

3 Champ scalaire quantifié

3.1 Champ libre, espace de Fock

On considère, en quatre dimensions d'espace-temps, un champ scalaire réel $\varphi(x)$ de masse m . L'action s'écrit

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2). \quad (3.1)$$

L'équation du mouvement est l'équation de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi = 0. \quad (3.2)$$

Comme d'habitude dans le formalisme hamiltonien, on utilisera la notation $\varphi(x^0 = t, \vec{x}) = \varphi_t(\vec{x})$. La densité de moment conjugué s'écrit

$$\pi_t(\vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi(t, \vec{x})} = \partial_0 \varphi(t, \vec{x}). \quad (3.3)$$

Le Hamiltonien et les crochets de Poisson sont donnés par

$$H[\varphi_t, \pi_t] = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\pi_t(\vec{x})^2 + (\vec{\nabla} \varphi_t(\vec{x}))^2 + m^2 (\varphi_t(\vec{x}))^2 \right), \\ \{\varphi_t(\vec{x}), \varphi_t(\vec{y})\} = 0, \quad \{\pi_t(\vec{x}), \pi_t(\vec{y})\} = 0, \quad \{\varphi_t(\vec{x}), \pi_t(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.4)$$

La quantification de ce modèle consiste à remplacer les variables $\varphi_t(\vec{x})$, $\pi_t(\vec{x})$ de l'espace de phase par des opérateurs $\varphi(t, \vec{x})$, $\pi(t, \vec{x})$ agissant dans un espace de Hilbert. On se place en représentation de Heisenberg, et les opérateurs dépendent du temps. Ces opérateurs satisfont des relations de commutation à temps égaux déduits des crochets de Poisson canoniques

$$[\varphi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{y})] = 0, \quad [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0, \quad [\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.5)$$

Dans la troisième de ces équations, l'opérateur identité de l'espace de Hilbert est sous-entendu dans le membre de droite. Le champ classique et son moment conjugué sont des fonctions réelles. Il leur correspond donc des opérateurs hermitiques

$$\varphi^\dagger(t, \vec{x}) = \varphi(t, \vec{x}), \quad \pi^\dagger(t, \vec{x}) = \pi(t, \vec{x}). \quad (3.6)$$

Il nous faut maintenant choisir un Hamiltonien qui, dans la représentation de Heisenberg, détermine la dynamique des opérateurs. Pour l'instant, on

va simplement remplacer dans le Hamiltonien classique (3.5) les variables de l'espace des phases par des opérateurs. L'opérateur ainsi obtenu sera appelé Hamiltonien naïf

$$H_{\text{naïf}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\pi(t, \vec{x})^2 + (\vec{\nabla}\varphi(t, \vec{x}))^2 + m^2(\varphi(t, \vec{x}))^2 \right). \quad (3.7)$$

Les opérateurs de champ obéissent aux équations d'évolution

$$\partial_0\varphi(t, \vec{x}) = i[H_{\text{naïf}}, \varphi(t, \vec{x})], \quad \partial_0\pi(t, \vec{x}) = i[H_{\text{naïf}}, \pi(t, \vec{x})]. \quad (3.8)$$

On obtient alors, à l'aide des relations de commutation (3.6)

$$\partial_0\varphi(t, \vec{x}) = \pi(t, \vec{x}), \quad \partial_0\pi(t, \vec{x}) = (\Delta - m^2)\varphi(t, \vec{x}). \quad (3.9)$$

On trouve que la relation entre champ et moment est la même que dans le cas classique, et que l'opérateur de champ dans la représentation de Heisenberg obéit à l'équation de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0. \quad (3.10)$$

On a déjà étudié les solutions de cette équation, et l'on sait donc qu'on peut écrire l'opérateur de champ sous la forme

$$\varphi(x) = \int d\vec{p} (a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx}), \quad p^0 = \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (3.11)$$

où les opérateurs $a(\vec{k})$ et $a^\dagger(\vec{k})$ sont adjoints l'un de l'autre. Inversement, on peut exprimer ces opérateurs en termes de l'opérateur de champ

$$a(\vec{p}) = i \int d^3x e^{ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(t, \vec{x}), \quad a^\dagger(\vec{p}) = -i \int d^3x e^{-ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(t, \vec{x}). \quad (3.12)$$

Les relations de commutation des opérateurs $a(\vec{k})$ et $a^\dagger(\vec{k})$ se déduisent des relations de commutation à temps égaux de l'opérateur de champ

$$\begin{aligned} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] &= \int d^3x d^3y e^{ipx - ip'y} [\pi(t, \vec{x}) - ip^0\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y}) + ip'^0\varphi(t, \vec{y})] \\ &= \int d^3x d^3y e^{ipx - ip'y} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) (p^0 + p'^0) = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (3.13)$$

On obtient de même

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = 0, \quad [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 0. \quad (3.14)$$

On va maintenant chercher à interpréter les opérateurs $a(\vec{p})$ et $a^\dagger(\vec{p})$ comme les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule d'énergie-impulsion p . On commence par définir le vecteur vide, interprété comme l'état dans lequel il n'y a pas de particule, par la condition

$$\forall \vec{p} \quad a(\vec{p})|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (3.15)$$

Cette équation signifie simplement qu'on ne peut pas enlever de particule d'un état qui n'en contient pas. On définit ensuite un état à une particule d'impulsion \vec{p} par

$$a^\dagger(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p}\rangle. \quad (3.16)$$

Calculons le produit scalaire de deux états de ce type

$$\langle \vec{p}|\vec{p}'\rangle = \langle 0|a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}')|0\rangle = \langle 0|[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] |0\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (3.17)$$

On voit donc que l'opérateur $a^\dagger(\vec{k})$ crée un état qui n'est pas normalisable. Pour obtenir un état normalisable, on forme un paquet d'onde

$$|F\rangle = \int d\tilde{p} F(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \quad \langle F|F\rangle = \int d\tilde{p} |F(\vec{p})|^2. \quad (3.18)$$

L'opérateur nombre de particules s'écrit

$$N = \int d\tilde{p} a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}). \quad (3.19)$$

Un état contenant n particules d'impulsion $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ est obtenu par action de n opérateurs de création

$$|\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1) \cdots a^\dagger(\vec{p}_n)|0\rangle. \quad (3.20)$$

Les opérateurs de création $a^\dagger(\vec{p})$ commutent entre eux. On en déduit que l'état que l'on vient de définir est invariant sous une permutation quelconque des particules

$$\forall P \in \mathcal{S}_n \quad |\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n\rangle = |\vec{p}_{P_1} \cdots \vec{p}_{P_n}\rangle. \quad (3.21)$$

On est donc en train de construire un espace de Fock pour des bosons identiques. De plus, l'état d'une particule est complètement caractérisé par la donnée de son impulsion. On en déduit que les particules sont de spin nul.

Exercice 3.A : Montrer que le produit scalaire de deux états du type (3.21) s'écrit

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_n \rangle = (2\pi)^{3n} \sum_{P \in \mathcal{S}_n} (\Pi_{i=1}^n 2p_i^0 \delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}'_{P_i})). \quad (3.22)$$

Montrer que le projecteur Π_n sur les états à n particules s'écrit

$$\Pi_n = \frac{1}{n!} \int d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_1 |\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n|. \quad (3.23)$$

On peut exprimer le hamiltonien "naïf" donné en (3.7) en fonction des opérateurs de création et d'annihilation. On obtient

$$H_{\text{naïf}} = \frac{1}{2} \int d\tilde{p} \omega(\vec{p}) (a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})). \quad (3.24)$$

On en déduit les relations de commutation

$$[H_{\text{naïf}}, a^\dagger(\vec{p})] = \omega(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}), \quad [H_{\text{naïf}}, a(\vec{p})] = -\omega(\vec{p})a(\vec{p}). \quad (3.25)$$

Les opérateurs $a^\dagger(\vec{p})$ et $a(\vec{p})$ créent et détruisent une particule d'énergie $\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, ce qui correspond bien à la relation entre l'énergie et l'impulsion d'une particule relativiste de masse m . On a cependant un léger problème lorsqu'on calcule la valeur moyenne dans le vide du hamiltonien naïf

$$\langle 0 | H_{\text{naïf}} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d\tilde{p} \omega(\vec{p}) \langle 0 | a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d\tilde{p} \omega(\vec{p}) (2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \delta^3(\vec{0}). \quad (3.26)$$

On ne pourrait donner de sens à cette expression que si l'on avait un nombre fini de valeurs possibles de l'impulsion. Dans ce cas, le résultat obtenu s'interprète simplement comme l'énergie de point zéro (l'énergie du niveau fondamental) d'un système d'oscillateurs harmoniques. De ce point de vue, le problème provient du fait qu'en théorie des champs on a une infinité (continue) de variables dynamiques.

D'un autre point de vue, on peut considérer que le problème est dû au fait que dans le Hamiltonien naïf (3.7) on fait le produit d'opérateurs de champ pris au même point d'espace-temps. Si l'on calcule la valeur moyenne dans le vide du produit de deux opérateurs de champ pris à des points distincts, on obtient

$$\langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle = \int d\tilde{p} e^{-ip(x-y)} \quad (3.27)$$

Le membre de droite est une distribution, singulière lorsque les deux points coïncident. On aura bien d'autres occasions d'observer que le produit d'opérateurs au même point est mal défini.

Dans le cas du champ libre, ce problème peut être surmonté en se donnant une prescription pour l'ordre des opérateurs de création et d'annihilation dans un produit. Dans la théorie des champs classique, l'ordre dans lequel on met les variables de l'espace des phases $a(\vec{k})$, $\bar{a}(\vec{k})$ est sans importance. Pour associer à toute fonctionnelle $F[a, \bar{a}]$ sur l'espace des phases un unique opérateur de l'espace de Hilbert, on doit remplacer les variables de l'espace des phases par des opérateurs, et spécifier l'ordre dans lequel on met ces opérateurs. La règle que l'on utilisera, appelée ordre normal, est que l'on met à gauche les opérateurs de création, et à droite les opérateurs d'annihilation. On notera : $F[a, a^\dagger]$: l'opérateur obtenu en appliquant cette règle. Considérons quelques exemples très simples

$$\begin{aligned} & : a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') := a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k}), \\ & : a(\vec{k}_1)a^\dagger(\vec{k}_2)a(\vec{k}_3)a^\dagger(\vec{k}_4) := a^\dagger(\vec{k}_2)a^\dagger(\vec{k}_4)a(\vec{k}_1)a(\vec{k}_3). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Tout opérateur de champ $\varphi(x)$, $\pi(x)$, $\partial_i\varphi(x) \dots$ est la somme d'un terme linéaire dans les opérateurs d'annihilation (partie à énergie positive) et d'un terme linéaire dans les opérateurs de création (partie à énergie négative). On peut donc définir l'ordre normal pour un produit quelconque d'opérateurs de champ. On choisit alors l'opérateur Hamiltonien comme l'opérateur normalement ordonné associé au Hamiltonien classique

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} : (\pi(x)^2 + (\vec{\nabla}\varphi(x))^2 + m^2\varphi(x)^2) : . \quad (3.29)$$

Un calcul simple conduit à l'expression

$$H = \int d\vec{p} \omega(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) \quad (3.30)$$

On vérifie que les relations de commutation du Hamiltonien avec les opérateurs de création et d'annihilation ne sont pas modifiées

$$[H, a^\dagger(\vec{p})] = \omega(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}), \quad [H, a(\vec{p})] = -\omega(\vec{p})a(\vec{p}). \quad (3.31)$$

Comme les opérateurs d'annihilation sont placés à droite, la valeur moyenne dans le vide du Hamiltonien est nulle, $\langle 0|H|0 \rangle = 0$. D'autre part, on peut

écrire formellement la relation entre le Hamiltonien normalement ordonné (3.30) et le Hamiltonien naïf (3.24) sous la forme

$$H = H_{\text{naïf}} - \langle 0 | H_{\text{naïf}} | 0 \rangle. \quad (3.32)$$

Le passage du Hamiltonien naïf au Hamiltonien normalement ordonné consiste donc simplement à redéfinir les énergies en leur retranchant à toutes la même quantité (infinie!). Cette procédure ne modifie pas la différence d'énergie entre deux niveaux. Elle n'a pas de conséquence physique, au moins tant que l'on ne considère pas l'interaction gravitationnelle.

