Introduction aux Groupes de Lie destinée aux physiciens

F. Delduc, Laboratoire de physique de l'ENS Lyon

Septembre 2008

1 Généralités

1.1 Groupes et sous-groupes

Un ensemble G est muni d'une structure de groupe (est un groupe) si il existe une loi de composition interne associative (un produit) :

$$G \times G \to G, \qquad (g_1, g_2) \to g_1 g_2, \tag{1}$$

telle qu'il existe un élément neutre que l'on notera e et que tout élément g de G possède un inverse que l'on notera g^{-1}.

Un sous-ensemble H de G est un sous-groupe si le produit de deux éléments de H est un élément de H, et l'inverse de tout élément de H est un élément de H.

Un sous-groupe H de G est appelé distingué ou normal si pour tout élément h de H, et pour tout élément g de G, le produit ghg^{-1} est un élément de H. Un groupe dont les seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et G lui-même est appelé un groupe simple.

Un groupe G est dit commutatif ou abélien si pour toute paire (g_1, g_2) d'éléments de G, $g_1 g_2 = g_2 g_1$. On appelle centre Z d'un groupe G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G :

$$Z = \{z \in G \,/\, \forall g \in G,\, gz = zg\}. \tag{2}$$

Z est un sous-groupe commutatif distingué de G.

1.2 Homomorphismes

On considère deux groupes G et G', et une application f de G dans G'. On dit que f est un homomorphisme pour la structure de groupe si

$$\forall (g_1, g_2) \in G \times G, \qquad f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2). \tag{3}$$

Si f est un homomorphisme, il possède les propriétés suivantes

- $f(e)$ est l'élément neutre de G'
- $f(g^{-1})$ est l'inverse dans G' de $f(g)$
- l'image par f d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G'
- l'image inverse par f d'un sous-groupe distingué de G' est un sous-groupe distingué de G

On appelle noyau de f, et on note $\ker f$, le sous-ensemble de G constitué des antécédents par f de l'élément neutre de G'. $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G.

Si f est bijectif, on l'appelle un isomorphisme et $\ker f = \{e\}$. Un isomorphisme de G dans G est appelé un automorphisme.

1.3 Action d'un groupe sur un ensemble

Soit X un ensemble, et $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble des bijections de X dans X. $\mathcal{S}(X)$ possède une structure de groupe dont le produit est la composition des applications. On appelle action du groupe G sur l'ensemble X un morphisme de G dans $\mathcal{S}(X)$ qui à tout élément $g \in G$ associe une bijection $f_g \in \mathcal{S}(X)$ de telle manière que

$$f_{g_1} \circ f_{g_2} = f_{g_1 g_2}. \tag{4}$$

L'action du groupe G sur l'ensemble X est appelée transitive si :

$$\forall (x, y) \in X \times X, \quad \exists g \in G \quad / \quad y = f_g(x). \tag{5}$$

Notons T_3 le groupe des translations à 3 dimensions. Ce groupe agit transitivement sur $\mathbb{R}^3$. Notons $SO(3)$ le groupe des rotations à 3 dimensions. Ce groupe n'agit pas transitivement sur $\mathbb{R}^3$, mais agit transitivenent sur la sphère S^2.

On appelle stabilisateur (ou petit groupe) d'un point x de X le sous-groupe H_x de G tel que :

$$h \in H_x \Leftrightarrow f_h(x) = x. \tag{6}$$

Exemple

On peut définir deux actions du groupe G sur lui-même, que l'on appelle respectivement action à gauche :

$$L_g : G \to G, \quad x \in G \to L_g(x) = gx, \tag{7}$$

et action à droite

$$R_g : G \to G, \quad x \in G \to R_g(x) = xg. \tag{8}$$

A chaque élément $g \in G$ sont donc associées deux bijections L_g et R_g de G dans G de telle manière que

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2}, \quad R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2 g_1}. \tag{9}$$

1.4 Représentation des groupes

1.4.1 Définitions

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des applications linéaires inversibles de X dans X. Un morphisme de G dans $\mathcal{E}(X)$ qui à tout élément $g \in G$ associe une application linéaire inversible $T(g) \in \mathcal{E}(X)$ est appelé une représentation linéaire du groupe G. Si X est de dimension n finie, par le choix d'une base on peut identifier $\mathcal{E}(X)$ et l'ensemble $GL(n, \mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ inversibles dont les éléments sont dans $\mathbb{K}$. $GL(n, \mathbb{K})$ est un groupe pour le produit des matrices, que l'on appelle le groupe linéaire. Une représentation linéaire de dimension n d'un groupe G est donc un morphisme de G dans $GL(n, \mathbb{K})$. X est appelé l'espace de représentation.

