

5 Méthodes fonctionnelles, développement perturbatif

5.1 De l'espace de Minkowski à l'espace euclidien

Nous avons étudié jusqu'ici la théorie des champs dans l'espace de Minkowski, qui est le cadre naturel pour la mécanique quantique relativiste. Dans ce chapitre, nous allons fréquemment utiliser un espace euclidien, dont nous verrons qu'il est le cadre naturel pour la mécanique statistique.

On considère toujours un un champ scalaire réel $\varphi(x)$ et l'action classique

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi), \quad \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) - \frac{g}{4!}\varphi^4. \quad (5.1)$$

La théorie est invariante sous les transformations de Poincaré. L'opérateur de champ de la théorie quantique satisfait l'équation d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \vec{x}) = i[H, \varphi(t, \vec{x})] \Leftrightarrow \varphi(t, \vec{x}) = e^{iHt}\varphi(0, \vec{x})e^{-iHt}. \quad (5.2)$$

Les fonctions de Green sont les valeurs moyennes dans le vide des T-produits des champs

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n))|0\rangle. \quad (5.3)$$

Formellement, on va "passer à l'euclidien" en considérant le temps imaginaire $t = -i\tau$, et on appellera τ le temps euclidien. On définit le champ euclidien par

$$\varphi_E(\tau, \vec{x}) = e^{H\tau}\varphi(0, \vec{x})e^{-H\tau} \quad (5.4)$$

On utilisera la notation

$$(\tau, \vec{x}) = \underline{x} = (x^4, x^1, x^2, x^3) \quad (5.5)$$

On définit alors les fonctions de Green euclidiennes par

$$G_E^{(n)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) = \langle 0|\hat{T}(\varphi_E(\underline{x}_1)\varphi_E(\underline{x}_2)\cdots\varphi_E(\underline{x}_n))|0\rangle, \quad (5.6)$$

où \hat{T} désigne le produit ordonné dans les temps imaginaires $x_1^4 = \tau_1, \dots, x_n^4 = \tau_n$. À titre d'exemple, considérons la fonction de Green à deux points

d'un champ libre. Elle s'écrit dans l'espace de Minkowski

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(x_1, x_2) &= G_F(x_1, x_2) \\
&= \theta(x_1^0 - x_2^0) \int d\tilde{p} e^{-ip(x_1 - x_2)} + \theta(x_2^0 - x_1^0) \int d\tilde{p} e^{ip(x_1 - x_2)} \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} G_F(p), \quad G_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (5.7)
\end{aligned}$$

et satisfait à l'équation

$$i(\square + m^2)G^{(2)}(x_1, x_2) = \delta^4(x_1 - x_2). \quad (5.8)$$

Pour un champ libre, on calcule facilement la fonction de Green euclidienne

$$\begin{aligned}
G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \langle 0 | \hat{T}(\varphi_E(\underline{x}_1) \varphi_E(\underline{x}_2)) | 0 \rangle \\
&= \theta(x_1^4 - x_2^4) \int d\tilde{p} e^{-\omega(\vec{p})(x_1^4 - x_2^4) + i\vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \\
&\quad + \theta(x_2^4 - x_1^4) \int d\tilde{p} e^{\omega(\vec{p})(x_1^4 - x_2^4) - i\vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

On se ramène à une transformée de Fourier à quatre dimensions. On utilisera la notation

$$\underline{p} = (p^4, p^1, p^2, p^3), \quad \underline{p}\underline{x} = \sum_{i=1}^4 p^i x^i, \quad \underline{p}^2 = \sum_{i=1}^4 (p^i)^2. \quad (5.10)$$

On obtient alors la distribution

$$\begin{aligned}
G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2), \\
G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)} G_E(\underline{p}), \quad G_E(\underline{p}) = \frac{1}{\underline{p}^2 + m^2}, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

qui satisfait à l'équation

$$-(\Delta_4 - m^2)G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \delta^4(x_1 - x_2). \quad (5.12)$$

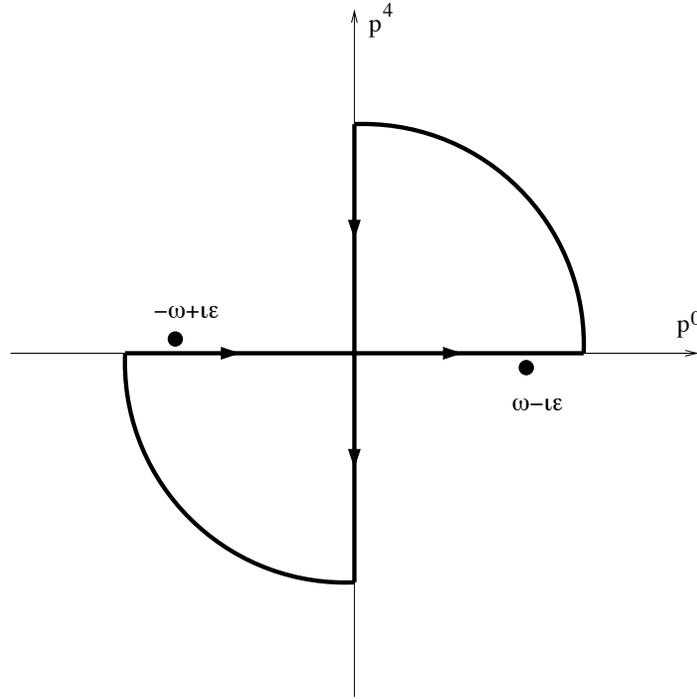
Si la fonction de Green de Feynman est singulière sur le cône de lumière $(x_1 - x_2)^2 = 0$, la fonction de Green euclidienne n'est singulière qu'à l'origine $(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)^2 = 0$. On remarque aussi que la fonction de Green euclidienne est invariante sous les rotations à quatre dimensions. De manière générale, les

fonctions de Green euclidiennes ne sont singulières que lorsque deux points coïncident, et sont invariantes par translation et par rotation.

On peut établir une relation entre les transformées de Fourier des fonctions de Green à deux points euclidiennes et minkowskiennes de la manière suivante. Considérons une fonction $F(p)$, et supposons qu'on s'intéresse à l'intégrale

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G_F(p) F(p) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{iF(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.13)$$

Considérons alors la même intégrale le long du chemin fermé suivant dans le plan complexe de p^0



On suppose que $F(p)$ peut être prolongée analytiquement dans le plan complexe de p^0 , qu'elle ne possède pas de pôle à l'intérieur du chemin, et qu'elle reste finie lorsque $|p^0| \rightarrow \infty$. Alors, l'intégrale le long des quarts de cercle tend vers 0 lorsque le rayon tend vers l'infini, et l'intégrale le long de l'axe réel s'identifie à l'intégrale le long de l'axe imaginaire. Cela revient à dire que l'on peut remplacer p^0 par ip^4 dans l'intégrale précédente

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G_F(p) F(p) = \int \frac{d^4 \underline{p}}{(2\pi)^4} \frac{F(ip^4, \vec{p})}{\underline{p}^2 + m^2} = \int \frac{d^4 \underline{p}}{(2\pi)^4} G_E(\underline{p}) F(ip^4, \vec{p}). \quad (5.14)$$

De manière imagée, on peut dire que l'on a fait une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan complexe pour p^0 , dans le sens qui évite les pôles de la fonction $G_F(p)$. On appelle cette rotation une rotation de Wick.

