terme un changement de variables  $p \rightarrow -p$ )

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)(a(\vec{p})e^{-ipx} + \bar{a}(\vec{p})e^{ipx}). \quad (1.214)$$

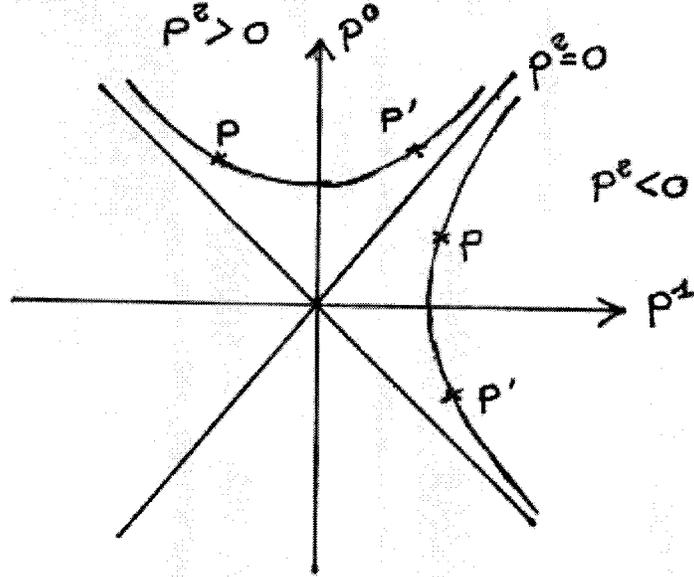
On aura de nombreuses occasions de rencontrer l'élément de volume qui apparaît dans cette équation. On utilisera donc pour lui une notation particulière

$$\frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0) = d\tilde{p}. \quad (1.215)$$

Quel gain de place! La propriété essentielle de cet élément de volume est qu'il est invariant sous les transformations de Lorentz. En effet, supposons que l'on fasse une transformation de Lorentz  $p^\mu \rightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ . Comme on l'a dit plus haut, on se limite à une transformation propre orthochrone. On a évidemment

$$d^4p' = d^4p, \quad \delta(p'^2 - m^2) = \delta(p^2 - m^2). \quad (1.216)$$

Il reste à montrer que la distribution  $\theta(p^0)$  est aussi invariante. Pour cela, il est bon de faire un dessin. On se contentera donc d'une dimension d'espace et une dimension de temps, ce qui ne modifie pas les conclusions.



On a représenté le cône de lumière et deux branches d'hyperboles, l'une à l'intérieur du cône de lumière,  $p^2 > 0$  et l'autre à l'extérieur,  $p^2 < 0$ . Si l'on prend deux points quelconques sur la même hyperbole, il existe une transformation de Lorentz qui fait passer de l'un à l'autre. On dit que chaque branche d'hyperbole forme une orbite sous l'action du groupe de Lorentz. On voit immédiatement que si l'on se trouve à l'extérieur du cône de lumière, il existe des transformations de Lorentz qui changent le signe de  $p^0$ , c'est-à-dire qui font passer d'un côté à l'autre de l'axe horizontal. En revanche, à l'intérieur du cône de lumière, la totalité de l'hyperbole est d'un seul côté de l'axe horizontal, et donc le signe de  $p^0$  ne change pas. On en conclut que  $\theta(p^0)$  n'est invariant de Lorentz qu'à la condition que l'on se trouve à l'intérieur du cône de lumière. Heureusement, la distribution  $\delta(p^2 - m^2)$  qui figure dans l'élément de volume (1.215) nous assure que c'est bien le cas.

Remarquons que l'on peut utiliser la distribution  $\delta(p^2 - m^2)$  pour effectuer l'intégration sur  $p^0$ . Si  $F(p)$  est une fonction quelconque

$$\int d\vec{p} F(p) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{p})} F(p^0 = \omega(\vec{p}), \vec{p}). \quad (1.217)$$

On peut utiliser cette équation pour écrire une solution de l'équation de

Klein-Gordon sous la forme

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{p})} (a(\vec{p})e^{-ipx} + \bar{a}(\vec{p})e^{ipx}). \quad (1.218)$$

Il est sous-entendu que  $p^0$  doit être pris égal à  $\omega(\vec{p})$  dans l'intégrand.

