4 Champ en interaction et Matrice S

4.1 Introduction

On considère à nouveau un champ scalaire réel $\varphi(x)$. On choisit l'action classique

$$S[\varphi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) - \frac{g}{4!}\varphi^4 \right), \quad g \geq 0 \tag{4.1}$$

La constante g est appelée constante de couplage du modèle considéré. On sait que lorsque $g = 0$, la théorie quantique qui correspond à ce modèle décrit un nombre indéterminé de particules relativistes identiques. Ces particules ont un spin nul et une masse m. On verra que le terme quartique que l'on vient d'ajouter introduit une interaction entre ces particules. Dans une limite non relativiste naïve, ce terme correspond à un potentiel d'interaction à deux corps qui est une distribution de Dirac, donc de portée nulle.

Le terme proportionnel à la constante de couplage que l'on a ajouté à l'action peut être vu comme la plus simple des fonctionnelles locales, invariantes sous les transformations de Poincaré, d'ordre supérieur à deux dans le champ, et qui respectent la symétrie $\varphi \to -\varphi$ de l'action libre.

On a déjà étudié le formalisme hamiltonien pour le modèle considéré. Dans la théorie quantique, on considère deux opérateurs hermitiques $\varphi(t, \vec{x})$ et $\pi(t, \vec{x})$ qui satisfont les relations de commutation à temps égaux

$$[\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{4.2}$$

Nous utiliserons l'opérateur Hamiltonien "naïf"

$$\begin{aligned} H_{\text{naïf}} = \int d^3x \Big(& \tfrac{1}{2}((\pi(t, \vec{x}))^2 + (\vec{\nabla}\varphi(t, \vec{x}))^2 + m^2(\varphi(t, \vec{x}))^2) \\ & + \tfrac{g}{4!}(\varphi(t, \vec{x}))^4 \Big) . \end{aligned} \tag{4.3}$$

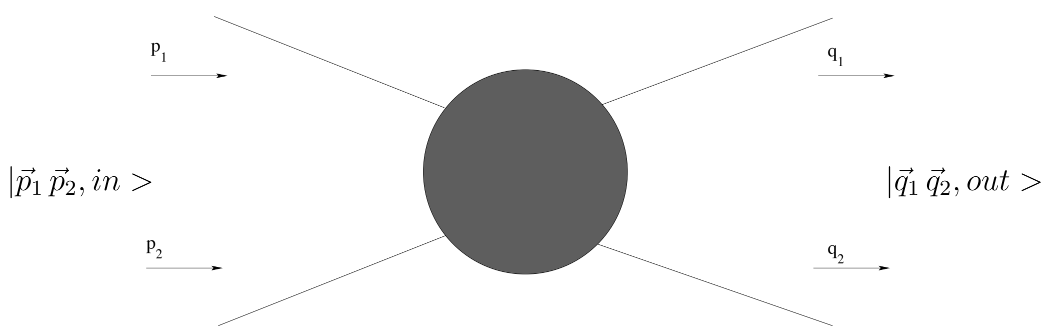
Les opérateurs de champ obéissent aux équations de Heisenberg

$$\begin{aligned} & \partial_0 \varphi(t, \vec{x}) = -i[H_{\text{naïf}}, \varphi(t, \vec{x})], \quad \partial_0 \pi(t, \vec{x}) = -i[H_{\text{naïf}}, \pi(t, \vec{x})] \\ & \Rightarrow \ \pi(t, \vec{x}) = \partial_0 \varphi(t, \vec{x}), \ (\Box + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = -\tfrac{g}{3!}(\varphi(t, \vec{x}))^3. \end{aligned} \tag{4.4}$$

On va maintenant décrire la théorie de diffusion pour le modèle considéré. On va privilégier la simplicité de l'exposé, ce qui nous conduira à faire des hypothèses sans beaucoup de justifications, dont certaines mêmes sont tout simplement incorrectes. Une présentation plus correcte peut être trouvée dans de nombreux livres de théorie des champs, mais il n'existe pas de présentation rigoureuse qui déduise la théorie de diffusion de ce modèle des quelques équations que nous venons d'écrire.