5.2 Intégrale de chemin

On va se donner une représentation en intégrale de chemin de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green

$$Z[j] = \langle 0 | T e^{i \int d^4x j(x) \varphi(x)} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x)) + j(x) \varphi_{in}(x))} | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\varphi_{in}(x))} | 0 \rangle}. \quad (5.15)$$

L'intégrale de chemin a été étudiée en détail dans le cours de mécanique quantique, et on ne reprendra pas cette étude ici. On admettra donc que cette fonctionnelle possède la représentation en intégrale de chemin

$$Z[j] = N \int [d\varphi] e^{i(S[\varphi] + \int d^4x j(x) \varphi(x))}, \\ S[\varphi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \varphi(x) (\square + m^2) \varphi(x) - \frac{g}{4!} (\varphi(x))^4 \right). \quad (5.16)$$

L'action $S[\varphi]$ s'identifie à l'action classique (5.1) à une intégration par parties près, et N est une constante de normalisation choisie telle que

$$Z[j = 0] = 1. \quad (5.17)$$

Il faut encore préciser quelles sont les conditions sur le champ aux grands temps. On a vu en mécanique quantique que pour un élément de matrice entre états propres de la position, on fixe les valeurs de la position aux temps extrêmes. Mais nous calculons une valeur moyenne dans le vide, qui n'est pas un état de ce type, c'est-à-dire que ce n'est pas un état propre de l'opérateur de champ $\varphi_{in}(x)$. C'est un état propre des opérateurs d'annihilation

$$a_{in}(\vec{p}) = i \int d^3x e^{ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{in}(x). \quad (5.18)$$

avec une valeur propre nulle. Le bra $\langle 0 |$ est pour sa part état propre des opérateurs de création avec une valeur propre nulle. On admettra alors que les conditions aux limites s'écrivent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, \vec{p}) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{\varphi}(t, \vec{p}) = 0, \\ \varphi(t, \vec{p}) = -i \int d^3x e^{-ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), \quad \bar{\varphi}(t, \vec{p}) = i \int d^3x e^{ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x). \quad (5.19)$$

Notons que ces conditions aux limites portent sur des quantités complexes. Calculons l'intégrale de chemin dans le cas de la théorie libre, $g = 0$. On a alors

$$Z_0[j] = N_0 \int [d\varphi] e^{i(S_0[\varphi] + i \int d^4x j(x)\varphi(x))}, \quad S_0[\varphi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \varphi(x)(\square + m^2)\varphi(x) \quad (5.20)$$

On doit trouver un extrémum de l'exposant, c'est-à-dire une solution des équations du mouvement

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x), \quad (5.21)$$

qui satisfait les conditions aux limites (5.19). Cette solution est unique, et s'écrit

$$\varphi_c(x) = i \int d^4y G_F(x, y) j(y). \quad (5.22)$$

Notons que cette unique solution est complexe. En conséquence, les quantités $\varphi_c(t, \vec{p})$ et $\bar{\varphi}_c(t, \vec{p})$ ne sont pas complexes conjugués l'une de l'autre, et s'écrivent

$$\varphi_c(t, \vec{p}) = \int_t^\infty dy^0 \int d^3y e^{-ipy} j(y), \quad \bar{\varphi}_c(t, \vec{p}) = \int_{-\infty}^t dy^0 \int d^3y e^{ipy} j(y). \quad (5.23)$$

On change alors de variables d'intégration

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + \varphi_c(x). \quad (5.24)$$

Les conditions aux limites sur les variables $\tilde{\varphi}(x)$ sont les mêmes que sur $\varphi(x)$. On obtient de plus

$$S_0[\varphi] + \int d^4x j(x)\varphi(x) = S_0[\tilde{\varphi}] + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y j(x) G_F(x, y) j(y). \quad (5.25)$$

La mesure de l'intégrale de chemin étant invariante par translation, on obtient finalement

$$Z_0[j] = e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x) G_F(x, y) j(y)} N_0 \int [d\tilde{\varphi}] e^{iS_0[\tilde{\varphi}]} = e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x) G_F(x, y) j(y)}, \quad (5.26)$$

où l'on a utilisé la condition (5.17). Ce résultat est bien sûr identique à celui obtenu en utilisant le formalisme opératoire, voir l'équation (3.206) du chapitre 3.

En fait, on calcule beaucoup plus simplement l'intégrale de chemin (5.15) en remplaçant les conditions aux limites (5.19) par un argument heuristique que l'on appelle la prescription de Feynman. L'intégrand de l'intégrale de chemin (5.15) est une exponentielle oscillante. On va améliorer la convergence de cette intégrale en modifiant un peu l'action de façon que l'intégrand décroisse pour les grandes valeurs des champs. Cela se fait simplement en remplaçant dans l'action le carré de la masse m^2 par $m^2 - i\epsilon$. L'intégrand est alors multiplié par le facteur gaussien

$$e^{-\frac{1}{2}\epsilon \int d^4x (\varphi(x))^2} \quad (5.27)$$

Dans ce cas, les équations du mouvement (5.21) deviennent

$$(\square + m^2 - i\epsilon)\varphi(x) = j(x), \quad (5.28)$$

dont l'unique solution qui possède une transformée de Fourier s'écrit, comme dans (5.22),

$$\varphi_c(x) = i \int d^4y G_F(x, y) j(y). \quad (5.29)$$

Fonctions de Green euclidiennes

Toujours sans preuve, on admettra que la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green euclidiennes admet la représentation en intégrale de chemin

$$\begin{aligned} Z_E[j] &= \langle 0 | \hat{T} e^{i \int d^4x j(x) \varphi_E(x)} | 0 \rangle = N_E \int [d\varphi_E] e^{-(S_E[\varphi_E] + \int d^4x j(x) \varphi_E(x))}, \\ S_E[\varphi_E] &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \varphi_E(x) (-\Delta_4 + m^2) \varphi_E(x) + \frac{g}{4!} (\varphi_E(x))^4 \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

L'action euclidienne $S_E[\varphi_E]$ est une quantité positive, on n'a donc pas besoin dans ce cas d'un facteur de convergence. Les conditions aux limites sont simplement que le champ $\varphi_E(\underline{x})$ tend vers 0 à l'infini. On calcule facilement la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green euclidiennes libres, $g = 0$,

$$Z_{0E}[j] = e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x) G_E(x, y) j(y)}, \quad (5.31)$$

où la distribution $G_E(\underline{x}, \underline{y})$ est définie dans l'équation (5.11).

La fonctionnelle $Z_E[j]$ possède une interprétation simple en mécanique statistique. Considérons un système physique dont les configurations sont déterminées par la donnée d'un champ $\varphi_E(\underline{x})$ en tout point de l'espace. On suppose que l'énergie d'une configuration est $S_E[\varphi_E]$. On se place

dans l'ensemble canonique à la température $\beta = \frac{1}{kT} = 1$. Alors $Z_E[j]$ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélations

$$\begin{aligned} \langle \varphi_E(\underline{x}_1) \varphi_E(\underline{x}_2) \cdots \varphi_E(\underline{x}_n) \rangle &= \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_2)} \right) \cdots \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_n)} \right) Z_E[j] \Big|_{j=0} \\ &= N_E \int [d\varphi_E] \varphi_E(\underline{x}_1) \varphi_E(\underline{x}_2) \cdots \varphi_E(\underline{x}_n) e^{-S_E[\varphi_E]}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.3 Développement perturbatif, graphes de Feynman

On va commencer à étudier la structure du développement perturbatif des fonctions de Green. On ne se préoccupera pas pour l'instant du calcul explicite, on veut seulement comprendre comment s'organise ce développement. On va travailler sur les fonctions de Green euclidiennes, mais le cas minkowskien s'en déduit sans peine. L'intégrale de chemin de l'équation (5.30) fait intervenir l'action euclidienne

$$\begin{aligned} S_E[\varphi_E] &= S_{0E}[\varphi_E] + \int d^4 \underline{x} V(\varphi_E(\underline{x})), \\ S_{0E}[\varphi_E] &= \frac{1}{2} \varphi_E(\underline{x}) (-\Delta_4 + m^2) \varphi_E(\underline{x}), \quad V(\varphi_E) = \frac{g}{4!} \varphi_E^4. \end{aligned} \quad (5.33)$$