Soient X et Y deux espaces vectoriels, T une représentation du groupe G dans X et S une représentation du groupe G dans Y. On dit que T et S sont des représentations équivalentes si il existe une application linéaire bijective E de X dans Y telle que, pour tout $g \in G$, $S(g)E = ET(g)$.

1.4.2 Représentations irréductibles

Un sous-espace Y de X est appelé invariant par rapport à la représentation T si

$$\forall g \in G, \quad \forall y \in Y, \quad T(g)y \in Y. \tag{10}$$

Une représentation Y qui ne possède comme sous-espace invariant que l'espace $\{0\}$ constitué du vecteur nul et X lui-même est appelée une représentation irréductible.

La proposition suivante est appelée le lemme de Schur. Soit T une représentation irréductible du groupe G dans l'espace vectoriel complexe de dimension finie X. Si pour tout $g \in G$, l'application linéaire L commute avec $T(g)$, $(LT(g) = T(g)L)$, alors L est proportionnelle à l'application identique, $L = \lambda \mathbf{1},\ \lambda \in \mathbb{C}$. La démonstration utilise le fait qu'une application linéaire d'un espace vectoriel complexe de dimension finie possède au moins une valeur propre. Soit λ une valeur propre de L, et X_λ le sous-espace de X défini par

$$X_\lambda = \{x \in X \quad / \quad Lx = \lambda x\}. \tag{11}$$

L'espace X_λ est au moins de dimension 1. Soit g un élément de G, x un élément de X_λ. Alors $LT(g)x = T(g)Lx = \lambda T(g)x$, d'où l'on déduit $T(g)x \in X_\lambda$. X_λ est donc un sous-espace invariant, et puisque T est irréductible, $X_\lambda = X$ et $L = \lambda \mathbf{1}$.

Exercice

Montrer, à l'aide du lemme du Schur, qu'une représentation irréductible de dimension finie du groupe $U(1) = \{e^{i\theta},\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$ est unidimensionnelle et caractérisée par un entier relatif. En physique, cet entier est la charge éléctrique (en unité de charge du proton).

1.4.3 Somme et produit de représentations

Soient T_1 et T_2 deux représentations du groupe G dans les espaces vectoriels X_1 et X_2. On appelle somme directe de T_1 et T_2 la représentation T de G dans l'espace vectoriel $X_1 \oplus X_2$ définie par

$$\begin{aligned} x \in X_1 \oplus X_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2, \\ T(g)x = T_1(g)x_1 + T_2(g)x_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Si X_1 et X_2 sont de dimension finie, la matrice associée à la transformation linéaire $T(g)$ est diagonale par bloc

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

La représentation somme n'est pas irréductible. Elle contient deux sous-espaces invariants, isomorphes à X_1 et X_2. Si une représentation T de G dans X peut être décomposée en somme directe de représentations irréductibles, T est dite complètement réductible.

Soient T_1 et T_2 deux représentations du groupe G dans les espaces vectoriels de dimension finie X_1 et X_2. On appelle produit direct de T_1 et T_2 la représentation T de G dans l'espace vectoriel $X_1 \otimes X_2$ définie par

$$x = x_1 \otimes x_2 \in X_1 \otimes X_2, \quad T(g)x = (T_1(g)x_1) \otimes (T_2(g)x_2), \tag{14}$$

et $T(g)$ est étendu à tout $X_1 \otimes X_2$ par linéarité.

1.4.4 Représentations unitaires

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et $< | >$ une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur X (un produit scalaire)

$$< x|y >= \overline{< y|x >}, \quad x \neq 0 \Rightarrow < x|x > > 0. \tag{15}$$

La représentation T du groupe G dans X est appelée unitaire si

$$\forall g \in G, \ < T(g)x|T(g)y >=< x|y > \Leftrightarrow T(g)^\dagger = T(g)^{-1}. \tag{16}$$

On admettra (*Naïmark et Stern*) que si une représentation de dimension finie d'un groupe G est équivalente à une représentation unitaire, alors elle est complètement réductible.

2 Exemples de groupes

On va maintenant décrire quelques exemples de groupes qui jouent un rôle important en physique. Ces exemples font tous partie d'une classe de groupes que l'on appelle "groupes de Lie". On ne donnera pas ici la définition précise d'un groupe de Lie, notons simplement que tous ces groupes sont décrits par des paramètres continus. Le nombre de paramètres nécessaires et suffisants pour décrire un groupe de Lie particulier est appelé la dimension de ce groupe. On notera $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ réelles ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou complexes. ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

2.1 Groupe orthogonal

Le groupe orthogonal dans un espace réel à n dimensions est noté $O(n)$. Il est défini comme l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ qui laissent invariantes le produit scalaire euclidien. On peut le voir comme l'ensemble des matrices réelles $n \times n$ orthogonales

$$O \in O(n) \ \Leftrightarrow \ O \in M_n(\mathbb{R}), \ O^t O = \mathbf{1}_n. \tag{17}$$