4.2 États asymptotiques

Pour la description du modèle considéré, on va s'inspirer du déroulement d'une expérience en physique des particules. Dans ce domaine, l'étude des propriétés de la matière se fait essentiellement à travers les processus de diffusion. On admettra que le temps caractéristique de l'interaction est très faible par rapport aux temps qui caractérisent la préparation ou l'observation du système. On peut donc considérer que l'état initial est préparé à $t = -\infty$, et que l'état final est étudié à $t = \infty$. On se donne la représentation suivante d'un processus de diffusion : à $t = -\infty$, on prépare un ensemble de particules incidentes spatialement séparées, et qui peuvent donc être considérées comme n'interagissant pas les uns avec les autres. L'état initial (entrant ou in) est donc un état de particules libres. Ces particules se rapprochent et interagissent, et on n'essaiera pas de décrire le détail de ce processus. Enfin, aux grands temps ($t = \infty$), on observe à nouveau un ensemble de particules spatialement séparées qui n'interagissent plus. L'état final est donc lui aussi un état de particules libres.



On admettra qu'il existe dans l'espace de Hilbert des états qui, pour un observateur à $t = -\infty$, sont identifiés comme des états de particules libres entrantes de masse m

$$|\vec{p}_1\,\vec{p}_2 \cdots \vec{p}_r \; in >, \quad p_i^0 = \omega(\vec{p}_i) = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m^2}, \tag{4.5}$$

et des états sortants qui sont vus comme des états de particules libres sortants par un observateur à $t = \infty$

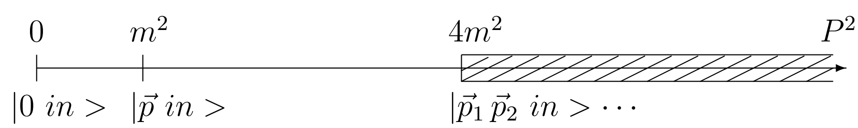
$$|\vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\ out>,\quad q_i^0 = \omega(\vec{q}_i) = \sqrt{\vec{q}_i^{\,2} + m^2}, \tag{4.6}$$

De tels états sont appelés états asymptotiques. Les transformations de Poincaré agissent sur ces états comme sur des états libres

$$\begin{aligned}
&U(\mathbf{1},a)|\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>= e^{i(p_1+p_2+\cdots+p_r)a}|\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>\\
&U(\Lambda,0)|\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>= |\,\overrightarrow{\Lambda p_1}\,\overrightarrow{\Lambda p_2}\cdots\overrightarrow{\Lambda p_r}\ in>,\\
&U(\mathbf{1},a)|\vec{q}_1\vec{q}_2\cdots\vec{p}_s\ out>= e^{i(q_1+q_2+\cdots+q_s)a}|\vec{q}_1\vec{q}_2\cdots\vec{p}_s\ out>\\
&U(\Lambda,0)|\vec{q}_1\vec{q}_2\cdots\vec{p}_s\ out>= |\,\overrightarrow{\Lambda q_1}\,\overrightarrow{\Lambda q_2}\cdots\overrightarrow{\Lambda q_s}\ out>.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En fait, on vient de faire une hypothèse très importante : ce sont les mêmes opérateurs unitaires $U(\Lambda, a)$ qui réalisent les transformations de Poincaré sur les états entrants et sur les états sortants. Ceci est simplement la façon dont s'exprime l'invariance sous Poincaré en théorie de la diffusion.