Exercice 3.B : Fluctuations du vide

Soit $\varphi(x)$ un champ scalaire réel libre de masse m en quatre dimensions d'espace-temps. Soit $f(x)$ une fonction à décroissance rapide, et sa transformée de Fourier

$$f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} f(k). \quad (3.33)$$

On définit le champ "moyenné" $\varphi_f(x)$ par

$$\varphi_f(x) = \int d^4y \varphi(y) f(y-x) \quad (3.34)$$

Calculer la distribution de probabilité de l'opérateur $\varphi_f(x)$ dans le vide, qui est définie par :

$$\rho_f(a) = \langle 0 | \delta(\varphi_f(x) - a) | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha a} \langle 0 | e^{i\alpha \varphi_f(x)} | 0 \rangle. \quad (3.35)$$

On pourra être amené à utiliser l'expression du champ en terme des opérateurs de création et d'annihilation, et l'équation dite de Campbell-Hausdorff simplifiée, valable pour deux opérateurs A et B de l'espace de Hilbert qui commutent avec leur commutateur

$$[A, [A, B]] = 0, [B, [A, B]] = 0 \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}. \quad (3.36)$$

3.2 Invariance sous les transformations de Poincaré

Rappelons que la théorie classique du champ scalaire, en l'absence de source, est invariante sous les transformations de Poincaré

$$\begin{aligned} T_{\Lambda,a} : \quad x^\mu &\rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow \varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x - a)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

La loi de composition de ces transformations s'écrit

$$T_{\Lambda_1, a_1} T_{\Lambda_2, a_2} = T_{\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1}. \quad (3.38)$$

La variation du champ sous une transformation infinitésimale est

$$\Lambda = \mathbf{1} + \omega, \quad \delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) = -(\omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu) \partial_\mu \varphi(x). \quad (3.39)$$

À ces transformations de symétries sont associés des courants et charges de Noether

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}, \quad M^{\mu\nu} = \int d^3x (T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu). \quad (3.40)$$

Enfin, les crochets de Poisson des charges de Noether engendrent les transformations infinitésimales

$$\delta\varphi_t(\vec{x}) = \{\alpha_\mu P^\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \varphi_t(\vec{x})\}. \quad (3.41)$$

En mécanique quantique, on s'attend à ce qu'une transformation de symétrie soit une transformation de l'espace de Hilbert qui laissent invariantes toutes les probabilités de transition. Un théorème célèbre dû à Wigner montre qu'à toute transformation de symétrie est associée une transformation unitaire ou antiunitaire de l'espace de Hilbert ¹. On dira que la théorie quantique du champ scalaire est invariante sous les transformations de Poincaré si à toute transformation $T_{\Lambda,a}$ on peut associer un opérateur de l'espace de Fock $U(\Lambda, a)$ qui réalise cette transformation sur l'opérateur de champ, c'est-à-dire

$$U^{-1}(\Lambda, a) \varphi(x) U(\Lambda, a) = \varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x - a)). \quad (3.42)$$

¹Rappelons qu'une transformation antiunitaire V est caractérisé par les équations

$$V(\lambda|\psi\rangle + \rho|\chi\rangle) = \bar{\lambda}V|\psi\rangle + \bar{\rho}V|\chi\rangle, \quad \langle\psi|V|\chi\rangle = \langle\chi|V^{-1}|\psi\rangle.$$

On demandera de plus que les opérateurs $U(\Lambda, a)$ ne dépendent pas du temps en représentation de Heisenberg. À la transformation identité du groupe de Poincaré est associée la transformation identité de l'espace de Fock. Si l'on se souvient qu'on se limite à des transformations de Lorentz dans $SO^\uparrow(1, 3)$, les transformations de Poincaré forment un groupe connexe, et il existe un chemin continu qui relie l'identité à toute transformation $T_{\Lambda, a}$. Si l'on admet que les opérateurs $U(\Lambda, a)$ dépendent continûment des paramètres de transformations, on conclut que tous les opérateurs $U(\Lambda, a)$ sont unitaires. Cette conclusion s'applique à tout groupe de symétrie continu connexe.

Si l'on applique deux transformations successives sur l'opérateur de champ, on vérifie facilement

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda_2, a_2)U^{-1}(\Lambda_1, a_1)\varphi(x)U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = \\ = U^{-1}(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1a_2 + a_1)\varphi(x)U(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1a_2 + a_1). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Cette équation n'est pas tout à fait suffisante pour montrer que les opérateurs $U(\Lambda, a)$ forment une représentation du groupe de Poincaré. Elle laisse la possibilité d'une phase

$$U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = e^{i\alpha(\Lambda_1, a_1, \Lambda_2, a_2)}U(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1a_2 + a_1). \quad (3.44)$$

Il s'agit là d'un phénomène très général en mécanique quantique. Les opérateurs unitaires associés à un groupe de symétrie continu ne forment pas nécessairement une représentation, mais ce que l'on appelle une représentation projective. Dans le cas particulier du groupe de Poincaré et du champ scalaire, on peut montrer que les opérateurs $U(\Lambda, a)$ peuvent être choisis tels que la phase α soit toujours nulle.

L'équation (3.42) n'est pas non plus suffisante pour déterminer l'action des transformations de Poincaré sur les vecteurs de l'espace de Fock. Il faut encore spécifier l'action de ces transformations sur le vecteur vide. Dans la mesure où il n'y a rien à transformer (pas de particule), il semble logique de demander que l'espace à une dimension engendré par le vide soit invariant sous les transformations de Poincaré. On montre alors qu'il est possible de choisir les opérateurs $U(\Lambda, a)$ de telle manière que le vecteur vide soit invariant

$$U(\Lambda, a)|0 \rangle = |0 \rangle. \quad (3.45)$$

Considérons maintenant une transformation infinitésimale, et écrivons que l'opérateur $U(\Lambda, a)$ doit s'approcher de l'opérateur identité de l'espace de

Fock

$$U(\Lambda = \mathbf{1} + \omega, a) = \mathbf{1} + i(a_\mu P^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) + \dots \quad (3.46)$$

L'unitarité de $U(\Lambda, a)$ implique que les opérateurs P^μ et $M^{\mu\nu}$ sont hermitiques

$$U^\dagger(\Lambda, a) = U^{-1}(\Lambda, a) \Rightarrow (P^\mu)^\dagger = P^\mu, \quad (M^{\mu\nu})^\dagger = M^{\mu\nu}, \quad (3.47)$$

et la loi de transformation (3.42) conduit à

$$\begin{aligned} \delta\varphi(x) &= -(\omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu)\partial_\mu\varphi(x) = -i[a_\mu P^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \varphi(x)] \\ \Rightarrow [P_\mu, \varphi(x)] &= -i\partial_\mu\varphi(x), \quad [M_{\mu\nu}, \varphi(x)] = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\varphi(x). \end{aligned} \quad (3.48)$$

D'autre part, les opérateurs P^μ et $M^{\mu\nu}$ doivent être indépendants du temps en représentation de Heisenberg, c'est-à-dire que leurs valeurs propres sont des charges conservées. Enfin, l'équation (3.45) implique que ces opérateurs annihilent le vecteur vide

$$P^\mu|0\rangle = 0, \quad M^{\mu\nu}|0\rangle = 0. \quad (3.49)$$

Les équations (3.48) sont le pendant quantique des lois de transformation classiques (3.41). Elles suggèrent que les opérateurs P^μ et $M^{\mu\nu}$ sont en correspondance avec charges classiques du même nom. De plus, les équations de Heisenberg pour le champ quantique libre ayant la même forme que les équations du mouvement classiques, les opérateurs associés aux charges classiques seront conservées. Enfin, afin d'assurer que les équations (3.49) soient satisfaites, on choisit P^μ et $M^{\mu\nu}$ comme les opérateurs normalement ordonnés associés aux charges classiques

$$\begin{aligned} P_0 = H &= \int d^3x \frac{1}{2} : \pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 := \int d\vec{p} \omega(p) a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}), \\ P_i &= \int d^3x : \pi \partial_i \varphi := \int d\vec{p} p_i a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}), \\ M_{0i} &= \int d^3x : T_{00}x_i - T_{0i}x_0 := -i \int d\vec{p} a^\dagger(\vec{p}) \omega(\vec{p}) \frac{\partial}{\partial p^i} a(\vec{p}), \\ M_{ij} &= \int d^3x : T_{0i}x_j - T_{0j}x_i := -i \int d\vec{p} a^\dagger(\vec{p}) \left(p_i \frac{\partial}{\partial p^j} - p_j \frac{\partial}{\partial p^i} \right) a(\vec{p}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ces opérateurs satisfont l'algèbre de Poincaré

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \quad [M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

On vérifie enfin que les opérateurs ainsi définis satisfont les relations de commutation (3.48) avec l'opérateur de champ et annihilent le vecteur vide.

On peut alors reconstruire des transformations de Poincaré finie en utilisant l'application exponentielle. Ainsi, on obtiendra une translation finie par

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1}, a) &= e^{ia^\mu P_\mu}, \quad e^{iaP} \varphi(x) e^{-iaP} = \varphi(x + a) \\ \Leftrightarrow e^{iaP} a^\dagger(\vec{p}) e^{-iaP} &= e^{iap} a^\dagger(\vec{p}), \quad e^{iaP} a(\vec{p}) e^{-iaP} = e^{-iap} a(\vec{p}), \end{aligned} \quad (3.52)$$

et une transformation de Lorentz finie par

$$\begin{aligned} U(\Lambda, 0) &= e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}, \quad (\Lambda)^\mu{}_\nu = (e^\omega)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \frac{1}{2} \omega^\mu{}_\rho \omega^\rho{}_\nu + \dots \\ e^{\frac{i}{2} \omega M} \varphi(x) e^{-\frac{i}{2} \omega M} &= \varphi(\Lambda x) \\ \Leftrightarrow e^{\frac{i}{2} \omega M} a^\dagger(\vec{p}) e^{-\frac{i}{2} \omega M} &= a^\dagger(\overrightarrow{\Lambda p}), \quad e^{\frac{i}{2} \omega M} a(\vec{p}) e^{-\frac{i}{2} \omega M} = a(\overrightarrow{\Lambda p}), \end{aligned} \quad (3.53)$$

où $\overrightarrow{\Lambda p}$ est la partie spatiale du quadrivecteur Λp .