La définition (17) implique que le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1. Le sous-groupe du groupe orthogonal formé des matrices de déterminant 1 est le groupe des rotations noté $SO(n)$. En particulier, le groupe $SO(3)$ est le groupe des rotations dans l'espace tridimensionnel. Une paramétrisation de ce groupe est donnée par les angles d'Euler (α, β, γ). Soit $(Oxyz)$ un trièdre orthonormé direct. On note $R_z(\theta)$ $(R_y(\theta))$ une rotation d'un angle θ autour de l'axe Oz (Oy). Pour toute rotation $R \in SO(3)$, il est possible de trouver trois angles α, β et γ tels que

$$R = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma). \tag{18}$$

Les angles α et γ sont compris entre 0 et 2π, et l'angle β entre 0 et π.

Le groupe $SO(n)$ est constitué de matrices réelles $n \times n$, c'est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$. Les contraintes (17) qui le définissent montrent que $SO(n)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^{n^2}$. On sait d'autre part que chaque élément d'une matrice de rotation est borné par 1 en valeur absolue. Le groupe $SO(n)$ est donc un sous-ensemble fermé borné, c'est-à-dire compact, de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Il y a des différences considérables entre les représentations d'un groupe compact et celles d'un groupe non compact. En particulier, les représentations irréductibles d'un groupe compact sont de dimension finie et unitaires (plus précisément, équivalentes à une représentation unitaire). A l'opposé, les représentations unitaires des groupes non compacts sont de dimension infinie. Précisons que notre intérêt pour les représentations unitaires vient de ce qu'elles jouent un rôle tout particulier en mécanique quantique.

2.2 Groupe unitaire

Le groupe unitaire dans un espace complexe à n dimensions est noté $U(n)$. Il est défini comme l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{C}^n$ qui laissent invariantes le produit scalaire sesquilinéaire

$$v \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^n, w^\dagger v \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

On peut le voir comme l'ensemble des matrices complexes $n \times n$ unitaires

$$U \in U(n) \ \leftrightarrow U \in M_n(\mathbb{C}), U^\dagger U = \mathbf{1}_n. \tag{20}$$

En particulier, le groupe $U(1)$ est le groupe des nombres complexes de module unité. C'est un groupe abélien qui joue un rôle très important en électromagnétisme. Une conséquence de la définition (20) est que le module du déterminant d'une matrice unitaire vaut 1. On définit le sous-groupe spécial unitaire $SU(n)$ du groupe unitaire $U(n)$ comme l'ensemble des matrices complexes $n \times n$ unitaires de déterminant 1

$$U \in SU(n) \;\Leftrightarrow U \in M_n(\mathbb{C}),\; U^\dagger U = \mathbf{1}_n \,\text{et}\, \det(U) = 1. \tag{21}$$

En particulier, le groupe $SU(2)$ est constitué des matrices complexes 2×2 unitaires de déteminant 1. On montre facilement qu'elles ont la forme

$$U \in SU(2) \;\Leftrightarrow\; U = \begin{pmatrix} z & z' \\ -\bar{z}' & \bar{z} \end{pmatrix},\; |z|^2 + |z'|^2 = 1. \tag{22}$$

Pour tout élément U du groupe $SU(2)$, on peut trouver trois angles (α, β, γ) tels que

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\beta}{2}) & \sin(\frac{\beta}{2}) \\ -\sin(\frac{\beta}{2}) & \cos(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Si l'on prend l'angle α entre 0 et 2π, et β entre 0 et π, alors l'angle γ doit être pris entre 0 et 4π pour couvrir la totalité de $SU(2)$. On remarque que le groupe spécial unitaire $SU(2)$ et le groupe des rotations $SO(3)$ sont tous deux paramétrisés par trois angles. On va montrer qu'il existe un morphisme entre ces groupes.

2.2.1 Morphisme entre $SU(2)$ et $SO(3)$

Il existe un lien entre les groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ qui peut être décrit de la manière suivante. A un vecteur $\vec{v}$ de l'espace vectoriel à $\mathbb{R}^3$ on associe une matrice 2×2 $M(\vec{v})$ hermitienne de trace nulle par

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad M(\vec{v}) = v_i \sigma^i, \tag{24}$$

où σ^i, $i = 1, 2, 3$, sont les matrices de Pauli. Cette application est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et l'espace vectoriel des matrices 2×2 hermitiennes de trace nulle. On montre facilement

$$(M(\vec{v}))^2 = \vec{v}^{\,2} \mathbf{1}_2. \tag{25}$$

De plus, si $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sont trois vecteurs mutuellement orthogonaux de $\mathbb{R}^3$, on a

$$M(\vec{e}_1)M(\vec{e}_2)M(\vec{e}_3) = i(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)\vec{e}_3\mathbf{1}_2. \tag{26}$$