D'autre part, on a supposé que les particules auxquelles sont associés des états asymptotiques sont les mêmes que les particules libres étudiées dans le chapitre précédent. On n'a en particulier pas considéré la possibilité que l'interaction permette la formation d'états liés stables. Si de tels états existent, ils doivent être inclus dans les états asymptotiques. Dans le cas que nous étudions, le potentiel qu'on obtient dans la limite non relativiste est un potentiel répulsif, ce qui donne un peu de vraisemblance à notre hypothèse. Le spectre des valeurs propres de l'opérateur $P^2 = P^\mu P_\mu$ est donc le même que dans la théorie libre



On remarque que les états à une particule peuvent être caractérisés comme les états propres de l'opérateur P^2 qui correspondent à des valeurs propres isolées. On admettra enfin que les états entrants (ou sortants) forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert. On dispose donc de deux bases orthonormées distinctes, et on appelle matrice S l'opérateur unitaire de changement de base

$$|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>= S|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ out>,\quad S^\dagger = S^{-1}. \tag{4.8}$$

Les quantités mesurées dans les expériences de physique des particules sont reliées aux amplitudes de transition entre états entrants et états sortants

$$<\vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\ out|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>=<\vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\,in|S|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>, \quad (4.9)$$

qui s'identifient aux éléments de la matrice S dans la base des états entrants. On se propose alors comme but de calculer les éléments de la matrice S. Comme conséquence de l'action (4.7) du groupe de Poincaré sur les états asymptotiques, l'opérateur S commute avec les transformations de Poincaré

$$U(\Lambda,a)SU^{-1}(\Lambda,a)=S. \quad (4.10)$$

D'autre part, on sait que le vecteur vide est le seul état de l'espace de Hilbert invariant sous les transformations de Poincaré. On en déduit que les vides entrants et sortants doivent coïncider à une phase près. Avec un choix approprié de la phase du vide entrant, on a

$$|0\ in>=S|0\ out>=|0\ out>\equiv|0>\,. \quad (4.11)$$

De manière analogue, les états à une particule sont complètement caractérisés par l'action des opérateurs P^2 et $\vec{P}$

$$P^2|\vec{p}\ in>=m^2|\vec{p}\ in>,\quad P^i|\vec{p}\ in>=p^i|\vec{p}\ in>, \quad (4.12)$$

et en choisissant la phase des états à une particule entrants, on a

$$|\vec{p}\ in>=S|\vec{p}\ out>=|\vec{p}\ out>\,. \quad (4.13)$$

De manière imagée, si on envoie une seule particule, il ne lui arrive rien, et elle ressort comme elle est entrée. On définit les opérateurs de création et d'annihilation des particules entrantes par leur action sur les états asymptotiques

$$a_{in}(\vec{p})|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>=\sum_{i=1}^{r}(2\pi)^3 2\omega(\vec{p})\delta^3(\vec{p}-\vec{p}_i)|\vec{p}_1\ \cdots\vec{p}_{i-1}\,\vec{p}_{i+1}\cdots\vec{p}_r\ in>,$$
$$a^\dagger_{in}(\vec{p})|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>=|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\,\vec{p}\ in>\,. \quad (4.14)$$

Les opérateurs de création $a^\dagger_{out}(\vec{p})$ et d'annihilation $a_{out}(\vec{p})$ sont définis par des formules identiques lorsqu'ils agissent sur les états asymptotiques sortants. Ils sont reliés aux opérateurs entrants par l'opérateur S

$$a_{in}(\vec{p})=Sa_{out}(\vec{p})S^{-1},\quad a^\dagger_{in}(\vec{p})=Sa^\dagger_{out}(\vec{p})S^{-1}. \quad (4.15)$$

On peut alors combiner les opérateurs de création et d'annihilation pour construire les champs libres entrant et sortant

$$\begin{aligned}
\varphi_{in}(x) &= \int d\tilde{p}(e^{-ipx}a_{in}(\vec{p}) + e^{ipx}a^{\dagger}_{in}(\vec{p})), \\
\varphi_{out}(x) &= \int d\tilde{p}(e^{-ipx}a_{out}(\vec{p}) + e^{ipx}a^{\dagger}_{out}(\vec{p})), \\
\varphi_{in}(\vec{p}) &= S\varphi_{out}(\vec{p})S^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.3 Conditions asymptotiques et représentation d'interaction