On va utiliser la formule

$$e^{(-\int d^4 \underline{x} V(\varphi_E(\underline{x})) - \int d^4 \underline{x} j(\underline{x}) \varphi_E(\underline{x}))} = e^{(-\int d^4 \underline{x} V(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})})} e^{(-\int d^4 \underline{x} j(\underline{x}) \varphi_E(\underline{x}))}. \quad (5.34)$$

Tout opérateur de dérivation par rapport à la source peut être extrait de l'intégrale fonctionnelle. On peut alors réécrire l'équation (5.30) sous la forme

$$Z_E[j] = N' e^{(-\int d^4 \underline{x} V(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})})} Z_{0E}[j], \quad N' = \frac{N_E}{N_{0E}}. \quad (5.35)$$

En tenant compte de la condition $Z_E[j=0] = 1$, on obtient finalement

$$Z_E[j] = \frac{e^{(-\int d^4 \underline{x} V(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})})} Z_{0E}[j]}{e^{(-\int d^4 \underline{x} V(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})})} Z_{0E}[j] \Big|_{j=0}}, \quad (5.36)$$

Où $Z_{0E}[j]$ est donné par l'équation (5.31).

Fonction à deux points

Considérons le développement perturbatif de la fonction de Green à deux

points

$$\begin{aligned}
G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_2)} \right) Z[j] \Big|_{j=0} \\
&= \frac{e^{(-\int d^4 \underline{x} V(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})})} \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_2)} \right) Z_{0E}[j] \Big|_{j=0}}{e^{(-\int d^4 \underline{x} V(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})})} Z_{0E}[j] \Big|_{j=0}}. \quad (5.37)
\end{aligned}$$

On notera les premiers termes du développement perturbatif de $G_E^{(2)}$ sous la forme

$$G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = G^0(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + G^1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + G^2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + O(g^3) \quad (5.38)$$

Il faut maintenant développer les exponentielles du numérateur et du dénominateur en puissances du potentiel d'interaction. Commençons par développer le numérateur

– Ordre 0 en g

$$\left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_2)} \right) Z_{0E}[j] \Big|_{j=0} = G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2). \quad (5.39)$$

Au même ordre, le dénominateur vaut 1. On obtient donc

$$G^0(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2). \quad (5.40)$$

On retrouve bien sur le résultat de la théorie libre.

– Ordre 1 en g

$$-\frac{g}{4!} \int d^4 \underline{x} \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})} \right)^4 \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_2)} \right) Z_{0E}[j] \Big|_{j=0}. \quad (5.41)$$

On calcule cette quantité en utilisant le théorème de Wick, c'est à dire que l'on somme sur tous les appariements des points \underline{x}_1 , \underline{x}_2 , et des quatre points \underline{x} . On obtient

$$-\frac{g}{4!} \int d^4 \underline{x} (3G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2)(G_E(\underline{x}, \underline{x}))^2 + 12G_E(\underline{x}_1, \underline{x})G_E(\underline{x}_2, \underline{x})G_E(\underline{x}, \underline{x})). \quad (5.42)$$

Il est commode de représenter ces expressions par des graphes. On va utiliser les mêmes règles que celles introduites dans la théorie des champs classique

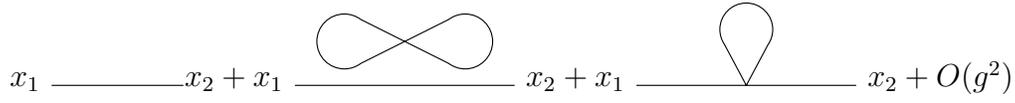
- Ligne : $x_1 \text{ --- } x_2 = G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2),$

- Vertex : $\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} = -g \int d^4 \underline{x},$

On ne se préoccupe pas pour l'instant des facteurs numériques. On peut alors représenter les deux termes de (5.42) par les diagrammes



Le numérateur de (5.37) s'écrit donc jusqu'à l'ordre g



Le diagramme , sans patte externe, est appelé diagramme vide-vide. Au même ordre, le dénominateur s'écrit

- Ordre 0 en g

$$Z_{0E}[j] \Big|_{j=0} = 1. \tag{5.43}$$

- Ordre 1 en g

$$-\frac{g}{4!} \int d^4 \underline{x} \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})} \right)^4 Z_{0E}[j] \Big|_{j=0} = -\frac{3g}{4!} \int d^4 \underline{x} (G_E(\underline{x}, \underline{x}))^2 =$$

On obtient donc pour le dénominateur

$$1 + \text{figure-eight diagram} + O(g^2)$$

Au total, on obtient à cet ordre pour la fonction de Green à deux points

$$G^0(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + G^1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{\text{figure-eight diagram} + \text{tadpole diagram} + O(g^2)}{1 + \text{figure-eight diagram} + O(g^2)} =$$

$$\begin{aligned}
& \left(\text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \right) (1 - \text{---}) + O(g^2) \\
& = \text{---} + \text{---} + O(g^2),
\end{aligned}$$

ou, plus explicitement,

$$\begin{aligned}
G^1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= -\frac{g}{2} \int d^4 \underline{x} G_E(\underline{x}_1, \underline{x}) G_E(\underline{x}_2, \underline{x}) G_E(\underline{x}, \underline{x}) \\
&= \text{---} \text{---} \quad (5.44)
\end{aligned}$$

L'effet du dénominateur est de compenser le terme qui contient un diagramme vide-vide. C'est un résultat tout à fait général, et non limité à cette fonction de Green ou à cet ordre en g . On va alors calculer la contribution d'ordre g^2 à la fonction de Green à deux points en ne considérant que le numérateur, et en ne gardant que les termes ne contenant pas de diagramme vide-vide. On a donc

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4!)^2} \int d^4 \underline{x} \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x})} \right)^4 \int d^4 \underline{y} \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{y})} \right)^4 \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_2)} \right) Z_{0E}[j] \Big|_{j=0} \\
&= g^2 \int d^4 \underline{x} d^4 \underline{y} \left(G_E(\underline{x}_1, \underline{x}) G_E(\underline{x}_2, \underline{y}) \left(\frac{1}{4} G_E(\underline{x}, \underline{x}) G_E(\underline{x}, \underline{y}) G_E(\underline{y}, \underline{y}) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6} (G_E(\underline{x}, \underline{y}))^3 \right) + \frac{1}{4} G_E(\underline{x}_1, \underline{x}) G_E(\underline{x}_2, \underline{x}) (G_E(\underline{x}, \underline{y}))^2 G_E(\underline{x}, \underline{y}) + \dots \quad (5.45)
\end{aligned}$$

où \dots représente des termes qui contiennent des diagrammes vide-vide, et qui sont compensés par le dénominateur. On en déduit

$$\begin{aligned}
G^2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \\
&= g^2 \int d^4 \underline{x} d^4 \underline{y} \left(G_E(\underline{x}_1, \underline{x}) G_E(\underline{x}_2, \underline{y}) \left(\frac{1}{4} G_E(\underline{x}, \underline{x}) G_E(\underline{x}, \underline{y}) G_E(\underline{y}, \underline{y}) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6} (G_E(\underline{x}, \underline{y}))^3 \right) + \frac{1}{4} G_E(\underline{x}_1, \underline{x}) G_E(\underline{x}_2, \underline{x}) (G_E(\underline{x}, \underline{y}))^2 G_E(\underline{x}, \underline{y}) \\
&= \underline{x}_1 \text{---} \text{---} \text{---} \underline{x}_2 + \underline{x}_1 \text{---} \text{---} \text{---} \underline{x}_2 + \underline{x}_1 \text{---} \text{---} \text{---} \underline{x}_2. \quad (5.46)
\end{aligned}$$