Enfin, on peut maintenant écrire l'action d'une transformation de Poincaré sur les vecteurs de l'espace de Fock

$$\begin{aligned} e^{iaP} |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots \vec{p}_n \rangle &= e^{i(p_1 + p_2 + \dots + p_n)a} |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots \vec{p}_n \rangle \\ e^{\frac{i}{2} \omega M} |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots \vec{p}_n \rangle &= |\overrightarrow{\Lambda p}_1 \overrightarrow{\Lambda p}_2 \dots \overrightarrow{\Lambda p}_n \rangle. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Transformation discrètes :

On va maintenant étudier la réalisation des transformations discrètes parité et renversement du temps dans l'espace de Fock. Commençons par la transformation de parité, dont on rappelle qu'elle est définie par

$$P : \quad x = (x^0, \vec{x}) \rightarrow x_P = (x^0, -\vec{x}). \quad (3.55)$$

Il y a deux transformations possibles pour le champ

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi_P(x_P) = \eta_P \varphi(x), \quad \eta_P = \pm 1. \quad (3.56)$$

Lorsque $\eta_P = 1$, on dira que l'on a affaire à un scalaire vrai, et lorsque $\eta_P = -1$, que l'on a affaire à un pseudo-scalaire. Notons que l'action classique libre (3.1) est invariante sous les deux types de transformation. Un champ libre peut être considéré indifféremment comme scalaire ou pseudo-scalaire. C'est seulement lorsqu'on a plusieurs champs en interaction qu'il peut arriver qu'un seul type de transformation, voire aucun, soit une invariance de l'action.

On va maintenant chercher une transformation unitaire U_P qui réalise la transformation de parité sur l'opérateur de champ

$$U_P^{-1}\varphi(x)U_P = \varphi_P(x) = \eta_P\varphi(x_P), \quad (3.57)$$

et qui laisse invariant le vecteur vide, $U_P|0\rangle = |0\rangle$. À partir de l'action sur l'opérateur de champ, on trouve l'action de la transformation de parité sur les opérateurs de création et d'annihilation

$$U_P^{-1}a(\vec{p})U_P = \eta_P a(-\vec{p}), \quad U_P^{-1}a^\dagger(\vec{p})U_P = \eta_P a^\dagger(-\vec{p}). \quad (3.58)$$

L'action de l'opérateur parité sur les états de l'espace de Hilbert s'écrit alors

$$U_P|\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_n\rangle = \eta_P^n |-\vec{p}_1 - \vec{p}_2 \cdots - \vec{p}_n\rangle \quad (3.59)$$

On laisse au lecteur le soin de montrer que l'opérateur

$$U_P = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\int d\vec{p}a^\dagger(\vec{p})(a(-\vec{p}) - \eta_P a(\vec{p}))\right). \quad (3.60)$$

réalise la transformation de parité (3.58).

Intéressons-nous maintenant au renversement du temps, défini par

$$T: \quad x = (x^0, \vec{x}) \rightarrow x_T = -x_P = (-x^0, \vec{x}). \quad (3.61)$$

À nouveau, il y a deux transformations possibles pour le champ scalaire réel

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi_T(x_T) = \eta_T\varphi(x), \quad \eta_T = \pm 1. \quad (3.62)$$

De manière très générale en mécanique quantique, on ne peut pas associer à la transformation de renversement du temps un opérateur unitaire, mais nécessairement un opérateur antiunitaire, que l'on notera U_T , et qui réalise la transformation de l'opérateur de champ

$$U_T^{-1}\varphi(x)U_T = \varphi_T(x) = \eta_T\varphi(x_T). \quad (3.63)$$

De plus, l'opérateur U_T doit être indépendant du temps et laisser le vide invariant, $U_T|0\rangle = |0\rangle$. On verra dans l'exercice (3.C) une preuve de l'antiunitarité de l'opérateur de renversement du temps. Observons simplement qu'à partir de la loi de transformation du champ (3.63), on obtient par dérivation par rapport au temps celle de l'opérateur moment conjugué

$$U_T^{-1}\pi(x)U_T = -\eta_T\pi(x_T). \quad (3.64)$$

On en déduit la loi de transformation du commutateur à temps égaux

$$U_T^{-1}[\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})]U_T = -[\varphi(-t, \vec{x}), \pi(-t, \vec{y})], \quad (3.65)$$

ce qui implique la relation

$$U_T^{-1}(i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\mathbf{1})U_T = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\mathbf{1}, \quad (3.66)$$

qui n'est pas cohérente si U_T est une transformation unitaire.

En prenant garde à l'antiunitarité de l'opérateur U_T , étudions les lois de transformations des opérateurs de création et d'annihilation. On déduit de (3.63)

$$\begin{aligned} U_T^{-1}\varphi(x)U_T &= U_T^{-1} \int d\vec{p}(a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx})U_T \\ &= \int d\vec{p}(U_T^{-1}a(\vec{p})U_T e^{ipx} + U_T^{-1}a^\dagger(\vec{p})U_T e^{-ipx}) \\ &= \eta_T \varphi(x_T) = \eta_T \int d\vec{p}(a(\vec{p})e^{-ipx_T} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx_T}) \\ &= \eta_T \int d\vec{p}(a(\vec{p})e^{ip_P x} + a^\dagger(\vec{p})e^{-ip_P x}) \\ &= \eta_T \int d\vec{p}(a(-\vec{p})e^{ipx} + a^\dagger(-\vec{p})e^{-ipx}), \end{aligned} \quad (3.67)$$

où l'on a utilisé les relations $px_T = -p_P x$, $p_P = (p^0, -\vec{p})$, et $d\vec{p} = d\vec{p}_P$. On obtient alors

$$U_T^{-1}a(\vec{p})U_T = \eta_T a(-\vec{p}), \quad U_T^{-1}a^\dagger(\vec{p})U_T = \eta_T a^\dagger(-\vec{p}). \quad (3.68)$$

Les transformations des opérateurs de création et d'annihilation sous le renversement du temps prennent la même forme que leurs transformations par parité. Il ne faut cependant pas oublier que U_P est un opérateur unitaire, et U_T un opérateur antiunitaire. Ce sont donc des opérateurs très différents.

Exercice 3.C : Renversement du temps, spectre du Hamiltonien

On considère un système quantique en représentation de Schrödinger, muni d'un hamiltonien H indépendant du temps et dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

On note T l'opération de renversement du temps, $T(t) = -t$, et T_a les opérateurs de translation du temps, $T_a(t) = t + a$. Montrer la relation :

$$T^{-1} \circ T_a \circ T = T_{-a} \quad (3.69)$$

A l'opération de translation dans le temps T_a est associé dans l'espace des états l'opérateur unitaire $U_a = e^{iH_a}$. On cherche un opérateur U_T qui réalise dans l'espace des états l'opération de renversement du temps. On admettra le théorème de Wigner (voir par exemple le tome 2 du Messiah), qui dit qu'à toute opération de symétrie peut être associé un opérateur unitaire ou anti-unitaire. La relation (3.69) définit l'action de l'opérateur U_T sur les opérateurs de translation :

$$U_T^{-1} U_a U_T = U_{-a} \quad (3.70)$$

En appliquant cette relation à un état propre de H d'énergie non nulle, montrer que U_T ne peut être choisi unitaire.

Exercice 3.D : Champ complexe, conjugaison de charge

On considère un champ scalaire complexe $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ et l'action libre

$$S[\varphi, \bar{\varphi}] = \int d^4x (\partial_\mu \bar{\varphi}(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \bar{\varphi}(x) \varphi(x)). \quad (3.71)$$

L'équation du mouvement pour le champ et son complexe conjugué est l'équation de Klein-Gordon, et l'on écrit dans ce cas la solution générale sous la forme

$$\varphi(x) = \int d\vec{p} (e^{-ipx} a(\vec{p}) + e^{ipx} \bar{b}(\vec{p})). \quad (3.72)$$

- 1) Déterminer les moments conjugués $\pi_t(\vec{x})$, $\bar{\pi}_t(\vec{x})$. Exprimer les variables $a(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ et leurs complexes conjugués en fonction des champs et de leurs moments conjugués. Déterminer le crochet de Poisson des variables $a(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ et de leurs complexes conjugués.
- 2) Montrer que l'action (3.71) est invariante sous les changements de phase

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi(x), \quad \bar{\varphi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\varphi}(x). \quad (3.73)$$

Déterminer la charge de Noether Q associée à cette symétrie continue en termes des variables $a(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ et de leurs complexes conjugués.

- 3) Décrire la théorie quantique correspondant à ce système classique. Montrer que les opérateurs $a(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ et leurs adjoints $a^\dagger(\vec{p})$, $b^\dagger(\vec{p})$ peuvent être

interprétés comme les opérateurs d'annihilation et de création de deux particules sans spin de même masse m . On donnera l'expression du Hamiltonien normalement ordonné en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.

4) À tout changement de phase, on associe un opérateur unitaire $U(\alpha)$ qui réalise la transformation

$$U^{-1}(\alpha)\varphi(x)U(\alpha) = e^{i\alpha}\varphi(x), \quad U^{-1}(\alpha)\varphi^\dagger(x)U(\alpha) = e^{-i\alpha}\varphi^\dagger(x), \quad (3.74)$$

et on écrit l'opérateur associé à une transformation infinitésimale sous la forme

$$U(\alpha) = \mathbf{1} + i\alpha Q + \dots \quad (3.75)$$

Donner l'expression de l'opérateur Q . Déterminer les relations de commutation

$$[Q, a^\dagger(\vec{p})], \quad [Q, b^\dagger(\vec{p})]. \quad (3.76)$$

Interpréter le résultat en terme de charge portée par les particules créées par $a^\dagger(\vec{p})$ et $b^\dagger(\vec{p})$. La particule créée par l'opérateur $b^\dagger(\vec{p})$ est appelée antiparticule de celle créée par $a^\dagger(\vec{p})$

5) On considère dans la théorie classique la transformation, appelée conjugaison de charge, qui échange le champ et son complexe conjugué

$$C : \varphi(x) \rightarrow \varphi_C(x) = \bar{\varphi}(x). \quad (3.77)$$

Montrer que cette transformation est une symétrie de l'action (3.71).