Afin de calculer les éléments de la matrice S, on doit relier les champs asymptotiques entrant et sortant au champ en interaction $\varphi(x)$. On va admettre qu'en un sens restreint, qui ne sera pas précisé pour l'instant, le champ en interaction tend vers le champ asymptotique entrant $\varphi_{in}(x)$ lorsque $t \to -\infty$ et vers le champ asymptotique sortant $\varphi_{out}(x)$ lorsque $t \to \infty$

$$\varphi_{in}(t,\vec{x}) \longleftarrow_{-\infty\leftarrow t} \varphi(t,\vec{x}) \;\; {}_{t\to\infty} \longrightarrow \varphi_{out}(t,\vec{x}). \tag{4.17}$$

La forme correcte de ces limites est due à Lehmann, Symanzik et Zimmermann. On va faire dans la suite une hypothèse encore beaucoup plus forte. On remarque que les relations de commutation à temps égaux des champs en interaction et des champs libres sont identiques. On va supposer que ces opérateurs sont reliés par une transformation unitaire qui dépend du temps

$$\varphi(t,\vec{x}) = U^{-1}(t)\varphi_{in}(t,\vec{x})U(t), \quad U^{-1}(t) = U^{\dagger}(t). \tag{4.18}$$

Le calcul de l'opérateur $U(t)$ est identique à celui fait dans le cas de l'interaction avec un courant. On obtient

$$U(t) = T\exp(-i\int_{-\infty}^{t} dt' H_I(t')),\;\; H_I(t) = \frac{g}{4!}\int d^3x(\varphi_{in}(t,\vec{x}))^4. \tag{4.19}$$

Cet opérateur tend vers l'identité lorsque t tend vers $-\infty$, ce qui correspond au fait que le champ en interaction tend vers le champ asymptotique entrant dans cette limite. On sait aussi que le champ asymptotique tend vers le champ asymptotique sortant lorsque t tend vers $+\infty$. On en déduit

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = T\exp\left(-i\frac{g}{4!}\int d^4x(\varphi_{in}(x))^4\right) = e^{i\alpha}S, \tag{4.20}$$

où le facteur de phase $e^{i\alpha}$ est obtenu en prenant la valeur moyenne dans le vide de cette équation

$$e^{i\alpha} =< 0|T\exp\left(-i\frac{g}{4!}\int d^4x(\varphi_{in}(x))^4\right)|0> . \tag{4.21}$$

En utilisant la notation suivante pour la densité lagrangienne d'interaction

$$\mathcal{L}_{int}(\varphi(x)) = -\frac{g}{4!}(\varphi(x))^4, \tag{4.22}$$

on obtient l'expression suivante de la matrice S en fonction du champ libre entrant

$$S = \frac{Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))}}{< 0|Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))}|0>}. \tag{4.23}$$

En principe, le travail préparatoire est terminé. Il suffit maintenant de développer cette expression en puissances de la constante de couplage et d'utiliser le théorème de Wick étudié dans le chapitre précédent pour calculer le développement perturbatif de la matrice S. Ce calcul se heurte cependant à des difficultés considérables, et en pratique, il est utile de dériver d'abord une expression de la matrice S en terme du champ en interaction.

4.4 Fonctions de Green du champ en interaction

On commence par quelques manipulations de l'expression obtenue dans l'équation (4.23). On introduit une source classique $j(x)$ qui dans ce paragraphe n'a pas de signification physique, et sera utilisée comme un simple intermédiaire de calcul. On va utiliser l'équation

$$\frac{\delta}{i\delta j(x)}Te^{i\int d^4yj(y)\varphi_{in}(y)} = T\left(\varphi_{in}(x)e^{i\int d^4yj(y)\varphi_{in}(y)}\right). \tag{4.24}$$

On en déduit l'expression

$$Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))} = e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta j(x)}))}Te^{i\int d^4yj(y)\varphi_{in}(y)}\Big|_{j=0}. \tag{4.25}$$