On devrait maintenant passer à la fonction de Green à trois points, mais on vérifie facilement qu'elle est nulle à tous les ordres dans la constante de couplage. C'est d'ailleurs le cas de toutes les fonctions de Green avec un nombre impair de points. C'est une conséquence de la symétrie $\varphi_E \rightarrow -\varphi_E$. On va donc considérer la fonction de Green à quatre points

$$G_E^{(4)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) = \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_2)} \right) \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_3)} \right) \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_4)} \right) Z[j] \Big|_{j=0} . \quad (5.47)$$

– Ordre 0 en g

$$\begin{aligned} & G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2)G_E(\underline{x}_3, \underline{x}_4) + G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_3)G_E(\underline{x}_2, \underline{x}_4) + G_E(\underline{x}_1, \underline{x}_4)G_E(\underline{x}_2, \underline{x}_3) \\ &= \underline{x}_1 \text{ --- } \underline{x}_2 + \underline{x}_1 \text{ --- } \underline{x}_3 + \underline{x}_1 \text{ --- } \underline{x}_4 \\ & \quad \underline{x}_3 \text{ --- } \underline{x}_4 \quad \underline{x}_2 \text{ --- } \underline{x}_4 \quad \underline{x}_2 \text{ --- } \underline{x}_3 \end{aligned}$$

– Ordre 1 en g

$$\begin{aligned} & -g \int d^4 \underline{x} \left(\frac{1}{12} (G_E(\underline{x}_1, \underline{x})G_E(\underline{x}_2, \underline{x})G_E(\underline{x}, \underline{x})G_E(\underline{x}_3, \underline{x}_4) + \dots (6 \text{ termes})) \right. \\ & \quad \left. + G_E(\underline{x}_1, \underline{x})G_E(\underline{x}_2, \underline{x})G_E(\underline{x}_3, \underline{x})G_E(\underline{x}_4, \underline{x}) \right) \quad (5.48) \end{aligned}$$

$$= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots (6 \text{ termes}) + \begin{array}{c} \underline{x}_1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \underline{x}_3 \end{array} \quad \underline{x}_2 \text{ --- } \underline{x}_4 .$$

Fonctions de Green connexes

On remarque que tous les termes de la fonctions de Green à quatre points, sauf le dernier, ont la forme de produits de termes de la fonction de Green à deux points. La propriété qui différencie le dernier terme des autres est que le diagramme correspondant est connexe, c'est-à-dire que deux points quelconques du diagramme sont reliés par un chemin continu. On définit la fonction de Green connexe à quatre points par

$$\begin{aligned} W_E^{(4)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) &= G_E^{(4)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) - G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)G_E^{(2)}(\underline{x}_3, \underline{x}_4) \\ & \quad - G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_3)G_E^{(2)}(\underline{x}_2, \underline{x}_4) - G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_4)G_E^{(2)}(\underline{x}_2, \underline{x}_3). \quad (5.49) \end{aligned}$$

On trouve, jusqu'à l'ordre g ,

$$\begin{aligned}
 W_E^{(4)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) &= \begin{array}{c} \underline{x}_1 \\ | \\ \underline{x}_2 \text{ --- } \underline{x}_4 \\ | \\ \underline{x}_3 \end{array} + O(g^2) \\
 &= -g \int d^4x G_E(\underline{x}_1, \underline{x}) G_E(\underline{x}_2, \underline{x}) G_E(\underline{x}_3, \underline{x}) G_E(\underline{x}_4, \underline{x}) + O(g^2). \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

Remarquons que l'expression (5.49) de la fonction de Green connexe peut encore s'écrire

$$W_E^{(4)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) = \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_2)} \right) \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_3)} \right) \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_4)} \right) \ln(Z[j]) \Big|_{j=0}. \quad (5.51)$$

De manière générale, la fonctionnelle

$$W_E[j] = \ln(Z_E[j]) \quad (5.52)$$

est appelée fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes. On notera

$$W_E^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_1)} \right) \cdots \left(\frac{-\delta}{\delta j(\underline{x}_n)} \right) W_E[j] \Big|_{j=0}. \quad (5.53)$$

Le développement perturbatif de la fonction de Green connexe $W_E^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ contient uniquement les diagrammes connexes du développement perturbatif de la fonction de Green $G_E^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$. Notons que l'on a la relation

$$W_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = G_E^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \quad (5.54)$$

On vient de voir comment calculer les fonctions de Green connexes $W_E^{(n)}$ à partir des fonctions de Green $G_E^{(n)}$. On peut faire l'inverse, c'est-à-dire reconstruire les fonctions de Green $G_E^{(n)}$ à partir des $W_E^{(n)}$. On considère toutes les partitions de l'ensemble des points $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n\}$. Soit

$$\{\underline{x}_{i_1}, \dots, \underline{x}_{i_{q_1}}\} \{\underline{x}_{j_1}, \dots, \underline{x}_{j_{q_2}}\} \cdots \{\underline{x}_{l_1}, \dots, \underline{x}_{l_{q_k}}\} \quad (5.55)$$

une telle partition. La fonction de Green $G_E^{(n)}$ s'écrit alors

$$G_E^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \sum_{\text{partitions}} W_E^{(q_1)}(\underline{x}_{i_1}, \dots, \underline{x}_{i_{q_1}}) \cdots W_E^{(q_k)}(\underline{x}_{l_1}, \dots, \underline{x}_{l_{q_k}}). \quad (5.56)$$

On va montrer que la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes satisfait une équation intégral-différentielle non linéaire. Afin de pouvoir interpréter ces équations, il est préférable de réintroduire pour un moment la constante de Planck \hbar . La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green s'écrit alors

$$Z_E[j] = N_E \int [d\varphi_E] e^{-\frac{1}{\hbar}(S_E[\varphi_E] + \int d^4 \underline{x} j(\underline{x}) \varphi_E(\underline{x}))}, \quad (5.57)$$

et on définit la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes par

$$W_E[j] = \hbar \ln(Z_E[j]). \quad (5.58)$$

On a déjà mentionné que l'intégrale de chemin est invariante par translation de la variable d'intégration. Si l'on considère une translation infinitésimale, on en déduit que l'intégrale fonctionnelle d'une dérivée est nulle, et par exemple

$$\begin{aligned} \int [d\varphi_E] \frac{\delta}{\delta \varphi_E(\underline{x})} e^{-\frac{1}{\hbar}(S_E[\varphi_E] + \int d^4 \underline{y} j(\underline{y}) \varphi_E(\underline{y}))} &= 0 \Leftrightarrow \\ \int [d\varphi_E] ((\Delta_4 - m^2) \varphi_E(\underline{x}) - \frac{g}{3!} (\varphi_E(\underline{x}))^3 - j(\underline{x})) e^{-\frac{1}{\hbar}(S_E[\varphi_E] + \int d^4 \underline{y} j(\underline{y}) \varphi_E(\underline{y}))} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\hbar(\Delta_4 - m^2) \frac{\delta}{\delta j(\underline{x})} - \frac{g}{3!} (-\hbar \frac{\delta}{\delta j(\underline{x})})^3 - j(\underline{x})) Z_E[j] &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