Soit U_C l'opérateur unitaire qui réalise cette transformation dans la théorie quantique

$$U_C^{-1}\varphi(x)U_C = \varphi^\dagger(x), \quad U_C^{-1}\varphi^\dagger(x)U_C = \varphi(x). \quad (3.78)$$

Déterminer la loi de transformation des opérateurs de création et d'annihilation sous l'action de la conjugaison de charge. Montrer que la charge Q change de signe dans cette transformation

$$U_C^{-1}QU_C = -Q. \quad (3.79)$$

6) On considère l'opérateur unitaire

$$U_\lambda = \exp\left(i\lambda \int d\vec{p}((a^\dagger(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p}))b(\vec{p}) + (b^\dagger(\vec{p}) - a^\dagger(\vec{p}))a(\vec{p}))\right), \quad (3.80)$$

où λ est un paramètre réel, et l'on définit

$$a_\lambda^\dagger(\vec{p}) = U_\lambda^{-1} a^\dagger(\vec{p}) U_\lambda, \quad b_\lambda^\dagger(\vec{p}) = U_\lambda^{-1} b^\dagger(\vec{p}) U_\lambda. \quad (3.81)$$

Montrer que ces opérateurs satisfont les équations différentielles

$$\frac{d}{d\lambda} a_\lambda^\dagger(\vec{p}) = i(b_\lambda^\dagger(\vec{p}) - a_\lambda^\dagger(\vec{p})), \quad \frac{d}{d\lambda} b_\lambda^\dagger(\vec{p}) = i(a_\lambda^\dagger(\vec{p}) - b_\lambda^\dagger(\vec{p})). \quad (3.82)$$

Intégrer ces équations, et en déduire l'expression de l'opérateur de conjugaison de charge U_C en terme des opérateurs de création et d'annihilation.

3.3 Commutateurs à temps quelconques et produit chronologique

À partir de l'expression (3.11) de l'opérateur de champ en fonction des opérateurs de création et d'annihilation, et des relations de commutation (3.13) de ces derniers, on obtient les relations de commutation à temps quelconques des opérateurs de champ

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i\Delta(x, y), \quad (3.83)$$

où $\Delta(x, y)$ est une distribution réelle que l'on peut écrire sous la forme

$$\Delta(x, y) = -i \int d\tilde{p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}). \quad (3.84)$$

On peut caractériser cette distribution en remarquant que, comme les champs eux-mêmes, elle satisfait à l'équation de Klein-Gordon

$$(\square_x + m^2)\Delta(x - y) = 0, \quad (3.85)$$

et obéit aux conditions initiales

$$\Delta(x^0 = y^0, \vec{x}, y^0, \vec{y}) = 0, \quad \partial_0^x \Delta(x^0 = y^0, \vec{x}, y^0, \vec{y}) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.86)$$

Comme la distribution $\Delta(x, y)$ ne dépend que de la différence $x - y$, elle est invariante par translation, c'est-à-dire

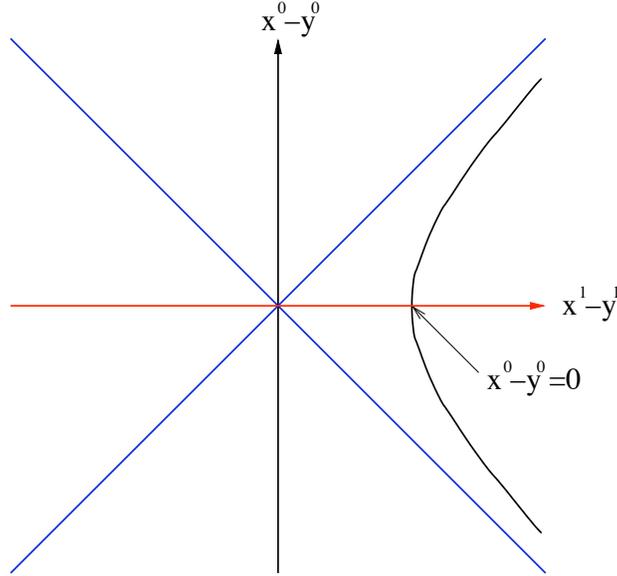
$$\Delta(x + a, y + a) = \Delta(x, y) \quad (3.87)$$

Montrons maintenant que la distribution $\Delta(x - y)$ est invariante sous les transformations de Lorentz. On peut montrer cette propriété directement à partir de l'expression (3.84). On peut aussi utiliser le fait que les transformations de Lorentz sont réalisés par des transformations unitaires

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\varphi(x)U^{-1}(\Lambda) &= \varphi(\Lambda x) \Rightarrow \\ U(\Lambda)[\varphi(x), \varphi(y)]U^{-1}(\Lambda) &= [\varphi(\Lambda x), \varphi(\Lambda y)] \Rightarrow \\ U(\Lambda)i\Delta(x, y)U^{-1}(\Lambda) &= i\Delta(x, y) = i\Delta(\Lambda x, \Lambda y). \end{aligned} \quad (3.88)$$

D'après les conditions initiales, la distribution $\Delta(x, y)$ s'annule lorsque $x^0 - y^0 = 0$, pour toute valeur de $\vec{x} - \vec{y}$. Elle s'annule donc aussi en tout point d'espace-temps $x - y$ qui se déduit de l'hyperplan $x^0 - y^0 = 0$ par une transformation de Lorentz. Un petit dessin montre alors que la distribution $\Delta(x, y)$ s'annule si l'intervalle entre les points x et y est de genre espace.

$$(x - y)^2 < 0 \Rightarrow \Delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow [\varphi(x), \varphi(y)] = 0. \quad (3.89)$$



On observe donc que les opérateurs de champ en des points séparés par un intervalle de genre espace commutent. Plus généralement, deux opérateurs produits normaux d'opérateurs de champ et de dérivées de l'opérateur de champ pris en des points séparés par un intervalle de genre espace commutent. On appelle cette propriété la micro-causalité.

Dans le cas où la masse est nulle, la distribution $\Delta(x, y)$ a une expression simple. On calcule l'intégrale sur \vec{p} dans l'équation (3.84) en utilisant des coordonnées sphériques, et l'on obtient

$$\Delta(x - y) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0 - y^0) \delta((x - y)^2), \quad \epsilon(x^0 - y^0) = \theta(x^0 - y^0) - \theta(y^0 - x^0). \quad (3.90)$$

Cette distribution est singulière sur le cône de lumière.

Fonctions de Green retardées et avancées :

On peut utiliser la distribution $\Delta(x, y)$ pour construire les fonctions de Green retardées et avancées de l'opérateur de Klein-Gordon $\square + m^2$

$$\begin{aligned} G_R(x - y) &= -\theta(x^0 - y^0) \Delta(x, y), & (\square_x + m^2) G_R(x - y) &= \delta^4(x - y), \\ G_A(x - y) &= \theta(y^0 - x^0) \Delta(x, y), & (\square_x + m^2) G_A(x - y) &= \delta^4(x - y). \end{aligned} \quad (3.91)$$

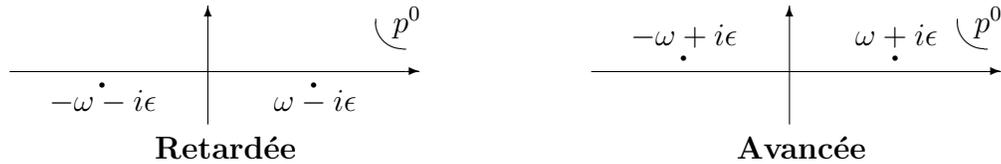
Ce sont deux distributions réelles, invariantes sous les transformations de Poincaré, dont les singularités sont sur le cône de lumière. En utilisant la représentation suivante de la fonction de Heaviside

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iEt}}{E + i\epsilon}, \quad (3.92)$$

on peut réécrire les fonctions de Green retardées et avancées comme des transformées de Fourier à quatre dimensions. Après quelques manipulations, on obtient

$$\begin{aligned} G_R(x - y) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{(p^0 + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}, \\ G_A(x - y) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{(p^0 - i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

Notons la disposition des pôles des transformées de Fourier de ces distributions



La fonction de Green retardée $G_R(x - y)$ s'annule en dehors du cône de lumière futur, c'est-à-dire qu'elle n'est non nulle que si $x^0 \geq y^0$, $(x - y)^2 \geq 0$. On l'appelle également fonction de Green causale.

Produit chronologique, fonction de Green de Feynman

On définit le produit chronologique, ou T -produit, de deux opérateurs de champ $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ par

$$T(\varphi(x)\varphi(y)) = \theta(x^0 - y^0)\varphi(x)\varphi(y) + \theta(y^0 - x^0)\varphi(y)\varphi(x). \quad (3.94)$$

Cette définition s'étend au produit d'un nombre n d'opérateurs par la formule

$$T(V_1(t_1)V_2(t_2)\cdots V_n(t_n)) = \sum_{P \in \mathcal{S}_n} \theta(t_{P_1} - t_{P_2})\theta(t_{P_2} - t_{P_3})\cdots \times \\ \times \theta(t_{P_{n-1}} - t_{P_n})V_{P_1}(t_{P_1})V_{P_2}(t_{P_2})\cdots V_{P_n}(t_{P_n}). \quad (3.95)$$

Dans le membre de droite de cette équation, la somme s'étend aux permutations de n objets. La signification de cette formule est très simple : on doit ordonner les opérateurs dans le sens des temps décroissants. Les $n!$ termes de la somme correspondent aux $n!$ ordres possibles des n temps.

Étudions l'action de l'opérateur de Klein-Gordon $\square_x + m^2$ sur le produit chronologique de deux champs. On commence par calculer la dérivée première par rapport au temps

$$\partial_0^x T(\varphi(x)\varphi(y)) = \delta(x^0 - y^0)[\varphi(x), \varphi(y)] + T((\partial_0\varphi)(x)\varphi(y)). \quad (3.96)$$

Le premier terme dans le membre de droite est nul, car le commutateur à temps égaux des champs est nul. Calculons maintenant la dérivée seconde par rapport au temps

$$(\partial_0^x)^2 T(\varphi(x)\varphi(y)) = \delta(x^0 - y^0)[\partial_0\varphi(x), \varphi(y)] + T((\partial_0^2\varphi)(x)\varphi(y)). \quad (3.97)$$

En utilisant le commutateur à temps égaux du champ et de son moment conjugué, on obtient

$$(\partial_0^x)^2 T(\varphi(x)\varphi(y)) = -i\delta^4(x - y) + T((\partial_0^2\varphi)(x)\varphi(y)). \quad (3.98)$$

On peut alors écrire l'action de l'opérateur de Klein-Gordon sous la forme

$$(\square_x + m^2)T(\varphi(x)\varphi(y)) = -i\delta^4(x - y) + T(((\square + m^2)\varphi)(x)\varphi(y)). \quad (3.99)$$

En se souvenant que le champ est solution de l'équation de Klein-Gordon, on obtient finalement

$$(\square_x + m^2)T(\varphi(x)\varphi(y)) = -i\delta^4(x - y). \quad (3.100)$$

On définit alors la fonction de Green de Feynman comme la valeur moyenne dans le vide du T -produit de deux champs

$$G_F(x, y) = \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle \quad (3.101)$$