On aimerait maintenant inverser la relation (1.218) et exprimer les quantités  $a(\vec{p})$ ,  $\bar{a}(\vec{p})$  en fonction du champ et de ses dérivées. À un instant  $x^0 = t$  donné, la formule (1.218) peut être interprétée comme donnant la transformée de Fourier sur l'espace du champ. La transformée de Fourier inverse nous donne

$$a(\vec{p})e^{-i\omega(\vec{p})t} + \bar{a}(-\vec{p})e^{i\omega(\vec{p})x} = 2\omega(\vec{p}) \int d^3x e^{-i\vec{p}\vec{x}} \varphi(t, \vec{x}). \quad (1.219)$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport au temps de l'équation (1.218)

$$\partial_0 \varphi(x) = -i \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3} (a(\vec{p})e^{-ipx} - \bar{a}(\vec{p})e^{ipx}). \quad (1.220)$$

À nouveau, une transformée de Fourier inverse sur les coordonnées spatiales conduit à

$$a(\vec{p})e^{-i\omega(\vec{p})t} - \bar{a}(-\vec{p})e^{i\omega(\vec{p})x} = 2i \int d^3x e^{-i\vec{p}\vec{x}} \partial_0 \varphi(t, \vec{x}). \quad (1.221)$$

Une combinaison linéaire des équations (1.219) et (1.221) permet d'obtenir la fonction  $a(\vec{p})$  sous la forme

$$a(\vec{p}) = i \int d^3x e^{ipx} (\partial_0 \varphi(x) - ip^0 \varphi(x)) = i \int d^3x e^{ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x). \quad (1.222)$$

Dans le membre de droite de cette équation, il est sous-entendu que  $p^0$  doit être pris égal à  $\omega(\vec{p})$ . Si  $F$  et  $G$  sont deux fonctions du temps, on a utilisé la notation

$$F \overleftrightarrow{\partial}_0 G = F(\partial_0 G) - (\partial_0 F)G. \quad (1.223)$$

L'équation (1.222) a une interprétation très simple. Elle nous dit que la solution de l'équation de Klein-Gordon (1.218) est déterminée par les conditions initiales. En effet, la fonction complexe  $a(\vec{p})$  détermine le champ en tout point  $x$  de l'espace-temps, et d'après (1.222) elle est déterminée par la donnée du

champ et de la dérivée par rapport au temps du champ en tout point  $\vec{x}$  de l'espace à un instant donné  $x^0 = t$ .

**Interaction avec une source :**

On suppose désormais que l'action du champ scalaire s'écrit

$$S[\varphi] = \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) + j\varphi \right), \quad (1.224)$$

où  $j(x)$  est une fonction fixée en tout point de l'espace-temps, que l'on appelle la source du champ. Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x). \quad (1.225)$$

On a donc maintenant une équation aux dérivées partielles linéaire avec un second membre. Cette équation est facilement résolue si l'on dispose d'une fonction de Green  $G(x, y)$  de l'opérateur de Klein-Gordon  $\square + m^2$ . C'est une distribution qui dépend de deux points de l'espace-temps et satisfait

$$(\square + m^2)G(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (1.226)$$

Cette distribution sera étudiée dans le chapitre 3 de ce cours. On verra qu'il y a plusieurs possibilités, suivant les conditions asymptotiques choisies à grand temps. Pour l'instant, supposons que l'on dispose d'une fonction de Green  $G(x, y)$  symétrique,  $G(x, y) = G(y, x)$ . Alors la solution de l'équation de Klein-Gordon avec source s'écrit

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int d^4y G(x, y) j(y), \quad (1.227)$$

où  $\varphi_0(x)$  est une solution de l'équation de Klein-Gordon sans second membre.

**Auto-interaction :**

On suppose maintenant que l'on a à la fois une source et un terme d'interaction quartique. L'action s'écrit

$$S[\varphi] = \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) - \frac{g}{4!} \varphi^4 + j\varphi \right). \quad (1.228)$$

Les équations du mouvement sont

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x) - \frac{g}{3!} (\varphi(x))^3. \quad (1.229)$$

C'est une équation aux dérivées partielles non linéaire, et l'on ne connaît pas les solutions exactes. À l'aide d'une fonction de Green, on peut la transformer en une équation intégrale

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int d^4y G(x, y) (j(y) - \frac{g}{3!} (\varphi(y))^3). \quad (1.230)$$

Pour simplifier, on va supposer que les conditions à grand temps sont telles que la solution de l'équation libre  $\varphi_0(x)$  s'annule. L'équation précédente devient

$$\varphi(x) = \int d^4y G(x, y) j(y) - \frac{g}{3!} \int d^4y G(x, y) (\varphi(y))^3. \quad (1.231)$$