On se souvient que la distribution $G_E(\underline{x}, \underline{y})$ est une fonction de Green de l'opérateur $-(\Delta_4 - m^2)$. On peut donc réécrire l'équation précédente sous la forme

$$-\hbar \frac{\delta}{\delta j(\underline{x})} Z_E[j] = \int d^4 \underline{y} G_E(\underline{x}, \underline{y}) \left(-\frac{g}{3!} \left(-\hbar \frac{\delta}{\delta j(\underline{x})} \right)^3 - j(\underline{x}) \right) Z_E[j]. \quad (5.60)$$

On a l'habitude d'écrire cette équation sur la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes définie dans l'équation (5.58). On obtient l'équation non linéaire

$$\begin{aligned} -\frac{\delta W_E}{\delta j(\underline{x})} &= -\int d^4 \underline{y} G_E(\underline{x}, \underline{y}) j(\underline{x}) - \frac{g}{3!} \int d^4 \underline{y} G_E(\underline{x}, \underline{y}) \left(\left(-\frac{\delta W_E}{\delta j(\underline{x})} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. - 3\hbar \frac{\delta W_E}{\delta j(\underline{x})} \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x})} \right)^2 W_E + \left(-\hbar^2 \frac{\delta}{\delta j(\underline{x})} \right)^3 W_E \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Il est commode de donner une représentation graphique de ces équations. On va noter

$$-\frac{\delta W_E}{\delta j(\underline{x})} = \underline{x} \text{---} \bullet, \quad j(\underline{x}) = \times$$

$$\left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_1)}\right) \left(-\frac{\delta}{\delta j(\underline{x}_2)}\right) W_E = \underline{x}_1 \text{---} \bullet \text{---} \underline{x}_2, \quad (5.62)$$

et pour chaque dérivée supplémentaire de W_E , on ajoute une patte. L'équation précédente s'écrit alors, sans s'inquiéter des facteurs numériques

$$\text{---} \bullet = \text{---} \times + \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{---} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \hbar \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \text{---} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} + \hbar^2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \quad (5.63)$$

Plaçons-nous d'abord dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. Dans l'équation précédente, seuls survivent les deux premiers termes du membre de droite. L'équation obtenue est identique à celle qui détermine la solution des équations du mouvement classique en présence d'une source. La raison en est très simple : dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, on ne garde dans l'intégrale de chemin (5.57) que la configuration $\varphi_c(\underline{x})$ solution des équations du mouvement classiques

$$\varphi_c(\underline{x}) : \quad \frac{\delta}{\delta \varphi_E(\underline{x})} \left(S_E[\varphi_E] + \int d^4 \underline{x} j(\underline{x}) \varphi_E(\underline{x}) \right) \Big|_{\varphi_E = \varphi_c} = 0. \quad (5.64)$$

La solution de cette équation est unique. C'est une fonctionnelle de la source $j(\underline{x})$, qui s'annule lorsque la source est nulle. Dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green s'écrit

$$Z_E[j] = e^{-\frac{1}{\hbar}(S_E[\varphi_c] + \int d^4 \underline{x} j(\underline{x}) \varphi_c(\underline{x}))} \Rightarrow W_E[j] = S_E[\varphi_c] + \int d^4 \underline{x} j(\underline{x}) \varphi_c(\underline{x}). \quad (5.65)$$

En dérivant la dernière équation par rapport à la source, on obtient

$$-\frac{\delta W_E}{\delta j(\underline{x})} = \varphi_c(\underline{x}). \quad (5.66)$$

Dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, le membre de gauche de l'équation (5.63) s'identifie donc au champ classique solution des équations du mouvement. En étudiant les termes successifs du développement en puissances de la source de l'équation dans cette limite, on retrouve les graphes en arbre étudié à la fin du

premier chapitre. Les deux derniers termes de l'équation (5.63) contiennent les corrections quantiques à l'équation classique. Le terme proportionnel à \hbar contient une ligne qui se referme sur elle-même, c'est-à-dire une boucle, et le terme proportionnel à \hbar^2 contient deux lignes qui se referment sur elles-mêmes, c'est-à-dire deux boucles. De manière générale, cette équation permet de conclure qu'un diagramme de Feynman qui contient L boucles est d'ordre \hbar^L .

5.4 Fonctions de Green propres

Remarquons que dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, les fonctionnelles $W_E[j]$ et $-S_E[\varphi_E]$ sont reliées par une transformation de Legendre. On peut remarquer également que l'action $S_E[\varphi_E]$ est une fonctionnelle beaucoup plus simple que la fonctionnelle $W_E[j]$. En effet, l'action est une fonctionnelle locale, c'est-à-dire l'intégrale d'une densité qui est un polynôme de degré 4 dans le champ et ses dérivées. La fonctionnelle $W_E[j]$, même pour un champ libre, est une fonctionnelle non locale qui contient toutes les puissances de la source. On peut alors se demander si, dans la théorie quantique, on ne gagnerait pas en simplicité en considérant la même transformation de Legendre. De manière générale, on définit le champ classique par

$$\phi(\underline{x}) = -\frac{\delta W_E}{\delta j(\underline{x})}. \quad (5.67)$$

Le passage de $j(x)$ à $\phi(x)$ est un changement de variable fonctionnel. On admettra que ce changement de variable est inversible, et que les origines coïncident

$$j(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \phi(\underline{x}) = 0. \quad (5.68)$$

On définit alors une fonctionnelle du champ classique par

$$\Gamma_E[\phi] = -W_E[j] - \int d^4\underline{x} j(\underline{x}) \phi(\underline{x}). \quad (5.69)$$

La relation inverse de (5.67), qui exprime la source en fonction du champ classique, s'écrit

$$\frac{\delta \Gamma_E}{\delta \phi(\underline{x})} = -j(\underline{x}). \quad (5.70)$$

Par construction, à l'ordre le plus bas en puissances de \hbar , la fonctionnelle $\Gamma_E[\phi]$ s'identifie à l'action $S_E[\phi]$. Les distributions

$$\Gamma_E^{(n)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) = \frac{\delta}{\delta\phi(\underline{x}_1)} \frac{\delta}{\delta\phi(\underline{x}_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi(\underline{x}_n)} \Gamma_E[\phi] \Big|_{\phi=0} \quad (5.71)$$

sont appelées fonctions de Green propres. On va maintenant établir les règles de calcul du développement perturbatif des fonctions de Green propres. Étudions le cas de la fonction à deux points

$$\Gamma_E^{(2)}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\delta}{\delta\phi(\underline{x})} \frac{\delta}{\delta\phi(\underline{y})} \Gamma_E[\phi] \Big|_{\phi=0} \quad (5.72)$$

Par définition, c'est une distribution symétrique dans les variables \underline{x} et \underline{y} . Pour la calculer, on va considérer la dérivée par rapport à $j(\underline{y})$ de l'équation (5.70). En utilisant les règles de dérivation composée, on obtient

$$\int d^4 \underline{z} \frac{\delta\phi(\underline{z})}{\delta j(\underline{y})} \frac{\delta}{\delta\phi(\underline{z})} \frac{\delta}{\delta\phi(\underline{x})} \Gamma_E[\phi] = -\delta^4(\underline{x} - \underline{y}), \quad (5.73)$$

ou, en utilisant l'équation (5.67),

$$\int d^4 \underline{z} \frac{\delta^2 W_E}{\delta j(\underline{y}) \delta j(\underline{z})} \frac{\delta^2 \Gamma_E}{\delta\phi(\underline{z}) \delta\phi(\underline{x})} = \delta^4(\underline{x} - \underline{y}). \quad (5.74)$$