L'action de l'opérateur de Klein-Gordon sur la fonction de Green de Feynman s'obtient alors à partir de l'équation (3.100)

$$(\square_x + m^2)G_F(x, y) = -i\delta^4(x - y). \quad (3.102)$$

À strictement parler, c'est donc $iG_F(x, y)$ qui est une fonction de Green de l'opérateur de Klein-Gordon. À la différence des fonctions de Green retardées et avancées, $G_F(x, y)$ est une fonction de Green complexe (ni réelle, ni imaginaire). En outre, comme le produit chronologique impose l'ordre des opérateurs, c'est une distribution symétrique

$$G_F(y, x) = \langle 0|T(\varphi(y)\varphi(x))|0\rangle = \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle = G_F(x, y). \quad (3.103)$$

On calcule cette fonction de Green en utilisant les opérateurs de création et d'annihilation. On obtient

$$G_F(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \int d\tilde{p} e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int d\tilde{p} e^{ip(x-y)}. \quad (3.104)$$

En utilisant la transformée de Fourier (3.92) de la fonction de Heaviside, on peut écrire cette fonction de Green comme une transformée de Fourier à quatre dimensions

$$G_F(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int \frac{dE}{2\pi} d\tilde{p} \left(\frac{e^{-i(E+\omega(\vec{p}))(x^0-y^0)-\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{E+i\epsilon} + \frac{e^{i(E+\omega(\vec{p}))(x^0-y^0)+\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{E+i\epsilon} \right), \quad (3.105)$$

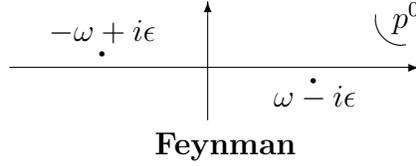
On fait alors le changement de variable d'intégration $p^0 = E + \omega(\vec{p})$

$$G_F(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 2\omega(\vec{p})} \left(\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^0 - \omega(\vec{p}) + i\epsilon} + \frac{e^{ip(x-y)}}{p^0 - \omega(\vec{p}) + i\epsilon} \right). \quad (3.106)$$

Dans le second terme du membre de droite, on fait le changement de variables d'intégration $p^\mu \rightarrow -p^\mu$ pour obtenir

$$G_F(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{e^{-ip(x-y)}}{(p^0)^2 - (\omega(\vec{p}) - i\epsilon)^2} \right). \quad (3.107)$$

On peut déjà lire sur cette expression la disposition des pôles de la transformée de Fourier de la fonction de Green de Feynman



L'habitude est de développer le carré du dénominateur sous la forme

$$(p^0)^2 - (\omega(\vec{p}) - i\epsilon)^2 = p^2 - m^2 + 2i\epsilon\omega(\vec{p}) + O(\epsilon^2). \quad (3.108)$$

Rappelons que ϵ est simplement une quantité infinitésimale positive, dont le but est d'indiquer la façon dont on doit contourner les pôles. La quantité $\omega(\vec{p})$ est elle-même strictement positive. La seule chose qui compte dans le calcul de la transformée de Fourier est que la quantité $\epsilon\omega(\vec{p})$ soit strictement positive, sa dépendance en \vec{p} ne joue aucun rôle. Cette observation permet d'obtenir la forme finale de la fonction de Green de Feynman

$$G_F(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right). \quad (3.109)$$

À partir de cette expression, on montre facilement que la fonction de Green de Feynman est invariante sous les transformations de Poincaré

$$G_F(\Lambda x + a, \Lambda y + a) = G_F(x, y). \quad (3.110)$$

Enfin, la fonction de Green de Feynman $G_F(x, y)$ ne s'annule pas lorsque l'intervalle entre les points x et y est de genre espace. On va étudier le comportement asymptotique de cette fonction pour une grande séparation spatiale des points. On note

$$G(\vec{r}) = G_F(x, y), \quad x^0 = y^0, \quad \vec{x} - \vec{y} = \vec{r}. \quad (3.111)$$

L'équation (3.104) permet d'écrire

$$G(\vec{r}) = \int d\tilde{p} e^{i\tilde{p}\vec{r}} = \frac{1}{16\pi^3} \int d^3 p \frac{e^{i\vec{p}\vec{r}}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}. \quad (3.112)$$

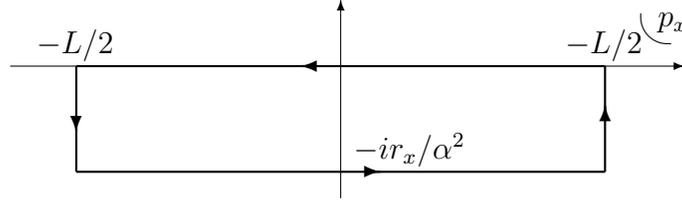
On utilise l'intégrale gaussienne

$$\frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty d\alpha e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(\vec{p}^2 + m^2)}, \quad (3.113)$$

qui permet d'écrire $G(\vec{r})$ sous la forme

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\alpha \int d^3p e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(\vec{p}-i\frac{\vec{r}}{\alpha^2})^2 - \frac{1}{2}(\frac{r^2}{\alpha^2} + m^2\alpha^2)}. \quad (3.114)$$

L'intégrale sur chaque composante de \vec{p} est reliée à une intégrale gaussienne, comme on le vérifie en utilisant le contour fermé suivant dans le plan complexe de p_x , p_y ou p_z



Dans la limite $L \rightarrow \infty$, les segments verticaux ne contribuent pas, et on obtient

$$\int d^3p e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(\vec{p}-i\frac{\vec{r}}{\alpha^2})^2} = \int d^3p e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\vec{p}^2} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.115)$$

On en déduit

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^3} e^{-\frac{1}{2}(\frac{r^2}{\alpha^2} + m^2\alpha^2)}. \quad (3.116)$$

On fait le changement de variable d'intégration $t = \alpha^2 \frac{r}{m}$ et on obtient

$$G(\vec{r}) = \frac{m}{8\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{mr}{2}(\frac{1}{t} + t)}. \quad (3.117)$$

On va évaluer cette intégrale dans la limite des grandes distances, $mr \gg 1$. On va utiliser la méthode du col. On a un facteur grand devant 1 dans l'exponentielle, et seul le voisinage d'un minimum de la fonction $\frac{1}{t} + t$ contribue à l'intégrale. Ce minimum se trouve à $t = 1$. On fait alors le changement de variable $t = 1 + u$, et on ne garde que les termes quadratiques en u dans l'exponentielle. De plus, le facteur $\frac{1}{t^2}$ devant l'exponentielle a une variation lente par rapport à celle de l'exponentielle, et on peut le remplacer par sa valeur à $t = 1$. On obtient alors

$$mr \gg 1 : \quad G(\vec{r}) = \frac{m}{8\pi^2 r} e^{-mr} \int du e^{-\frac{mr}{2}u^2} = \frac{\sqrt{m}}{2(2\pi r)^{\frac{3}{2}}} e^{-mr}. \quad (3.118)$$

On observe que la fonction de Green de Feynman décroît exponentiellement pour les grandes séparations spatiales, d'autant plus vite que la masse est grande.

3.4 Couplage à une source classique

On va maintenant considérer une interaction de particules relativistes identiques avec l'extérieur, par l'intermédiaire d'une source classique $j(x)$. L'action s'écrit

$$S[\varphi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) + j\varphi \right). \quad (3.119)$$

Les équations du mouvement classiques s'écrivent

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x). \quad (3.120)$$

Ce modèle est en fait proche de l'étude de l'interaction du rayonnement électromagnétique avec un quadrivecteur courant classique. Les équations du mouvement s'écrivent dans ce cas

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = j_\nu(x). \quad (3.121)$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique, et j_μ la densité de charge et de courant imposée par l'expérimentateur. Toutefois, notons deux différences importantes entre notre modèle et le cas électromagnétique. Tout d'abord, le rayonnement est décrit dans la théorie quantique par des particules de masse nulle, les photons. Ensuite, les photons ne sont pas des particules sans spin. Pour des particules de masse nulle, on ne parle pas de spin, mais d'hélicité qui est la projection du spin le long de l'impulsion de la particule. Les photons ont une hélicité ± 1 . Un traitement de l'interaction d'un rayonnement quantique avec une source classique peut être trouvé dans le livre de Claude Itzykson et Jean-Bernard Zuber, "Quantum Field Theory". Revenons au champ scalaire, la densité de moment conjugué du champ s'écrit

$$\pi_t(\vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi} = \partial_0 \varphi(t, \vec{x}), \quad (3.122)$$

les crochets de Poisson non nuls sont

$$\{\varphi_t(\vec{x}), \pi_t(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.123)$$

et le Hamiltonien est donné par

$$H[\varphi_t, \pi_t, t] = \int d^3x \left(\frac{1}{2} ((\pi_t(\vec{x}))^2 + (\vec{\nabla} \varphi_t(\vec{x}))^2 + m^2 (\varphi_t(\vec{x}))^2) - j(t, \vec{x}) \varphi_t(\vec{x}) \right). \quad (3.124)$$

Notons que l'introduction d'une source classique brise en général toutes les symétries géométriques du modèle considéré, puisqu'il introduit dans le Lagrangien une dépendance explicite par rapport aux coordonnées. Sauf configuration très particulière de la source, le modèle n'est ni invariant par translation, ni invariant par transformation de Lorentz. L'énergie et l'impulsion ne sont pas des charges conservées, ou en d'autres termes le champ peut échanger -donner ou recevoir- de l'énergie et de l'impulsion avec la source. En particulier, le Hamiltonien dépend du temps.

Aux variables de l'espace de phase sont associés dans la théorie quantique des opérateurs hermitiques $\varphi(x)$ et $\pi(x)$ en représentation de Heisenberg, qui satisfont les relations de commutation à temps égaux

$$[\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.125)$$

Nous utiliserons dans un premier temps l'opérateur Hamiltonien "naïf"

$$H_{\text{naïf}}(t) = \int d^3x \left(\frac{1}{2}((\pi(t, \vec{x}))^2 + (\vec{\nabla}\varphi(t, \vec{x}))^2 + m^2(\varphi(t, \vec{x}))^2) - j(t, \vec{x})\varphi(t, \vec{x}) \right). \quad (3.126)$$

On s'attend à ce que, comme dans la théorie classique, le Hamiltonien dépende du temps, ce que l'on a indiqué explicitement. Les équations de Heisenberg s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \vec{x}) &= -i[\varphi(t, \vec{x}), H_{\text{naïf}}(t)] = \pi(t, \vec{x}), \\ \frac{\partial}{\partial t}\pi(t, \vec{x}) &= -i[\pi(t, \vec{x}), H_{\text{naïf}}(t)] = (\Delta - m^2)\varphi(t, \vec{x}) + j(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (3.127)$$

On en déduit l'équation d'évolution de l'opérateur de champ

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x). \quad (3.128)$$

Cette équation a la même forme que l'équation du mouvement classique.