On va essayer de résoudre cette équation en perturbation, c'est-à-dire développer le champ en puissances de la constante de couplage  $g$ . Ce développement est obtenu en itérant l'équation (1.231). On remarque que le champ apparaît à la fois dans le membre de gauche et dans le membre de droite de l'équation, et l'on remplace le champ dans le membre de droite de l'équation par l'expression donnée par l'équation elle-même. La première itération conduit à

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int d^4y G(x, y) j(y) \\ &- \frac{g}{3!} \int d^4y G(x, y) (\int d^4z G(y, z) j(z) - \frac{g}{3!} \int d^4z G(y, z) (\varphi(z))^3)^3. \end{aligned} \quad (1.232)$$

C'est encore une équation exacte. Si l'on se limite à l'ordre  $g^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int d^4y G(x, y) j(y) - \frac{g}{3!} \int d^4y G(x, y) (\int d^4z G(y, z) j(z))^3 \\ &+ \frac{g^2}{3!2} \int d^4y G(x, y) (\int d^4z G(y, z) j(z))^2 \int d^4t G(y, t) (\varphi(t))^3 + O(g^3) \end{aligned}$$

À l'ordre considéré, on peut remplacer dans le membre de droite de cette équation le champ  $\varphi$  par son expression au plus bas ordre

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int d^4y G(x, y) j(y) - \frac{g}{3!} \int d^4y G(x, y) (\int d^4z G(y, z) j(z))^3 \\ &+ \frac{g^2}{3!2} \int d^4y G(x, y) (\int d^4z G(y, z) j(z))^2 \int d^4t G(y, t) (\int d^4u G(t, u) j(u))^3 \\ &+ O(g^3) \end{aligned}$$

L'expression obtenue peut être vue indifféremment comme un développement en puissances de la constante de couplage, ou comme un développement en

puissances de la source  $j$ . Le champ solution des équations du mouvement peut être considéré comme une fonctionnelle non locale de la source  $j$ . On remarque que seules les puissances impaires de la source apparaissent dans ce développement. Si l'on écrit généralement ce développement sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int d^4y W^{(2)}(x, y) j(y) \\ &+ \frac{1}{3!} \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 W^{(4)}(x, y_1, y_2, y_3) j(y_1) j(y_2) j(y_3) + \dots \quad (1.233) \\ &= \sum_n \frac{1}{(2n)!} \int d^4y_1 \dots d^4y_{2n-1} W^{(2n)}(x, y_1, \dots, y_{2n-1}) j(y_1) \dots j(y_{2n-1}). \end{aligned}$$

On calcule alors facilement les distributions qui apparaissent aux premiers ordres

$$\begin{aligned} W^{(2)}(x, y) &= G(x, y), \\ W^{(4)}(x, y_1, y_2, y_3) &= -g \int d^4z G(x, z) G(y_1, z) G(y_2, z) G(y_3, z) \quad (1.234) \\ W^{(6)}(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) &= \\ g^2 \int d^4t d^4u &G(x, t) G(y_1, t) G(y_2, t) G(t, u) G(y_3, u) G(y_4, u) G(y_5, u) + \dots \end{aligned}$$

Dans la dernière équation, les trois points représentent des termes de la même forme que le premier, qui correspondent aux différentes façons de grouper deux points parmi  $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  avec  $x$ . Il y a dix termes en tout.

Il est très commode de donner une représentation graphique de ces équations. Les éléments à partir desquels on construit ces graphes sont la ligne et le vertex, qui est un point d'espace-temps  $z$  où se rencontrent quatre lignes. À chacun de ces deux éléments est associé une règle de calcul permettant d'associer à un graphe une expression mathématique.

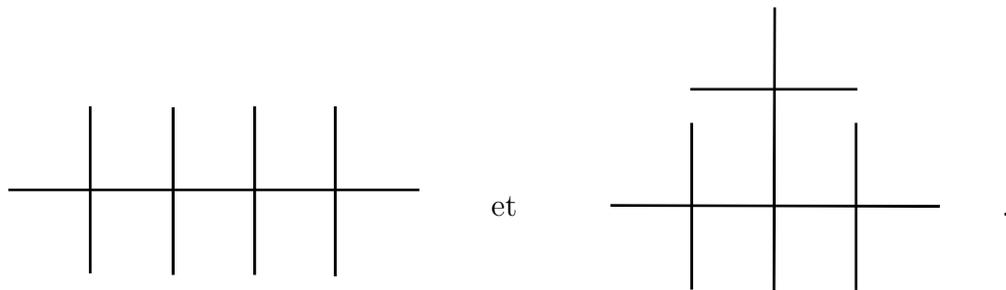
- Ligne :  $x \text{ --- } y = G(x, y),$
- Vertex :  $\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} = -g \int d^4z,$