On utilise maintenant l'équation (3.211) pour écrire

$$S = :\exp(i\int d^4x\varphi_{in}(x)(\Box^x + m^2)\frac{\delta}{i\delta j(x)}) : Z[j]\Big|_{j=0}, \tag{4.26}$$

avec

$$Z[j] = \frac{1}{<0|Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))}|0>} e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta j(x)}))} Z_0[j]$$
$$= \frac{<0|Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))+j(x)\varphi_{in}(x))}|0>}{<0|Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))}|0>}. \tag{4.27}$$

On va étudier le terme d'ordre n en puissances de la source $j(x)$ de cette expression. On note

$$K^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) =< 0|T\left(\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_1)e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))}\right)|0> . \tag{4.28}$$

On considère le cas particulier où les temps sont décroissants

$$x_1^0 = t_1 > x_2^0 = t_2 > \cdots > x_n^0 = t_n, \tag{4.29}$$

et on suppose ces n temps compris entre $+T$ et $-T$. On rappelle la notation

$$U(t,t') = T\exp(-i\int_{t'}^{t} dt'' H_I(t''))$$
$$= T\exp(i\int_{t'}^{t} dt''\int d^3x\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(t'',\vec{x}))), \quad t \geq t'. \tag{4.30}$$

L'équation (3.188) permet d'écrire

$$U(t) = U(t,t')U(t') \ \Leftrightarrow U(t,t') = U(t)U^{-1}(t') \tag{4.31}$$

En ordonnant soigneusement les temps du plus grand au plus petit, on peut réécrire l'expression (4.28) sous la forme

$$K^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lim_{T\to\infty} < 0|U(T,t_1)\varphi_{in}(x_1)U(t_1,t_2)\varphi_{in}(x_1)\cdots$$
$$\cdots U(t_{n-1},t_n)\varphi_{in}(x_n)U(t_n,-T)|0>, \tag{4.32}$$

En utilisant l'équation (4.31) et la relation (4.18) entre le champ asymptotique entrant et le champ en interaction, on obtient

$$K^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lim_{T\to\infty} < 0|U(T)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)U(-T)|0>, \tag{4.33}$$

On utilise finalement les résultats déjà dérivés

$$\lim_{T\to\infty} U(-T)|0>= |0>, \quad \lim_{T\to\infty} < 0|U(T) = e^{i\alpha} < 0|, \tag{4.34}$$

où le facteur de phase $e^{i\alpha}$ est donné dans l'équation (4.21), pour écrire

$$K^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = e^{i\alpha} < 0|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)|0 >, \tag{4.35}$$

Il faut toutefois se souvenir que nous avons considéré une configuration particulière des temps. On peut s'affranchir de cette hypothèse en utilisant le produit chronologique des champs en interaction. Ainsi, pour toute configuration des champs on a la relation

$$\begin{aligned} &< 0|T\left(\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_1)e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))}\right)|0 > \\ &\quad = e^{i\alpha} < 0|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n))|0 >, \end{aligned} \tag{4.36}$$

Finalement, en utilisant cette équation on peut écrire

$$Z[j] =< 0|Te^{i\int d^4x j(x)\varphi(x)}|0 >, \tag{4.37}$$

c'est-à-dire que $Z[j]$ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green du champ en interaction.

Résumons les résultats obtenus dans ce paragraphe. L'équation (4.26) exprime la matrice S en fonction de la fonctionnelle génératrice $Z[j]$ des fonctions de Green des champs en interaction, définie par l'équation (4.37). On dispose d'autre part de la relation (4.27) qui permet le calcul des fonctions de Green du champ en interaction en fonction des fonctions de Green du champ libre entrant. On voit donc que, si nous sommes capables de calculer le développement perturbatif des fonctions de Green du champ en interaction, on pourra en déduire le développement perturbatif de la matrice S. Toutefois, la formule (4.26) n'est pas totalement transparente, et on va étudier ses conséquences pour un élément de la matrice S

$$< \vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\; out|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\; in >=< \vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\, in|S|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\; in >, \tag{4.38}$$