Champs asymptotiques : On suppose désormais que le courant classique s'annule en dehors d'un intervalle de temps borné. En d'autres termes, il existe un temps T tel que, si $t < -T$ ou $t > T$, $j(t, \vec{x}) = 0$. On a déjà vu que pour résoudre l'équation d'évolution (3.128), on peut utiliser une fonction de Green pour l'opérateur de Klein-Gordon $\square + m^2$. On va se servir des fonctions de Green avancées et retardées introduites dans le paragraphe précédent. On écrit alors la solution de (3.128) sous deux formes distinctes

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_{in}(x) + \int d^4y G_R(x-y)j(y), \\ \varphi(x) &= \varphi_{out}(x) + \int d^4y G_A(x-y)j(y). \end{aligned} \quad (3.129)$$

Dans le deuxième terme du membre de droite de ces équations, l'opérateur identité de l'espace de Hilbert est sous-entendu. Les opérateurs $\varphi_{in}(x)$ et $\varphi_{out}(x)$ sont solutions de l'équation de Klein-Gordon sans second membre. Si l'on introduit les opérateurs

$$\pi_{in}(x) = \partial_0 \varphi_{in}(x), \quad \pi_{out}(x) = \partial_0 \varphi_{out}(x), \quad (3.130)$$

on vérifie facilement à l'aide de l'équation (3.125) qu'ils satisfont aux relations de commutation à temps égaux

$$\begin{aligned} [\varphi_{in}(t, \vec{x}), \pi_{in}(t, \vec{y})] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\varphi_{out}(t, \vec{x}), \pi_{out}(t, \vec{y})] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Les relations de commutation et les équations d'évolution des champs "in" (entrants) et "out" (sortants) sont ceux de champs libres. D'autres parts, en utilisant les propriétés suivantes des fonctions de Green retardées et avancées

$$x^0 < y^0 \Rightarrow G_R(x - y) = 0, \quad x^0 > y^0 \Rightarrow G_A(x - y) = 0, \quad (3.132)$$

on obtient

$$x^0 < -T \Rightarrow \varphi(x) = \varphi_{in}(x), \quad x^0 > T \Rightarrow \varphi(x) = \varphi_{out}(x). \quad (3.133)$$

Aux temps grands négatifs, le champ s'identifie au champ libre entrant, et aux temps grands positifs il s'identifie au champ libre sortant. Si la source classique n'a pas un support borné en temps, mais décroît plus vite que toute puissance de $1/|t|$ aux grands temps, on obtiendra

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \varphi(x) - \varphi_{in}(x) = 0, \quad \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \varphi(x) - \varphi_{out}(x) = 0. \quad (3.134)$$

Le champ libre entrant est donc la limite du champ lorsque le temps tend vers $-\infty$, et le champ libre sortant est la limite du champ lorsque le temps tend vers $+\infty$. On peut développer les champs libres entrants et sortants en termes d'opérateurs de création et d'annihilation

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(x) &= \int d\vec{p} (a_{in}(\vec{p})e^{-ipx} + a_{in}^\dagger(\vec{p})e^{ipx}), \\ \varphi_{out}(x) &= \int d\vec{p} (a_{out}(\vec{p})e^{-ipx} + a_{out}^\dagger(\vec{p})e^{ipx}), \end{aligned} \quad (3.135)$$

On construit alors les états nombre d'occupation entrants et sortants. Les vecteurs vide sont définis par

$$\begin{aligned} a_{in}(\vec{p})|0 in \rangle &= \vec{0}, \quad \langle 0 in|0 in \rangle = 1, \\ a_{out}(\vec{p})|0 out \rangle &= \vec{0}, \quad \langle 0 out|0 out \rangle = 1. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Un état à n particules entrant ou sortant est alors donné par

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \text{ in} \rangle &= a_{in}^\dagger(\vec{p}_1) a_{in}^\dagger(\vec{p}_2) \cdots a_{in}^\dagger(\vec{p}_n) |0 \text{ in} \rangle, \\ |\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n \text{ out} \rangle &= a_{out}^\dagger(\vec{q}_1) a_{out}^\dagger(\vec{q}_2) \cdots a_{out}^\dagger(\vec{q}_n) |0 \text{ out} \rangle. \end{aligned} \quad (3.137)$$

L'ensemble des états entrants -respectivement, l'ensemble des états sortants- avec n fini forme une base de l'espace de Hilbert. L'action de l'opérateur de champ $\varphi(x)$ sur ces états est bien définie. On va interpréter les états entrants comme ceux que prépare l'observateur aux temps grands négatifs. Par exemple, si l'observateur prépare un état initial comprenant deux particules d'impulsions \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , l'état correspondant est $|\vec{k}_1, \vec{k}_2 \text{ in} \rangle$. Les états sortants sont ceux qui sont observés aux temps grands positifs. Par exemple, si l'observateur détecte trois particules d'impulsion \vec{l}_1 , \vec{l}_2 et \vec{l}_3 , l'état correspondant s'écrit $|\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3 \text{ out} \rangle$. Rappelons qu'en représentation de Heisenberg, les états n'évoluent pas. La notation $|\vec{k}_1, \vec{k}_2 \text{ in} \rangle$ nous dit comment l'état est perçu par l'observateur aux temps grands négatifs. La question naturelle est alors de savoir comment ce même état est perçu aux temps grands positifs, en d'autres termes comment cet état se développe dans la base des états sortants. On veut donc calculer le produit scalaire

$$\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3 \text{ out} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \text{ in} \rangle, \quad (3.138)$$

qui est l'amplitude de transition d'un état entrant à deux particules d'impulsions fixées vers un état sortant à trois particules d'impulsion fixée. Pour calculer ces amplitudes, on remarque que les champs entrant $\varphi_{in}(x)$, $\pi_{in}(x)$ et sortant $\varphi_{out}(x)$, $\pi_{out}(x)$ satisfont les mêmes relations de commutation et les mêmes équations d'évolution. Il est donc possible, mais en théorie des champs pas certain, qu'il existe une transformation unitaire S , indépendante du temps et de l'espace, qui permet de passer de l'un à l'autre

$$\varphi_{out}(x) = S^{-1} \varphi_{in}(x) S, \quad \pi_{out}(x) = S^{-1} \pi_{in}(x) S. \quad (3.139)$$

L'opérateur S est usuellement dénommé "matrice S ". Dans le cas étudié ici de l'interaction avec un courant classique, on va pouvoir construire explicitement la transformation S . Auparavant, on peut écrire à partir de l'équation (3.139) la relation entre opérateurs de création et d'annihilation entrants et sortants

$$a_{out}^\dagger(\vec{p}) = S^{-1} a_{in}^\dagger(\vec{p}) S, \quad a_{out}(\vec{p}) = S^{-1} a_{in}(\vec{p}) S. \quad (3.140)$$

Si l'on définit le vide sortant par

$$|0 \text{ out} \rangle = S^{-1} |0 \text{ in} \rangle, \quad (3.141)$$

les équations (3.136) qui définissent le vide sortant sont satisfaites pourvu qu'elles le soient pour le vide entrant. En utilisant l'équation (3.137), on obtient la relation entre états sortants et états entrants

$$|\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n \text{ out} \rangle = S^{-1} |\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n \text{ in} \rangle. \quad (3.142)$$

On en déduit que la matrice S peut être interprétée comme la matrice de changement de base entre états entrants et états sortants. En utilisant (3.142), on peut écrire l'amplitude de transition (3.138) sous la forme

$$\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3 \text{ out} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \text{ in} \rangle = \langle \vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3 \text{ in} | S | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \text{ in} \rangle. \quad (3.143)$$

Les amplitudes de transition sont donc les éléments de la matrice S dans la base des états entrants. Enfin, notons que la définition (3.139) de la matrice S , tout comme la relation (3.141) entre les vides entrant et sortant ne fixent pas complètement S . La matrice $\hat{S} = e^{i\alpha} S$, où α est une phase quelconque, satisfait également (3.139) et conduit à un changement de phase sans conséquence physique des états sortants.

Pour trouver une expression de S , on déduit de leur définition (3.129) une relation entre les champs entrant et sortant

$$\begin{aligned} \varphi_{out}(x) &= \varphi_{in}(x) + \int d^4y (G_R(x-y) - G_A(x-y)) j(y) \\ &= \varphi_{in}(x) - \int d^4y \Delta(x-y) j(y). \end{aligned} \quad (3.144)$$

On va utiliser la relation de commutation d'un champ libre à temps quelconques

$$[\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)] = i\Delta(x-y). \quad (3.145)$$

Notons que le second membre de cette équation est proportionnel à l'opérateur identité de l'espace de Hilbert. On en déduit l'équation

$$[[\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)], \varphi_{in}(z)] = 0. \quad (3.146)$$

On peut alors écrire la relation (3.144) entre le champ entrant et le champ sortant sous la forme

$$\varphi_{out}(x) = \varphi_{in}(x) + [\varphi_{in}(x), i \int d^4y \varphi_{in}(y) j(y)]. \quad (3.147)$$

On va maintenant utiliser le développement

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots, \quad (3.148)$$

dans le cas où $A = -i \int d^4y \varphi_{in}(y) j(y)$ et $B = \varphi_{in}(x)$. On remarque que la formule 3.146 implique que les termes d'ordre supérieur ou égal à deux de ce développement s'annulent. On en déduit

$$\varphi_{out}(x) = e^{-i \int d^4y \varphi_{in}(y) j(y)} \varphi_{in}(x) e^{i \int d^4y \varphi_{in}(y) j(y)}. \quad (3.149)$$

Ce qui conduit à l'expression suivante de la matrice S

$$S = e^{i \int d^4y \varphi_{in}(y) j(y)}. \quad (3.150)$$

C'est un opérateur unitaire puisque le champ entrant est un opérateur hermitique. Si l'on introduit la transformée de Fourier de la source classique

$$j(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} j(k), \quad j(-k) = \bar{j}(k) \quad (3.151)$$

on obtient l'expression de la matrice S en fonction des opérateurs de création et d'annihilation entrants

$$S = e^{i \int d\vec{k} (a_{in}(\vec{k}) \bar{j}(k) + a_{in}^\dagger(\vec{k}) j(k))}. \quad (3.152)$$