Les équations (1.234) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} W^{(2)}(x, y) &= x \text{ --- } y, \\ W^{(4)}(x, y_1, y_2, y_3) &= \begin{array}{c} y_1 \\ | \\ x \text{ --- } y_2 \\ | \\ y_3 \end{array}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W^{(6)}(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = & \begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \\ | \quad | \\ x \text{---} \text{---} y_3 \\ | \quad | \\ y_5 \quad y_4 \end{array} + \\
& \begin{array}{c} y_2 \quad y_1 \\ | \quad | \\ x \text{---} \text{---} y_3 \\ | \quad | \\ y_5 \quad y_4 \end{array} + \dots,
\end{aligned}$$

La fonction  $W^{(10)}$  est la première à contenir deux graphes de topologies distinctes,



Seuls interviennent dans l'expression des  $W^{2n}$  les graphes connexes, c'est-à-dire tels qu'entre deux points externes il existe toujours un chemin continu. De plus, ces graphes possèdent la propriété qu'une ligne ne peut pas se refermer sur elle-même. On dit que ce sont des graphes en arbres. Les graphes que l'on vient de décrire constituent un type particulier de graphes de Feynman. On verra dans le chapitre 4 de ce cours qu'interviennent en théorie quantique des champs non seulement des graphes en arbre, mais également des graphes contenant des boucles fermées, qui déterminent les corrections quantiques aux graphes en arbre.

**Limite non relativiste :** Revenons à la théorie libre, sans interaction

( $g = 0$ ) ni source ( $j(x) = 0$ ). Afin de considérer la limite non relativiste, on va réintroduire la vitesse de la lumière  $c$  dans l'équation de Klein-Gordon (1.197) et dans l'action correspondante. On prendra désormais  $x^0 = ct$ . Comme on souhaite que  $m$  ait la dimension d'une masse, il faut aussi introduire la constante de Planck  $\hbar$  et effectuer le remplacement de  $m$  par  $\frac{mc}{\hbar}$ , qui a la dimension de l'inverse d'une longueur. On notera de plus  $p = (p^0, \vec{p}) = \frac{1}{\hbar}(\frac{E}{c}, \vec{\mathbf{p}})$  et  $a(\vec{p}) = 2\hbar^2 m c b(\vec{\mathbf{p}})$ . Les solutions de l'équation de Klein-Gordon ont alors l'expression

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{mc^2}{E} (b(\vec{\mathbf{p}})e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{\mathbf{p}}\vec{x})} + \bar{b}(\vec{\mathbf{p}})e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{\mathbf{p}}\vec{x})}), \quad E = \sqrt{\vec{\mathbf{p}}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (1.235)$$

Supposons que l'on se limite à des paquets d'ondes de faibles impulsions, c'est-à-dire que  $b(\vec{\mathbf{p}})$  s'annule sauf si  $\vec{\mathbf{p}}^2 \ll (mc)^2$ . On peut alors développer l'énergie en puissances des impulsions,  $E = mc^2 + \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m}$ , et le champ devient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t} \psi(t, \vec{x}) + e^{\frac{i}{\hbar}mc^2 t} \bar{\psi}(t, \vec{x}), \\ \psi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} b(\vec{\mathbf{p}}) e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m} t - \vec{\mathbf{p}}\vec{x})}. \end{aligned} \quad (1.236)$$

On remarque que le champ  $\psi(t, \vec{x})$  ainsi obtenu est une solution de l'équation de Schrödinger pour une particule libre de masse  $m$ . Supposons maintenant que le champ  $\varphi(x)$  ne soit pas nécessairement une solution des équations du mouvement, mais qu'il n'en soit pas trop éloigné, et en particulier qu'on puisse l'écrire sous la forme

$$\varphi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t} \psi(t, \vec{x}) + e^{\frac{i}{\hbar}mc^2 t} \bar{\psi}(t, \vec{x}), \quad (1.237)$$

où le champ  $\psi(t, \vec{x})$  n'est pas nécessairement de la forme (1.236), mais varie lentement dans le temps, c'est-à-dire