La théorie est invariante par translation, et cet amplitude de transition n'est non nulle que si la quadri-impulsion totale entrante $\sum_{i=1}^{r} p_i$ s'identifie à la quadri-impulsion totale sortante $\sum_{j=1}^{s} q_j$. On utilisera la notation

$$\begin{aligned} &< \vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\; out|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\; in > \\ &\quad = (2\pi)^4\delta^4(\sum_{i=1}^{r} p_i - \sum_{j=1}^{s} q_j)i\mathcal{M}(p_1, \cdots, p_r \to q_1, \cdots, q_s). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Nous devons calculer l'élément de matrice suivant

$$< \vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\ in| : \exp(i\int d^4x\varphi_{in}(x)(\Box^x+m^2)\frac{\delta}{i\delta j(x)}) : |\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>$$
$$=< \vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\ in|e^{i\int d\tilde{p}a^\dagger_{in}(\vec{p})O(p)}e^{i\int d\tilde{p}a_{in}(\vec{p})O(-p)}|\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>, \quad (4.40)$$

où $O(p)$ est l'opérateur

$$O(p) = \int d^4xe^{ipx}(\Box+m^2)\frac{\delta}{i\delta j(x)} \quad (4.41)$$

On va faire l'hypothèse technique simplificatrice suivante : il n'y a pas de sous-ensemble des quadri-impulsions entrantes et de sous-ensemble des quadri-impulsions sortantes tels que la somme restreinte à ces sous-ensembles des quadri-impulsions entrantes et des quadri-impulsions sortantes soient égales. On dit alors que l'on a un ensemble d'impulsions non-exceptionnelles. Dans ce cas, le seul terme qui intervient dans le développement des exponentielles dans l'équation (4.40) est celui qui contient s opérateurs de création et r opérateurs d'annihilation. On obtient alors

$$< \vec{q}_1\,\vec{q}_2\cdots\vec{q}_s\ in| : \exp(i\int d^4x\varphi_{in}(x)(\Box^x+m^2)\frac{\delta}{i\delta j(x)}) : |\vec{p}_1\,\vec{p}_2\cdots\vec{p}_r\ in>$$
$$= (i)^{r+s}O(q_1)\cdots O(q_s)O(-p_1)\cdots O(-p_r). \quad (4.42)$$

On aura donc $r+s$ dérivées par rapport à la source, c'est donc la fonction de Green à $r+s$ points qui intervient. Rappelons que l'on note

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{\delta}{i\delta j(x_1)}\cdots\frac{\delta}{i\delta j(x_n)}Z[j]\bigg|_{j=0} =< 0|T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n))|0> . \quad (4.43)$$

Ces distributions sont complètement symétriques et invariantes sous les transformations de Poincaré. En particulier, l'invariance par translation implique la forme suivante de la transformée de Fourier des fonctions de Green

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}e^{-i(\sum_{i=1}^n p_ix_i)}\times$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(\sum_{i=1}^n p_i)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n). \quad (4.44)$$

On définit alors la fonction de Green amputée à n points par

$$
\begin{aligned}
&G_A^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = (i)^n(\Box_1+m^2)(\Box_2+m^2)\cdots(\Box_n+m^2)G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) \\
&= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}e^{-i(\sum_{i=1}^n p_ix_i)}(2\pi)^4\delta^4(\sum_{i=1}^n p_i)G_A^{(n)}(p_1,\cdots,p_n), \qquad (4.45) \\
&G_A^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) = (-i)^n({p_1}^2-m^2)({p_2}^2-m^2)\cdots({p_n}^2-m^2)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n).
\end{aligned}
$$

On obtient enfin l'expression de l'amplitude de transition (4.39) en fonction de la fonction de Green amputée

$$
i\mathcal{M}(p_1,\cdots,p_r\to q_1,\cdots,q_s) = G_A^{(n)}(q_1,\cdots,q_s,-p_1,\cdots,-p_r). \qquad (4.46)
$$

Remarquons que les quadri-impulsions des particules entrantes et sortantes satisfont ${q_i}^2 = m^2$, ${p_i}^2 = m^2$. On dit que leurs quadri-impulsions sont sur la couche de masse. Alors, la dernière des équations (4.45) semble indiquer que l'amplitude de transition est nulle. Ce n'est en fait pas le cas, comme on pourra le vérifier prochainement, car les fonctions de Green $G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)$ sont singulières lorsqu'au moins une des quadri-impulsions est sur la couche de masse.