Cette équation est valable même lorsque le champ, et donc la source, sont non nuls. Lorsqu'on se restreint à $\phi(\underline{x}) = 0$, $j(\underline{x}) = 0$, elle nous dit que les distributions $W_E^{(2)}$ et $\Gamma_E^{(2)}$ sont inverses l'une de l'autre

$$\int d^4 \underline{z} W_E^{(2)}(\underline{y}, \underline{z}) \Gamma_E^{(2)}(\underline{z}, \underline{x}) = \delta^4(\underline{x} - \underline{y}). \quad (5.75)$$

On va étudier les conséquences de cette équation sur le développement perturbatif de ces distributions. On note le développement jusqu'à l'ordre 2 en g par

$$\begin{aligned} W_E^{(2)}(\underline{y}, \underline{z}) &= G_E^{(2)}(\underline{y}, \underline{z}) = G_E(\underline{y}, \underline{z}) + G^1(\underline{y}, \underline{z}) + G^2(\underline{y}, \underline{z}) + O(g^3), \\ \Gamma_E^{(2)}(\underline{z}, \underline{x}) &= \Gamma^0(\underline{z}, \underline{x}) + \Gamma^1(\underline{z}, \underline{x}) + \Gamma^2(\underline{z}, \underline{x}) + O(g^3) \end{aligned} \quad (5.76)$$

L'équation (5.75) conduit alors, en séparant les différents ordres dans la constante de couplage, aux équations

$$\begin{aligned} \int d^4 \underline{z} G_E(\underline{y}, \underline{z}) \Gamma^0(\underline{z}, \underline{x}) &= \delta^4(\underline{x} - \underline{y}), \\ \int d^4 \underline{z} (G_E(\underline{y}, \underline{z}) \Gamma^1(\underline{z}, \underline{x}) + G^1(\underline{y}, \underline{z}) \Gamma^0(\underline{z}, \underline{x})) &= 0, \\ \int d^4 \underline{z} (G_E(\underline{y}, \underline{z}) \Gamma^2(\underline{z}, \underline{x}) + G^1(\underline{y}, \underline{z}) \Gamma^1(\underline{z}, \underline{x}) + G^2(\underline{y}, \underline{z}) \Gamma^0(\underline{z}, \underline{x})) &= 0. \end{aligned} \quad (5.77)$$

La première de ces équations est très naturelle : elle nous dit qu'à l'ordre le plus bas dans la constante de couplage, qui est aussi l'ordre le plus bas dans la constante de Planck, la fonction de Green propre à deux points est l'inverse de la fonction de Green libre à deux points, c'est-à-dire

$$\Gamma^0(\underline{x}, \underline{y}) = (-\Delta_4 + m^2) \delta^4(\underline{x} - \underline{y}) = \frac{\delta}{\delta \phi_E(\underline{x})} \frac{\delta}{\delta \phi_E(\underline{y})} S_E[\phi] \Big|_{\phi=0}. \quad (5.78)$$

On peut utiliser la première des équations (5.77) pour réécrire les deux autres sous la forme

$$\begin{aligned} \Gamma^1(\underline{x}, \underline{y}) &= - \int d^4 t d^4 u \Gamma^0(\underline{x}, \underline{t}) G^1(\underline{t}, \underline{u}) \Gamma^0(\underline{u}, \underline{y}), \\ \Gamma^2(\underline{x}, \underline{y}) &= - \int d^4 t d^4 u \Gamma^0(\underline{x}, \underline{t}) G^2(\underline{t}, \underline{u}) \Gamma^0(\underline{u}, \underline{y}) \\ &\quad + \int d^4 t d^4 u d^4 v d^4 w \Gamma^0(\underline{x}, \underline{t}) G^1(\underline{t}, \underline{u}) \Gamma^0(\underline{u}, \underline{v}) G^1(\underline{v}, \underline{w}) \Gamma^0(\underline{w}, \underline{y}). \end{aligned} \quad (5.79)$$

On utilise alors les équations (5.44) et (5.46) pour écrire

$$\begin{aligned} \Gamma^1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= -\frac{g}{2} \int d^4 \underline{x} \delta^4(\underline{x}_1 - \underline{x}) \delta^4(\underline{x}_2 - \underline{x}) G_E(\underline{x}, \underline{x}) \\ \Gamma^2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= g^2 \int d^4 \underline{x} d^4 \underline{y} \left(\frac{1}{6} \delta^4(\underline{x}_1 - \underline{x}) \delta^4(\underline{x}_2 - \underline{y}) (G_E(\underline{x}, \underline{y}))^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \delta^4(\underline{x}_1 - \underline{x}) \delta^4(\underline{x}_2 - \underline{x}) (G_E(\underline{x}, \underline{y}))^2 G_E(\underline{y}, \underline{y}) \right) \end{aligned}$$

On va représenter ces expressions par des diagrammes du même type que ceux utilisés pour les fonctions de Green connexes. On doit cependant modifier les

calculer le développement perturbatif des fonctions de Green propres, qui contiennent toutes les boucles, la reconstruction des fonctions de Green connexes par des diagrammes en arbre se fait sans difficulté. On se propose donc pour but le calcul du développement perturbatif des fonctions de Green propres.

5.5 Règles de Feynman

Pour calculer à l'ordre p dans la constante de couplage g les fonctions de Green à n points connexes $W_E^{(n)}$ ou propres $\Gamma_E^{(n)}$, on est donc conduit à construire tous les diagrammes (connexes pour $W_E^{(n)}$, 1PI pour $\Gamma_E^{(n)}$) ayant n lignes externes et p vertex à quatre pattes. Une fois le diagramme dessiné, on calcule sa contribution à l'aide des règles suivantes dans l'espace euclidien

– Vertex : $\begin{array}{c} | \\ \hline \underline{x} \\ | \end{array} = -g \int d^4 \underline{x},$

– Ligne interne : $\underline{x} \text{ ————— } \underline{y} = G_E(\underline{x}, \underline{y})$

On rappelle qu'une ligne interne est une ligne du diagramme qui va d'un vertex à un vertex

– Ligne externe : $\underline{x}_i \text{ ————— } \underline{x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Connexe : } = G_E(\underline{x}_i, \underline{x}) \\ \text{Propre : } = \delta^4(\underline{x}_i - \underline{x}) \end{array} \right.$

On rappelle qu'une ligne externe est une ligne du diagramme dont une des extrémités est un point de la fonction de Green.

– Facteur de symétrie N : chaque diagramme est affecté d'un facteur $\frac{1}{N}$, où N est un entier que l'on calcule de la manière suivante. On commence par immobiliser les vertex qui portent au moins une ligne externe. On considère alors les lignes et vertex internes comme mobiles.

N est le nombre de mouvements des lignes et vertex internes qui laissent le diagramme inchangé. Par exemple, le facteur de symétrie du graphe



de la fonction de Green à quatre points est $N = 4$, les mouvements correspondants sont l'identité, l'échange des deux lignes internes verticales, l'échange des deux vertex internes haut et bas, et finalement les deux à la fois. Par contre, le diagramme de la fonction

de Green à 6 points  malgré son allure très symétrique, a un

facteur de symétrie $N = 1$. Notons enfin qu'à une ligne qui se referme sur elle-même  est associé un facteur de symétrie $N = 2$.

– Enfin, avec nos définitions, tout diagramme d'une fonction de Green propre est affecté d'un facteur global -1 .