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) \right| \ll \left| \frac{mc^2}{\hbar} \psi(t, \vec{x}) \right|. \quad (1.238)$$

On va tenir compte de la forme (1.237) du champ et de la condition (1.238) dans l'action, qui s'écrit avec nos notations actuelles

$$S[\varphi] = c \int dt d^3x \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \varphi)^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^2 \right). \quad (1.239)$$

Lorsqu'on remplace le champ par son expression (1.237), on se débarrasse impitoyablement des termes qui contiennent un facteur oscillant rapide  $e^{\pm \frac{2i}{\hbar} mc^2 t}$ . La condition (1.238) permet de plus d'éliminer les termes quadratiques de la forme  $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ . On obtient alors l'action

$$S[\psi, \bar{\psi}] = 2mc \int dt d^3x \left( \frac{i}{2\hbar} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \psi \right) - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \bar{\psi} \vec{\nabla} \psi \right). \quad (1.240)$$

Cette action est identique, à un facteur  $2mc$  près, à celle étudiée dans l'exercice (1.G). Elle est la limite non relativiste de l'action (1.239), et donc l'équation de Schrödinger est la limite non relativiste de l'équation de Klein-Gordon. Notons au passage la limite non relativiste du terme d'interaction quartique

$$c \int d^4x \frac{g}{4!} \varphi^4 \implies c \int dt d^3x \frac{g}{4} (\bar{\psi})^2 (\psi)^2. \quad (1.241)$$

Ce terme n'a pas d'interprétation en terme de mécanique quantique d'une particule de masse  $m$ . On verra dans le prochain chapitre qu'il a une interprétation simple pour une assemblée de particules identiques en nombre quelconque.

Enfin, montrons que la loi de transformation assez compliquée (1.139) de la fonction d'onde sous les changements de référentiel galiléens peut être déduite de la loi de transformation très simple (1.192) du champ scalaire sous les transformations de Poincaré. Considérons dans la théorie invariante relativiste un "boost" de Lorentz de vitesse  $v$  le long de l'axe  $Oz$ . La loi de transformation des coordonnées d'espace-temps s'écrit

$$\begin{aligned} ct' = \gamma(ct + \frac{v}{c}z) &\Leftrightarrow t' = \gamma(t + \frac{v}{c^2}z) = t + \frac{v}{c^2}z + \frac{v^2}{2c^2}t + O(\frac{v^3}{c^3}) \\ z' = \gamma(z + vt) &= z + vt + O(\frac{v^2}{c^2}), \end{aligned} \quad (1.242)$$

où l'on a utilisé la notation  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . On voit que dans la limite où la vitesse de la lumière  $c$  tend vers l'infini, cette transformation devient un changement de référentiel galiléen de vitesse  $v$  le long de  $Oz$ . Il nous faut cependant garder pour l'instant les termes d'ordre  $\frac{1}{c^2}$  dans le développement de  $t'$ . On se place désormais dans la limite non relativiste, et on utilise donc l'expression (1.236) du champ scalaire en terme de la fonction d'onde, avant et après transformation

$$\begin{aligned} \varphi'(x') &= e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t'} \psi'(t', \vec{x}') + e^{\frac{i}{\hbar} mc^2 t'} \bar{\psi}'(t', \vec{x}'), \\ e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t'} &= e^{-\frac{i}{\hbar} (mc^2 t + \frac{1}{2} mv^2 t + mvz + O(\frac{v}{c}))}. \end{aligned} \quad (1.243)$$

On en déduit la loi de transformation non relativiste

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \Rightarrow \psi'(t', \vec{x}') = e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{1}{2}mv^2t + mvz)} \psi(t, \vec{x}). \quad (1.244)$$

**Formalisme hamiltonien :** On considère à nouveau l'action (1.195). La densité de moment conjugué du champ scalaire s'écrit

$$\pi_t(\vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi(x)} = \partial_0 \varphi(x). \quad (1.245)$$

Le Hamiltonien et le crochet de Poisson sont alors donnés par

$$\begin{aligned} H[\varphi_t, \pi_t] &= \int d^3x \left( \frac{1}{2}((\pi_t(\vec{x}))^2 + (\vec{\nabla} \varphi_t(\vec{x}))^2 + m^2(\varphi_t(\vec{x}))^2) + \frac{g}{4!}(\varphi_t(\vec{x}))^4 \right), \\ \{\varphi_t(\vec{x}), \pi_t(\vec{x}')\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (1.246)$$