4.5 Retour sur les conditions asymptotiques

On va maintenant donner un contenu plus précis à la condition que le champ en interaction "tend vers" les champs asymptotiques libres, comme indiqué dans l'équation (4.17). Rappelons que les opérateurs de création d'un état à impulsion fixée sont reliés au champ par la relation

$$
a_{in}^\dagger(\vec{p}) = -i\int d^3x e^{-ipx} \overleftrightarrow{\partial_0}\, \varphi_{in}(x) \qquad (4.47)
$$

Cet opérateur ne dépend pas du temps car le champ libre $\varphi_{in}(x)$ est solution de l'équation de Klein-Gordon. Si l'on applique la même opération au champ en interaction, on obtient un opérateur qui dépend du temps

$$
\varphi(\vec{p},t) = -i\int d^3x e^{-ipx} \overleftrightarrow{\partial_0}\, \varphi(x) \qquad (4.48)
$$

L'opérateur $a_{in}^\dagger(\vec{p})$ crée des états non normalisables. On obtiendra un opérateur qui crée un état normalisable en formant un "paquet d'ondes". On introduit une fonction complexe $\psi(\vec{p})$, et on considère l'opérateur

$$a_{in}^{\dagger}(\psi) = \int d\tilde{p}\psi(\vec{p})a_{in}^{\dagger}(\vec{p}), \quad \int d\tilde{p}|\psi(\vec{p})|^2 = 1, \tag{4.49}$$

qui, lorsqu'il agit sur le vide, donne un état à une particule entrante normalisé

$$|\psi\ in\rangle = a_{in}^{\dagger}(\psi)|0\rangle,\ \langle\psi\ in|\psi\ in\rangle = 1 \tag{4.50}$$

On peut former le même "paquet" à partir du champ en interaction

$$\varphi(\psi, t) = \int d\tilde{p}\psi(\vec{p})\varphi(\vec{p}, t). \tag{4.51}$$

C'est toujours un opérateur qui dépend du temps. Dans une limite asymptotique naïve, on s'attendrait à ce que l'opérateur $\varphi(\psi, t)$ tende vers l'opérateur de création des états asymptotique $a_{in}^{\dagger}(\psi)$. Toutefois, il est montré dans le livre d'Itzykson et Zuber qu'une telle limite entraine que le champ $\varphi(x)$ est lui-même un champ libre. Le mieux que l'on puisse faire est alors donné par les conditions asymptotiques de Lehmann, Symanzik et Zimmermann (LSZ)

$$\sqrt{Z}a_{in}^{\dagger}(\psi) \longleftarrow_{-\infty\leftarrow t}\ \tilde{\varphi}(\psi, t)\ \ {}_{t\to\infty} \longrightarrow \sqrt{Z}a_{out}^{\dagger}(\psi), \tag{4.52}$$

Où la constante Z est définie par

$$Z = |\langle\vec{p}\ in|\varphi(x)|0\rangle|^2 \tag{4.53}$$

On vérifie en utilisant l'invariance par translation que Z ne dépend pas du point x, et en utilisant l'invariance sous les transformations de Lorentz qu'il ne dépend pas non plus de l'impulsion $\vec{p}$ de l'état entrant à une particule. Dans l'équation (4.52), les limites aux grands temps doivent être comprises comme des limites sur les éléments de matrice des opérateurs, et non sur les opérateurs eux-mêmes.