En fait, on utilise généralement les règles de Feynman non pas dans l'espace des positions, mais dans l'espace des impulsions. On définit les transformées de Fourier des fonctions de Green connexes et propres par

$$W_E^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-i p_i x_i} \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n \underline{p}_i \right) W_E^{(n)}(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n),$$

$$\Gamma_E^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-i p_i x_i} \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n \underline{p}_i \right) \Gamma_E^{(n)}(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n).$$

Le développement perturbatif dans l'espace des impulsions comporte bien sûr les mêmes diagrammes que dans l'espace des positions, mais il faut modifier les règles de calcul. En particulier, si dans l'espace des positions une ligne joint un point à un autre, dans l'espace des impulsions une ligne est parcourue par une quadri-impulsion $\underline{p} \rightarrow$. Les règles de Feynman deviennent alors

$$\text{-- Vertex : } \quad \underline{p}_1 \rightarrow \begin{array}{c} \downarrow \underline{p}_2 \\ | \\ \leftarrow \underline{p}_3 \\ | \\ \underline{p}_4 \uparrow \end{array} \quad = -g,$$

Il faut assurer la conservation de l'impulsion à chaque vertex

$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_3 + \underline{p}_4 = 0.$$

- Ligne interne : $\underline{p} \rightarrow$ $= \frac{1}{p^2 + m^2}$
- Ligne externe : $\underline{p}_i \rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Connexe : } = \frac{1}{p_i^2 + m^2} \\ \text{Propre : } = 1 \end{array} \right.$
- Facteur de symétrie N : la règle est la même que dans l'espace des positions
- Tout diagramme d'une fonction de Green propre est affecté d'un facteur global -1 .
- Enfin, on doit intégrer $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ sur les impulsions des lignes internes qui ne sont pas déterminées par les règles de conservation. Il y en a autant que de boucles du diagramme.

On se propose maintenant d'étudier les règles de Feynman dans l'espace de Minkowski. Pour changer un peu, on va considérer un modèle différent de

celui étudié jusqu'à présent.

Un modèle jouet

Le modèle que l'on va étudier comprend un champ scalaire complexe $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ et un champ scalaire réel $\Pi(x)$. On appelle D la dimension de l'espace-temps, que l'on garde pour l'instant comme un paramètre libre. L'action classique s'écrit

$$S[\varphi, \bar{\varphi}, \Pi] = \int d^D x [\partial^\mu \bar{\varphi} \partial_\mu \varphi - m^2 \bar{\varphi} \varphi + \frac{1}{2} (\partial^\mu \Pi \partial_\mu \Pi - \mu^2 \Pi^2) - g \bar{\varphi} \varphi \Pi]. \quad (5.82)$$

Ce modèle est invariant sous les transformations de Poincaré, et possède également une symétrie interne abélienne

$$\varphi \longrightarrow e^{i\alpha} \varphi, \quad \bar{\varphi} \longrightarrow e^{-i\alpha} \bar{\varphi}. \quad (5.83)$$

Le courant et la charge de Noether associés à cette symétrie s'écrivent

$$j_\mu = i[\bar{\varphi} \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \bar{\varphi}], \quad Q = \int d^{D-1} x j_0(x). \quad (5.84)$$

Dans la théorie quantique libre, les opérateurs de champ $\varphi(x)$, $\varphi^\dagger(x)$ contiennent les opérateurs de création et d'annihilation de deux particules distinctes, sans spin, de masse m et de charge ± 1 . Le champ $\Pi(x)$ contient les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule sans spin de masse μ . Lorsque $g \neq 0$, ces particules interagissent. On interprétera ce modèle comme une version simplifiée de l'électromagnétisme, dans lequel un "électron scalaire" et un "positron scalaire" interagissent par l'échange d'un ou plusieurs "photons scalaires". La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green s'écrit

$$\begin{aligned} Z[j, \bar{j}, k] &= \langle 0 | T e^{i \int d^D x (\bar{j}(x) \varphi(x) + j(x) \varphi^\dagger(x) + k(x) \Pi(x))} | 0 \rangle \\ &= N \int [d\varphi d\bar{\varphi} d\Pi] e^{iS[\varphi, \bar{\varphi}, \Pi] + i \int d^D x (\bar{j}(x) \varphi(x) + j(x) \bar{\varphi}(x) + k(x) \Pi(x))}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

On calcule facilement cette fonctionnelle dans le cas de la théorie libre

$$Z[j, \bar{j}, k] = e^{-\int d^D x d^D y (\bar{j}(x) G_F(x, y; m) j(y) + \frac{1}{2} k(x) G_F(x, y; \mu) k(y))} \quad (5.86)$$

où $G_F(x, y; \mu)$ est la fonction de Green de Feynman calculée pour une masse μ . On note les fonctions de Green à $2p + q$ points par

$$\begin{aligned} G^{(2p, q)}(x_1, \dots, x_{2p+q}) &= \langle 0 | T (\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_p) \varphi^\dagger(x_{p+1}) \cdots \varphi^\dagger(x_{2p}) \times \\ &\times \Pi(x_{2p+1}) \cdots \Pi(x_{2p+q})) | 0 \rangle = \frac{-i\delta}{\delta \bar{j}(x_1)} \cdots \frac{-i\delta}{\delta \bar{j}(x_p)} \frac{-i\delta}{\delta j(x_{p+1})} \cdots \frac{-i\delta}{\delta j(x_{2p})} \times \\ &\times \frac{-i\delta}{\delta k(x_{2p+1})} \cdots \frac{-i\delta}{\delta k(x_{2p+q})} Z[j, \bar{j}, k] \Big|_{j=\bar{j}=k=0}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Dans cette formule, on a tenu compte du fait que l'invariance abélienne (5.83) impose que les seules fonctions de Green non nulles sont celles qui contiennent le même nombre d'opérateurs φ et d'opérateurs φ^\dagger . On définit la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes par

$$W[j, \bar{j}, k] = \ln(Z[j, \bar{j}, k]), \quad (5.88)$$

et la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green propres par

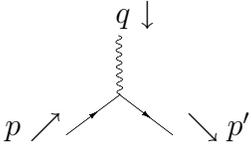
$$\begin{aligned} \varphi_c(x) &= -i \frac{\delta}{\delta \bar{j}(x)} Z, \quad \bar{\varphi}_c(x) = -i \frac{\delta}{\delta j(x)} Z, \quad \Pi_c(x) = -i \frac{\delta}{\delta k(x)} Z, \\ \Gamma[\varphi_c, \bar{\varphi}_c, \Pi_c] &= -i W[j, \bar{j}, k] - \int d^D x (\bar{j}(x) \varphi_c(x) + j(x) \bar{\varphi}_c(x) + k(x) \Pi_c(x)). \end{aligned}$$

Elle coïncide avec l'action classique lorsque \hbar tend vers 0. Les règles de Feynman permettant le calcul perturbatif des fonctions de Green propres s'écrivent dans l'espace des impulsions

– Lignes internes

– ligne “électron-positron” \xrightarrow{p} $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$,

– ligne “photon” \xrightarrow{q} $= \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$,

– Vertex  $= -ig$,

Règle de conservation $p + q = p'$,

– Intégration sur les impulsions internes non déterminées par les règles de conservation

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}.$$

Les lignes externes des fonctions de Green propres portent un facteur unité. Le facteur de symétrie est calculé par la règle déjà donnée, mais les diagrammes construits avec les règles précédentes ont toujours un facteur de symétrie égal à 1. Il faut enfin tenir compte d'un facteur global $-i$ pour les diagrammes des fonctions de Green propres. Les fonctions de Green permettent de déterminer les amplitudes de transition. Considérons par exemple la diffusion élastique “électron-positron”

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_3 +, \vec{p}_4 - \text{out} | \vec{p}_1 +, \vec{p}_2 - \text{in} \rangle = \\ (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) i \mathcal{M}(p_1 +, p_2 - \rightarrow p_3 +, p_4 -). \end{aligned} \quad (5.89)$$

On suppose que les impulsions sont non exceptionnelles, ce qui signifie ici $p_1 \neq p_3 \Leftrightarrow p_2 \neq p_4$. On a alors