L'énergie et l'impulsion totales  $P_\mu$  du champ peuvent s'écrire comme des fonctionnelles sur l'espace des phases sous la forme

$$\begin{aligned} P_0[\varphi_t, \pi_t] &= \int d^3x T_{00} = H[\varphi_t, \pi_t], \\ P_i[\varphi_t, \pi_t] &= \int d^3x T_{0i} = \int d^3x \pi_t(\vec{x}) \partial_i \varphi_t(\vec{x}). \end{aligned} \quad (1.247)$$

On calcule également les charges totales  $M^{\mu\nu}$  associées à l'invariance de Lorentz

$$\begin{aligned} M^{0i}[\varphi_t, \pi_t] &= \int d^3x \mathcal{M}^{0,0i} = \int d^3x (T^{00}x^i - T^{0i}x^0) \\ &= \int d^3x \left( \frac{1}{2}((\pi_t)^2 + (\vec{\nabla} \varphi_t)^2 + m^2(\varphi_t)^2) + \frac{g}{4!}(\varphi_t)^4 \right) x^i - \pi_t \partial_i \varphi_t x^0. \end{aligned} \quad (1.248)$$

$$\begin{aligned} M^{ij}[\varphi_t, \pi_t] &= \int d^3x \mathcal{M}^{0,ij} = \int d^3x (T^{0i}x^j - T^{0j}x^i) \\ &= \int d^3x \pi_t (x^j \partial^i - x^i \partial^j) \varphi_t. \end{aligned} \quad (1.249)$$

Remarquons que les charges conservées  $M^{0i}$  associées aux "boosts" de Lorentz dépendent explicitement du temps. On vérifie que les charges conservées engendrent les transformations infinitésimales du groupe de Poincaré

$$\begin{aligned} \{a^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \varphi_t(\vec{x})\} &= -a^0 \pi_t(\vec{x}) - a^i \partial_i \varphi_t(\vec{x}) \\ &\quad - \omega^0{}_i x^i \pi_t(\vec{x}) - (\omega^i{}_j x^j + \omega^i{}_0 x^0) \partial_i \varphi_t(\vec{x}). \end{aligned} \quad (1.250)$$

On vérifie non sans peine que l'algèbre des charges conservées s'écrit

$$\begin{aligned} \{P_\mu, P_\nu\} &= 0, \quad \{M_{\mu\nu}, P_\rho\} = -\eta_{\nu\rho} P_\mu + \eta_{\mu\rho} P_\nu, \\ \{M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\} &= \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (1.251)$$

On se limite maintenant au cas libre,  $g = 0$ . On va faire un changement de variables dans l'espace des phases donné par la formule (1.222). À un instant donné, par exemple  $t = 0$ , on pose

$$\begin{aligned} a(\vec{p}) &= i \int d^3x e^{-i\vec{p}\vec{x}} (\pi_{t=0}(\vec{x}) - ip^0 \varphi_{t=0}(\vec{x})), \\ \bar{a}(\vec{p}) &= -i \int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}} (\pi_{t=0}(\vec{x}) + ip^0 \varphi_{t=0}(\vec{x})). \end{aligned} \quad (1.252)$$

On peut prendre les fonctions  $a(\vec{p})$ ,  $\bar{a}(\vec{p})$  pour toute valeur de  $\vec{p}$  comme coordonnées sur l'espace des phases. Comme on sait que ces mêmes fonctions déterminent une solution des équations du mouvement, on en déduit que, comme toujours, l'espace des phases est identique à l'espace des solutions des équations du mouvement. Le crochet de Poisson des nouvelles variables se calcule en utilisant l'équation (1.246)

$$\begin{aligned} \{a(\vec{p}), a(\vec{p}')\} &= 0, & \{\bar{a}(\vec{p}), \bar{a}(\vec{p}')\} &= 0 \\ \{a(\vec{p}), \bar{a}(\vec{p}')\} &= -i(2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (1.253)$$

Le Hamiltonien prend une forme très simple

$$H[a, \bar{a}] = \int d\tilde{p} \omega(\vec{p}) \bar{a}(\vec{p}) a(\vec{p}). \quad (1.254)$$

Plus généralement, le quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit

$$P_\mu[a, \bar{a}] = \int d\tilde{p} p_\mu \bar{a}(\vec{p}) a(\vec{p}). \quad (1.255)$$