Comme d'habitude, on doit prendre dans l'intégrand $k_0 = \omega(\vec{k})$. On en déduit que les seuls modes de Fourier de la source classique qui interagissent avec le champ sont ceux qui satisfont $k^2 = m^2$. Pour calculer les éléments de matrice de S entre états entrants, il est utile de trouver une forme normalement ordonné de cet opérateur. Pour cela, on utilise une forme simplifiée de la formule de Campbell-Hausdorf. Si A et B sont deux opérateurs tels que

$$[A, [A, B]] = 0, \quad [B, [A, B]] = 0, \quad (3.153)$$

alors on a la relation

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \quad (3.154)$$

On va utiliser cette relation avec

$$A = i \int d\vec{k} a_{in}^\dagger(\vec{k}) j(k), \quad B = i \int d\vec{k} a_{in}(\vec{k}) \bar{j}(k), \quad [A, B] = \int d\vec{k} |j(k)|^2. \quad (3.155)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} S &= e^{i \int d\vec{k} a_{in}^\dagger(\vec{k}) j(k)} e^{i \int d\vec{k} a_{in}(\vec{k}) \bar{j}(k)} e^{-\frac{1}{2} \int d\vec{k} |j(k)|^2} \\ &=: e^{i \int d^4x j(x) \varphi_{in}(x)} : e^{-\frac{1}{2} \int d\vec{k} |j(k)|^2}. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Cette équation donne la relation entre l'exponentielle d'un opérateur linéaire dans le champ libre entrant, et la même exponentielle normalement ordonnée. On montre facilement qu'elle s'écrit encore

$$e^{i \int d^4x j(x) \varphi_{in}(x)} =: e^{i \int d^4x j(x) \varphi_{in}(x)} : e^{-\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 j(x_1) j(x_2) \langle 0 in | \varphi_{in}(x_2) \varphi_{in}(x_1) | 0 in \rangle} \quad (3.157)$$

À titre d'exemple, calculons les amplitudes de transition lorsque l'état entrant est le vide $|0 in \rangle$. On obtient

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n out | 0 in \rangle &= \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n in | S | 0 in \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2} \int d\vec{p} |j(\vec{p})|^2} \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n in | e^{i \int d\vec{p} a_{in}^\dagger(\vec{p}) j(\vec{p})} | 0 in \rangle \end{aligned} \quad (3.158)$$

Seul le terme d'ordre n dans le développement de l'exponentielle donne un résultat non nul

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n out | 0 in \rangle &= \frac{i^n}{n!} e^{-\frac{1}{2} \int d\vec{k} |j(\vec{k})|^2} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \dots d\vec{p}_n \times \\ &\times j(\vec{p}_1) j(\vec{p}_2) \dots j(\vec{p}_n) \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n in | a_{in}^\dagger(\vec{p}_1) a_{in}^\dagger(\vec{p}_2) \dots a_{in}^\dagger(\vec{p}_n) | 0 in \rangle \\ &= i^n e^{-\frac{1}{2} \int d\vec{k} |j(\vec{k})|^2} j(\vec{k}_1) j(\vec{k}_2) \dots j(\vec{k}_n). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Lorsque l'état sortant est le vide, on obtient simplement

$$\langle 0 out | 0 in \rangle = e^{-\frac{1}{2} \int d\vec{k} |j(\vec{k})|^2}. \quad (3.160)$$

On en déduit la probabilité p_0 pour que la source classique ne crée pas de particule

$$p_0 = |\langle 0 out | 0 in \rangle|^2 = e^{-\int d\vec{k} |j(\vec{k})|^2} \quad (3.161)$$

Pour calculer la probabilité p_n que la source classique crée n particules, on observe que le projecteur P_n sur les états sortants à n particules s'écrit

$$P_n = \frac{1}{n!} \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \dots d\vec{k}_n |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n out \rangle \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n out|. \quad (3.162)$$

On en déduit

$$p_n = \langle 0 in | P_n | 0 in \rangle = \frac{1}{n!} \left(\int d\vec{k} |j(\vec{k})|^2 \right)^n e^{-\int d\vec{k} |j(\vec{k})|^2}. \quad (3.163)$$

On calcule facilement le nombre moyen \bar{n} de particules sortantes

$$\bar{n} = \sum_n n p_n = \int d\vec{k} |j(\vec{k})|^2. \quad (3.164)$$

Les probabilités s'écrivent donc encore

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}. \quad (3.165)$$

Cette distribution des probabilités est appelée une distribution de Poisson. Elle est caractéristique d'un processus dans lequel les émissions successives de particules sont indépendantes les unes des autres. Calculons l'énergie moyenne cédée par la source classique. On remarque que les limites aux grands temps du Hamiltonien sont données par

$$H_0[\varphi_{in}, \pi_{in}] \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} H_{\text{naïf}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} H_0[\varphi_{out}, \pi_{out}], \quad (3.166)$$

où H_0 est le Hamiltonien libre

$$H_0[\varphi_{in}, \pi_{in}] = \int d^3x \left(\frac{1}{2} ((\pi_{in})^2 + (\vec{\nabla} \varphi_{in})^2 + m^2 (\varphi_{in})^2) \right) \quad (3.167)$$

La variation d'énergie du système dans l'état $|0 in \rangle$ entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$ s'écrit donc

$$\Delta E = \langle 0 in | H_0[\varphi_{out}, \pi_{out}] - H_0[\varphi_{in}, \pi_{in}] | 0 in \rangle. \quad (3.168)$$

La manière la plus directe de calculer ΔE est de remarquer que la relation (3.144) entre champ entrant et champ sortant se traduit sur les opérateurs de création et d'annihilation par

$$a_{out}(\vec{k}) = a_{in}(\vec{k}) + i j(k), \quad a_{out}^\dagger(\vec{k}) = a_{in}^\dagger(\vec{k}) - i \bar{j}(k). \quad (3.169)$$

on en déduit

$$\Delta E = \int d\vec{k} \omega(\vec{k}) |j(k)|^2. \quad (3.170)$$

3.5 Matrice S et opérateur d'évolution

La méthode que l'on vient d'utiliser pour calculer la matrice S d'un champ scalaire en interaction avec une source classique ne s'étend pas à la plupart des systèmes en interaction intéressants d'un point de vue physique. Dans ce paragraphe, on va donc étudier une autre méthode, que l'on pourra étendre, quoi que non sans peine. On remarque que le champ en interaction $\varphi(x)$ et son moment conjugué $\pi(x)$ satisfont les mêmes relations de commutation

à temps égaux que le champ libre entrant $\varphi_{in}(x)$ et son moment conjugué $\pi_{in}(x)$. Toutefois, ils ne satisfont pas les mêmes équations d'évolution. On va donc s'efforcer de construire une transformation unitaire $U(t)$, qui dépend du temps mais pas de l'espace, et qui relie le champ libre au champ en interaction

$$\varphi_{in}(t, \vec{x}) = U(t)\varphi(t, \vec{x})U^{-1}(t), \quad \pi_{in}(t, \vec{x}) = U(t)\pi(t, \vec{x})U^{-1}(t). \quad (3.171)$$

Remarquons que ces équations ne définissent pas complètement l'opérateur $U(t)$, mais seulement à une phase près $U(t) \rightarrow e^{i\alpha(t)}U(t)$. L'opérateur $U(t)$ peut être vu comme un opérateur de changement de représentation. Il fait passer les opérateurs, et les états, de la représentation de Heisenberg à la représentation dite d'interaction. À titre d'exemple, étudions la forme du hamiltonien en représentation d'interaction

$$\begin{aligned} U(t)H_{\text{naïf}}(t)U^{-1}(t) &= \int d^3x \left(\frac{1}{2}((U(t)\pi(t, \vec{x})U^{-1}(t))^2 \right. \\ &+ (\vec{\nabla}U(t)\varphi(t, \vec{x})U^{-1}(t))^2 + m^2(U(t)\varphi(t, \vec{x})U^{-1}(t))^2 \\ &\quad \left. + j(t, \vec{x})U(t)\varphi(t, \vec{x})U^{-1}(t) \right) \\ &= H_0[\varphi_{in}, \pi_{in}] + H_I(t), \quad H_I(t) = - \int d^3x (j(t, \vec{x})\varphi_{in}(t, \vec{x})). \end{aligned} \quad (3.172)$$

L'opérateur $H_I(t)$ est appelé Hamiltonien d'interaction. On va maintenant établir l'équation d'évolution de l'opérateur unitaire $U(t)$. Le champ en interaction satisfait l'équation de Heisenberg

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \vec{x}) = -i \left[\varphi(t, \vec{x}), H_{\text{naïf}}(t) \right], \quad (3.173)$$

alors que le champ libre entrant satisfait à l'équation de Heisenberg

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{in}(t, \vec{x}) = -i \left[\varphi_{in}(t, \vec{x}), H_0[\varphi_{in}, \pi_{in}] \right], \quad (3.174)$$

où H_0 est le Hamiltonien libre. En utilisant la relation entre champ libre entrant et champ en interaction, on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi_{in}(t, \vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial t}(U(t)\varphi(t, \vec{x})U^{-1}(t)) = \frac{dU}{dt}(t)U^{-1}(t)\varphi_{in}(t, \vec{x}) \\ &\quad - \varphi_{in}(t, \vec{x})\frac{dU}{dt}(t)U^{-1}(t) - iU(t) \left[\varphi(t, \vec{x}), H_{\text{naïf}}(t) \right] U^{-1}(t) \\ &= -i \left[\varphi_{in}(t, \vec{x}), U(t)H_{\text{naïf}}(t)U^{-1}(t) - i\frac{dU}{dt}(t)U^{-1}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.175)$$

En comparant (3.174) et (3.175), on obtient l'équation

$$\left[\varphi_{in}(t, \vec{x}), H_I(t) - i \frac{dU}{dt}(t) U^{-1}(t) \right] = 0, \quad (3.176)$$

Le même raisonnement appliqué à l'équation d'évolution du moment conjugué du champ entrant conduit à l'équation

$$\left[\pi_{in}(t, \vec{x}), H_I(t) - i \frac{dU}{dt}(t) U^{-1}(t) \right] = 0, \quad (3.177)$$

On admettra que si, à un instant donné, un opérateur commute en tout point de l'espace avec les opérateurs de champ $\varphi_{in}(t, \vec{x})$ et $\pi_{in}(t, \vec{x})$, alors cet opérateur est proportionnel à l'identité. De plus, par un choix approprié de la phase arbitraire de $U(t)$, on peut faire en sorte que la constante de proportionnalité soit nulle. On arrive alors à l'équation

$$\frac{dU}{dt}(t) = -i H_I(t) U(t). \quad (3.178)$$

Le Hamiltonien d'interaction $H_I(t)$ dépend du temps, et les opérateurs $H_I(t)$ et $H_I(t')$ avec $t \neq t'$ ne commutent pas entre eux. On peut remplacer l'équation différentielle précédente par une équation intégrale

$$U(t) = \mathbf{1} - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1). \quad (3.179)$$

En itérant cette équation une fois cette équation, on obtient

$$U(t) = \mathbf{1} - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) U(t_2). \quad (3.180)$$

Finalement, en itérant indéfiniment cette équation, on obtient le développement de l'opérateur d'évolution en puissances du Hamiltonien d'interaction

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n). \quad (3.181)$$

Dans cette intégrale multiple, les temps t_1, \dots, t_n sont ordonnés en une suite décroissante. On va utiliser la notation du T -produit, introduite dans le chapitre précédent

$$\begin{aligned} T(H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)) &= \sum_{P \in \mathcal{S}_n} \theta(t_{P_1} - t_{P_2}) \theta(t_{P_2} - t_{P_3}) \cdots \times \\ &\times \theta(t_{P_{n-1}} - t_{P_n}) H_I(t_{P_1}) H_I(t_{P_2}) \cdots H_I(t_{P_n}), \end{aligned} \quad (3.182)$$

qui met automatiquement les opérateurs $H_I(t_i)$ dans l'ordre des temps décroissants. Tenant compte du fait que dans \mathbf{R}^n , il y a $n!$ domaines complètement ordonnés, on peut écrire (3.181) sous la forme

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)). \quad (3.183)$$

On utilisera pour cette expression la notation, appelée T -exponentielle

$$U(t) = T \exp(-i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t')). \quad (3.184)$$

Dans le cas de l'interaction avec une source classique, le Hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H_I(t) = - \int d^3x j(t, \vec{x}) \varphi_{in}(t, \vec{x}). \quad (3.185)$$

On en déduit, lorsque $t \rightarrow +\infty$, l'expression suivante de la matrice S

$$\check{S} = T \exp(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t)) = T \exp(i \int d^4x j(x) \varphi_{in}(x)). \quad (3.186)$$

Il nous faut maintenant relier cette expression de la matrice S à celle précédemment trouvée (3.150). On utilisera la notation

$$U(t, t') = T \exp(-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'')), \quad t \geq t'. \quad (3.187)$$

La T -exponentielle possède la propriété

$$U(t, t') = U(t, t'')U(t'', t'), \quad t \geq t'' \geq t', \quad (3.188)$$

qu'on démontre en remarquant que le membre de gauche et le membre de droite satisfont la même équation d'évolution et coïncident lorsque $t = t''$. Notons que l'exponentielle ordinaire d'opérateurs ne satisfait pas une telle équation.