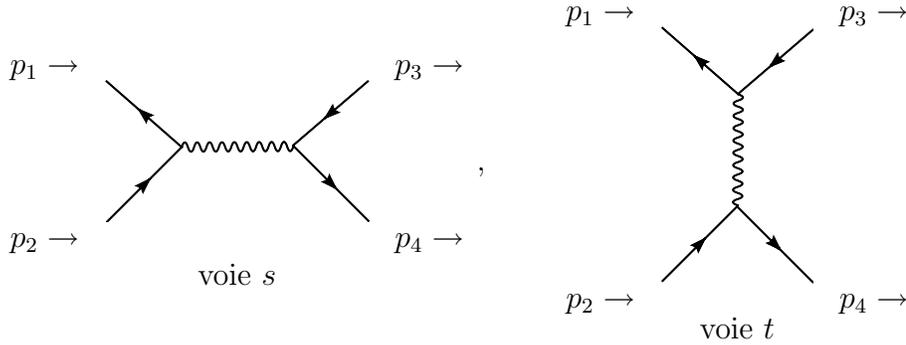
$$i\mathcal{M}(p_1 +, p_2 - \rightarrow p_3 +, p_4 -) = Z_\varphi^{-1} Z_\Pi^{-1} G_A^{(4,0)}(p_3, -p_1, p_4, -p_2), \quad (5.90)$$

où les constantes iZ_φ et iZ_Π sont les résidus au pôle en p^2 des fonctions de Green à deux points $G^{(2,0)}(p)$ et $G^{(0,2)}(p)$. La fonction de Green amputée à quatre points s'écrit

$$G_A^{(4,0)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-i)^4 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)(p_3^2 - m^2) \times \\ \times (p_4^2 - m^2) W^{(4,0)}(p_1, p_2, p_3, p_4). \quad (5.91)$$

où on a utilisé le fait que, pour des impulsions non exceptionnelles, les fonctions de Green coïncident avec les fonctions de Green connexes.

À l'ordre le plus bas dans la constante de couplage, la fonction de Green connexe $W^{(4,0)}$ est donnée par les diagrammes



On définit les variables de Mandelstam s , t et u par

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2. \quad (5.92)$$

Les appellations “voie s ” et “voie t ” font référence au carré de l'impulsion du photon scalaire échangé, qui vaut s dans le premier cas, et t dans le second. On obtient alors l'expression de la fonction de Green amputée

$$G_A^{(4,0)}(p_3, -p_1, p_4, -p_2) = (-ig)^2 \left(\frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} + \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} \right) \\ + O(g^4). \quad (5.93)$$

À l'ordre le plus bas dans la constante de couplage, les champs en interaction coïncident avec les champs libres, et l'on a donc

$$Z_\varphi = 1 + O(g^2), \quad Z_\Pi = 1 + O(g^2). \quad (5.94)$$

On obtient donc, à l'ordre le plus bas dans la constante de couplage

$$\mathcal{M}(p_1 +, p_2 - \rightarrow p_3 +, p_4 -) = -g^2 \left(\frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} \right). \quad (5.95)$$

Limite non relativiste

On se restreint à un espace-temps de dimension $D = 4$. On suppose que l'électron et le positron scalaire qui diffusent l'un sur l'autre sont non relativistes avant et après interaction, c'est-à-dire

$$\vec{p}_i^2 \ll m^2, \quad i = 1 \dots 4. \quad (5.96)$$

Il est alors possible de décrire ce système en utilisant un Hamiltonien non relativiste à deux corps

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (5.97)$$

où $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ est un potentiel à deux corps que l'on souhaite déterminer. On se rappelle qu'en théorie de la diffusion non relativiste dans l'approximation de Born, l'amplitude de transition est donnée par

$$i\mathcal{M}(\vec{p}_1 +, \vec{p}_2 - \rightarrow \vec{p}_3 +, \vec{p}_4 -) = -iV(\vec{q}), \quad (5.98)$$

où $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3 = -(\vec{p}_2 - \vec{p}_4)$ est la variation de l'impulsion du positron scalaire, et $V(\vec{q})$ est la transformée de Fourier du potentiel à deux corps

$$V(\vec{q}) = \int d^3x e^{-i\vec{q}\vec{r}} V(\vec{r}). \quad (5.99)$$

On doit alors comparer les expressions (5.95) et (5.98) lorsque toutes les impulsions externes sont non relativistes

$$p_i \simeq \left(m + \frac{\vec{p}_i^2}{2m}, \vec{p}_i \right), \quad \vec{p}_i^2 \ll m^2, \quad i = 1 \dots 4 \quad (5.100)$$

Dans la voie s , la quadri-impulsion du photon scalaire est donnée par

$$Q = p_1 + p_2 = \left(2m + \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m}, \vec{p}_1 + \vec{p}_2\right), \quad Q^2 \simeq 4m^2 + (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2, \quad (5.101)$$

alors que dans la voie t

$$q = p_1 - p_3 = \left(\frac{\vec{p}_1^2 - \vec{p}_3^2}{2m}, \vec{p}_1 - \vec{p}_3\right), \quad q^2 \simeq -\vec{q}^2 = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2. \quad (5.102)$$

On a donc

$$|q^2| \ll Q^2. \quad (5.103)$$

On peut négliger dans l'expression (5.95) la contribution de la voie s par rapport à celle de la voie t . En d'autres termes, le processus d'annihilation positron-antipositron n'est pas présent dans la limite non relativiste. On obtient alors l'expression suivante pour la transformée de Fourier du potentiel à deux corps

$$V(\vec{q}) = g^2 \frac{1}{-\vec{q}^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (5.104)$$

la petite quantité ϵ ne joue aucun rôle dans la suite, et peut être oubliée. On obtient alors le potentiel à deux corps

$$V(\vec{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r}} V(\vec{q}) = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{g^2}{\vec{q}^2 + \mu^2}. \quad (5.105)$$

On fait le choix d'un référentiel tel que $\vec{r} = (0, 0, r)$, et on utilise des coordonnées sphériques pour \vec{q}

$$\vec{q} = (q \cos \varphi \sin \theta, q \sin \varphi \sin \theta, q \cos \theta). \quad (5.106)$$

On obtient alors

$$V(\vec{r}) = -g^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq d\theta q^2 \sin \theta \frac{e^{iqr \cos \theta}}{q^2 + \mu^2}. \quad (5.107)$$

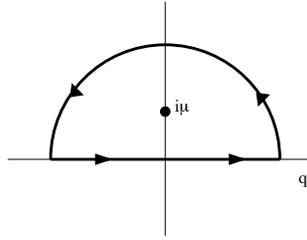
En faisant le changement de variable $u = \cos \theta$, l'équation précédente s'écrit

$$V(\vec{r}) = -g^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 du q^2 \frac{e^{iqr u}}{q^2 + \mu^2}. \quad (5.108)$$

Après intégration sur u , on obtient

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= \frac{ig^2}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dq q (e^{iqr} - e^{-iqr}) \frac{1}{q^2 + \mu^2} \\
 &= \frac{ig^2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + \mu^2}.
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

que l'on calcule en utilisant le contour suivant dans le plan complexe pour q



On obtient finalement l'expression du potentiel à deux corps

$$V(\vec{r}) = -\frac{g^2 e^{-\mu r}}{4\pi r}. \tag{5.110}$$

Le potentiel obtenu est appelé potentiel de Yukawa de portée μ^{-1} . Dans la limite $\mu \rightarrow 0$ (portée infinie) on obtient un potentiel coulombien. Remarquons finalement que ce potentiel est attractif.