Une autre manière de caractériser la constante Z est d'étudier la fonction de Green à deux points

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x,y) &= \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y)))|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle \\ &\quad +\theta(y^0 - x^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x))|0\rangle. \end{aligned} \tag{4.54}$$

On peut insérer entre les deux opérateurs de champ la relation de complétude pour les états entrants. On va se contenter de calculer ici la contribution des états à une particule qui s'écrit

$$\begin{aligned} G^{(2)}_{1\,part}(x,y) &= \theta(x^0-y^0)\int d\tilde{p}\langle 0|\varphi(x)|\vec{p}\;in\rangle\langle\vec{p}\;in|\varphi(y))|0\rangle \\ &\qquad +\theta(y^0-x^0)\int d\tilde{p}\langle 0|\varphi(y)|\vec{p}\;in\rangle\langle\vec{p}\;in|\varphi(x))|0\rangle. \quad (4.55)\end{aligned}$$

En utilisant la définition de Z et la relation

$$\langle\vec{p}\;in|\varphi(x)|0\rangle = e^{ipx}\langle\vec{p}\;in|\varphi(0)|0\rangle, \quad (4.56)$$

on obtient

$$\begin{aligned} G^{(2)}_{1\,part}(x,y) &= Z(\theta(x^0-y^0)\int d\tilde{p}e^{-ip(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\int d\tilde{p}e^{-ip(x-y)}) \\ &= ZG_F(x,y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\frac{iZ}{p^2-m^2+i\epsilon} \quad (4.57)\end{aligned}$$

On observe que la contribution des états à une particule à la fonction de Green à deux points du champ en interaction a la même forme qu'une fonction de Green à deux points pour un champ libre, au facteur Z près. La transformée de Fourier de cette contribution possède un pôle lorsque p^2 est égal au carré de la masse m des particules. On admettra sans démonstration que la contribution des états à plus d'une particule a une transformée de Fourier qui ne possède pas de pôle en p^2. On en conclut qu'on peut caractériser la masse carrée des particules comme la position du pôle en p^2 de la transformée de Fourier de la fonction de Green à deux points, et le facteur iZ comme le résidu à ce même pôle.

Les conditions LSZ sont suffisantes pour relier les éléments de la matrice S aux fonctions de Green du champ en interaction. On ne le démontrera pas ici, mais on obtient une version modifiée de l'équation (4.26)

$$\begin{aligned} S = \;:\exp(iZ^{-\frac{1}{2}}\textstyle\int d^4x\varphi_{in}(x)(\Box^x+m^2)\frac{\delta}{i\delta j(x)})\;: Z[j]\Big|_{j=0}, \\ Z[j] =< 0|Te^{i\int d^4xj(x)\varphi(x)}|0> . \quad (4.58)\end{aligned}$$

On obtient alors pour une amplitude de transition une modification de l'équation (4.46)

$$i\mathcal{M}(p_1,\cdots,p_r\to q_1,\cdots,q_s) = Z^{-\frac{r+s}{2}}G^{(n)}_A(q_1,\cdots,q_s,-p_1,\cdots,-p_r). \quad (4.59)$$

4.6 Formule de Gell-Mann et Low

Nous venons d'obtenir un lien entre les éléments de la matrice S et les fonctions de Green du champ en interaction. Il nous faut maintenant une méthode pour calculer ces fonctions de Green, au moins perturbativement en puissances de la constante de couplage. Nous avons déjà écrit la formule qui permet de faire cela dans l'équation (4.27), que l'on se contente de reproduire ici

$$\begin{aligned} Z[j] &= \frac{1}{<0|Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))}|0>} e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\frac{\delta}{i\delta j(x)}))} Z_0[j] \\ &= \frac{<0|Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))+j(x)\varphi_{in}(x))}|0>}{<0|Te^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))}|0>}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Cette formule est appelée formule de Gell-Mann et Low. Elle permet le calcul des fonctions de Green du champ en interaction à partir de celles du champ libre. Malheureusement, il n'en existe pas de dérivation rigoureuse. Elle s'appuie de manière essentielle sur la représentation d'interaction, qui en général, je regrette de le dire, n'existe pas en théorie des champs. Alors, que faire ? On va essayer de l'utiliser tout de même, et on verra que ce n'est pas facile, car le membre de droite n'est pas bien défini. Cependant, avec des modifications appropriées, elle permet malgré tout le calcul perturbatif de fonctions de Green qui ont toutes les propriétés désirables.