On découpe l'intervalle $[t' t]$ en éléments infinitésimaux

$$t = t_0 \overset{\Delta t}{\leftrightarrow} t_1 \overset{\Delta t}{\leftrightarrow} t_2 \cdots t_N \overset{\Delta t}{\leftrightarrow} t_{N+1} = t', \quad \Delta t = \frac{t - t'}{N + 1}, \quad (3.189)$$

et l'on a donc, en utilisant (3.187)

$$U(t, t') = U(t, t_1)U(t_1, t_2) \cdots U(t_N, t'). \quad (3.190)$$

Étudions un des termes de ce produit

$$U(t_i, t_{i+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_{i+1}}^{t_i} du_1 \int_{t_{i+1}}^{t_i} du_2 \cdots \int_{t_{i+1}}^{t_i} du_n \times \\ \times T(H_I(u_1)H_I(u_2) \cdots H_I(u_n)). \quad (3.191)$$

Le terme d'ordre n de ce développement est d'ordre $(\Delta t)^n$. En se limitant au terme du premier ordre, on obtient

$$U(t_i, t_{i+1}) = \mathbf{1} - i \int_{t_{i+1}}^{t_i} du H_I(u) + O(\Delta t^2) \\ = \exp(-i \int_{t_{i+1}}^{t_i} du H_I(u) + (\Delta t)^2 R(t_i)), \quad (3.192)$$

où le reste $R(t_i)$ est un opérateur de l'espace de Hilbert. Cette équation nous dit que pour un intervalle de temps Δt infinitésimalement petit, la T -exponentielle diffère de l'exponentielle ordinaire par des termes d'ordre $(\Delta t)^2$. On utilise alors une généralisation de l'équation (3.154). Soit $\{A_0, A_1, \dots, A_N\}$ un ensemble de $N + 1$ opérateurs tels que tous les commutateurs emboîtés s'annulent

$$\forall i, j, k, \quad [A_i, [A_j, A_k]] = 0. \quad (3.193)$$

On a alors la relation

$$e^{A_0} e^{A_1} \cdots e^{A_N} = e^{\sum_0^N A_i} e^{\frac{1}{2} \sum_{i < j} [A_i, A_j]}. \quad (3.194)$$

Dans le cas que nous étudions, on a

$$A_i = -i \int_{t_{i+1}}^{t_i} du H_I(u) + (\Delta t)^2 R(t_i), \quad (3.195)$$

et, dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient pour la somme simple

$$\sum_0^N A_i = -i \int_{t'}^t du H_I(u), \quad (3.196)$$

et pour la somme double

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} [A_i, A_j] &= - \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) [H_I(t_1), H_I(t_2)] \\ &= i \int_{t'}^t dt_1 d^3 x_1 \int_{t'}^t dt_2 d^3 x_2 j(t_1, \vec{x}_1) j(t_2, \vec{x}_2) G_R(t_1, \vec{x}_1, t_2, \vec{x}_2). \end{aligned} \quad (3.197)$$

Finalement, on peut mettre l'expression (3.186) de la matrice S sous la forme

$$\check{S} = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} U(t, t') = S \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 j(x_1) j(x_2) G_R(x_1, x_2)\right). \quad (3.198)$$

On a remarqué dans le chapitre précédent que la fonction de Green retardée est réelle. L'équation (3.198) montre que les deux expressions obtenues pour la matrice S diffèrent par un facteur de phase.

3.6 Théorème de Wick

On va utiliser les équations (3.157) et (3.198) pour relier le produit chronologique d'opérateurs de champ au produit normal des mêmes opérateurs. En combinant ces deux équations, et en utilisant l'expression suivante de la fonction de Green retardée

$$G_R(x_1, x_2) = i\theta(x_1^0, x_2^0) \langle 0 | in | [\varphi_{in}(x_1), \varphi_{in}(x_2)] | 0 \rangle in \rangle, \quad (3.199)$$

On arrive à la relation

$$\begin{aligned} \check{S} &= T \exp\left(i \int d^4 x j(x) \varphi_{in}(x)\right) \\ &= : \exp\left(i \int d^4 x j(x) \varphi_{in}(x)\right) : e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 j(x_1) j(x_2) \langle 0 | in | T(\varphi_{in}(x_1) \varphi_{in}(x_2)) | 0 \rangle in \rangle} \\ &= : \exp\left(i \int d^4 x j(x) \varphi_{in}(x)\right) : e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 j(x_1) j(x_2) G_F(x_1, x_2)}. \end{aligned} \quad (3.200)$$

Le membre de gauche de cette équation peut être vu comme une fonctionnelle de la source $j(x)$, qui engendre par dérivation les T -produits d'un nombre quelconque de champs libres. En utilisant la définition (3.183) de la T -exponentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{i\delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta j(x_n)}\right) T \exp\left(i \int d^4 x j(x) \varphi_{in}(x)\right) \Big|_{j=0} &= \left(\frac{\delta}{i\delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta j(x_n)}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots \int dx_n j(x_1) \cdots j(x_n) T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n))\right) \Big|_{j=0} \\ &= T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n)). \end{aligned} \quad (3.201)$$

En appliquant le même opérateur différentiel au membre de gauche de l'équation (3.200), on obtiendra une expression pour le T -produit des champs en fonction du produit normal des champs et du propagateur de Feynman. À titre d'exemple, exprimons les produits à deux et quatre champs

$$T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)) =: \varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2) : + G_F(x_1, x_2), \quad (3.202)$$

$$\begin{aligned} T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4)) =: & \varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4) : + \\ & (: \varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2) : G_F(x_3, x_4) + \cdots (6 \text{ termes})) \\ & + (G_F(x_1, x_2)G_F(x_3, x_4) + \cdots (3 \text{ termes})). \end{aligned} \quad (3.203)$$

Dans la suite, on s'intéressera en particulier aux fonctions de Green, définies comme la valeur moyenne dans le vide du T -produit des champs

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n)) | 0 \rangle. \quad (3.204)$$

La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green s'écrit

$$\begin{aligned} Z[j] &= \langle 0 | T \exp(i \int d^4x j(x)\varphi_{in}(x)) | 0 \rangle, \\ G^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \left(\frac{\delta}{i\delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta j(x_n)} \right) Z[j] \Big|_{j=0}. \end{aligned} \quad (3.205)$$

En prenant la valeur moyenne dans le vide des deux membres de l'équation (3.200), on obtient l'expression suivante pour la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green d'un champ libre

$$Z[j] = e^{-\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 j(x_1)j(x_2)G_F(x_1, x_2)}, \quad (3.206)$$

ce qui donne, pour les fonctions de Green à deux et quatre points

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) &= G_F(x_1, x_2), \quad G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_F(x_1, x_2)G_F(x_3, x_4) + \\ &+ G_F(x_1, x_3)G_F(x_2, x_4) + G_F(x_1, x_4)G_F(x_2, x_3). \end{aligned} \quad (3.207)$$

De manière générale, l'équation (3.206) montre que les fonctions de Green avec un nombre impair de points sont nulles, et que la fonction de Green à $2p$ points est déterminée par la fonction de Green à 2 points. Plus précisément, la fonction de Green à $2p$ points est une somme sur toutes les manières de grouper les $2p$ points en p paires. Il y en a $(2p-1)!! = 1.3 \cdots (2p-3).(2p-1)$. Lorsque qu'un ensemble de paires a été choisi, et que deux points x_i et x_j sont appariés, on leur associe un facteur $G_F(x_i, x_j)$ et on fait le produit des facteurs associés à chaque paire. On représente parfois cette procédure d'appariement directement sur la valeur moyenne dans le vide du T -produit des champs

$$\langle 0|T(\underbrace{\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)}\underbrace{\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4)})|0\rangle \rightarrow G_F(x_1, x_2)G_F(x_3, x_4),$$

$$\langle 0|T(\varphi_{in}(x_1)\underbrace{\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_3)}\varphi_{in}(x_4))|0\rangle \rightarrow G_F(x_1, x_3)G_F(x_2, x_4).$$

$$\langle 0|T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)\underbrace{\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4)})|0\rangle \rightarrow G_F(x_1, x_3)G_F(x_2, x_4).$$

Une formule bizarre

Calculons la dérivée par rapport à la source de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} Z_0[j] = - \int d^4y G_F(x, y) j(y) Z_0[j]. \quad (3.208)$$

On applique maintenant l'opérateur de Klein-Gordon aux deux membres de cette équation. En utilisant l'équation (3.102), on obtient

$$(\square^x + m^2) \frac{\delta}{\delta j(x)} Z_0[j] = i j(x) Z_0[j]. \quad (3.209)$$

Considérons une fonctionnelle quelconque de la source, $F[j]$. En utilisant l'équation précédente, on peut écrire cette fonctionnelle sous la forme

$$F[j] = \frac{1}{Z_0[j]} F[(\square + m^2) \frac{\delta}{i \delta j}] Z_0[j]. \quad (3.210)$$

Appliquons cette formule à l'opérateur \check{S} donné par l'équation (3.200)

$$\begin{aligned} \check{S} &= T \exp(i \int d^4x \varphi_{in}(x) j(x)) =: \exp(i \int d^4x \varphi_{in}(x) j(x)) : Z_0[j] = \\ &=: \exp(i \int d^4x \varphi_{in}(x) (\square^x + m^2) \frac{\delta}{i \delta j(x)}) : Z_0[j], \end{aligned} \quad (3.211)$$

Cette expression sera utilisée dans le chapitre suivant.