Soit $U \in SU(2)$ une matrice unitaire 2×2. Il existe une représentation du groupe $SU(2)$ sur l'espace vectoriel des matrices hermitiennes de trace nulle donnée par

$$M(\vec{v}) \to M(\vec{v}_U) = UM(\vec{v})U^{-1}. \tag{27}$$

En utilisant (25) et (26), on montre que $\vec{v}$ et $\vec{v}_U$ sont reliés par une transformation linéaire qui conserve le carré scalaire et l'orientation de l'espace, c'est-à-dire une rotation, $\vec{v}_U = O_U\vec{v}$, $O_U \in SO(3)$. On peut ainsi associer à toute transformation unitaire U une rotation O_U. Cette application est un morphisme du groupe $SU(2)$ dans le groupe $SO(3)$, c'est-à-dire que l'on a $O_U O_{U'} = O_{UU'}$.Il est surjectif, mais pas injectif : aux transformations U et $-U$ de $SU(2)$ correspondent la même rotation. Le noyau du morphisme que l'on vient de définir est donc $Z_2 = \{\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\}$, qui est le centre de $SU(2)$.

2.3 Groupe de Lorentz

Les transformations orthogonales ont été définies en considérant des transformations linéaires qui laissent invariant le produit euclidien. On va définir le groupe pseudo-orthogonal $O(1,3)$ en considérant les transformations linéaires de $\mathbb{R}^4$ qui laissent invariant le produit Lorentzien

$$x^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \;\; \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

$$\Lambda \in O(1,3) \;\Leftrightarrow\; \Lambda^t\eta\Lambda = \eta. \tag{29}$$

La "métrique" $\eta_{\mu\nu}$ coïncide avec son inverse $\eta^{\mu\nu}$. Ces deux tenseurs permettent de "descendre" et "monter" les indices de l'espace de Minkowski. Comme conséquence de la définition (29), le déterminant d'un élément de $O(1,3)$ vaut ± 1. En se restreignant aux matrices de déterminant 1, on obtient le sous-groupe $SO(1,3)$. Une autre conséquence de la définition (29) s'écrit

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_1^3 (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 \tag{30}$$

On en déduit que l'élément de matrice ${\Lambda^0}_0$ peut être plus grand que 1 (transformations orthochrones, qui conservent le sens du temps) ou bien plus petit que -1 (transformations antichrones, qui renversent le sens du temps). On appellera groupe de Lorentz, noté $SO^{\uparrow}(1,3)$ l'ensemble des transformations pseudo-orthogonales qui conservent l'orientation de l'espace-temps et le sens du temps. Notons que la valeur de ${\Lambda^0}_0$ n'est pas bornée supérieurement : le groupe de Lorentz est un groupe non compact.

Toute transformation de Lorentz Λ se décompose de manière unique en un produit de la forme

$$\Lambda = SR, \tag{31}$$

où R est une rotation, et S une matrice de Lorentz symétrique positive, c'est-à-dire un "boost"

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & O \\ 0 & \end{pmatrix}, \; O \in SO(3), \; S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \vec{v}^t \\ & \\ \gamma \vec{v} & \mathbf{1}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v} \vec{v}^t \end{pmatrix}, \tag{32}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du boost, $\vec{v}^2 < 1$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\vec{v}^2}$.

On sera amené à considérer des transformations pseudo-orthogonales qui ne sont pas dans le groupe de Lorentz. Ainsi, la transformation de parité

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \det(P) = -1. \tag{33}$$

renverse l'orientation de l'espace-temps, et le renversement du temps

$$T = -P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

renverse à la fois le sens du temps et l'orientation de l'espace-temps. On obtient une transformation qui renverse le sens du temps mais pas l'orientation de l'espace-temps en faisant le produit PT. Notons également que toute transformation pseudo-orthogonale qui renverse l'orientation de l'espace et pas le sens du temps peut s'écrire comme le produit de P par un élément de $SO^{\uparrow}(1,3)$.

Exercice

On note $SL(2,\mathbb{C})$ le groupe des matrices 2×2 complexes de déterminant 1. Trouver un morphisme entre ce groupe et le groupe de Lorentz $SO^{\uparrow}(1,3)$. Pour cela, on associera à tout quadrivecteur v^μ une matrice hermitique 2×2

$$M(v) = v^\mu \sigma_\mu,\ \sigma_0 = \mathbf{1}_2,\ \sigma_i = \text{matrice de Pauli},\ i = 1,2,3. \tag{35}$$

On pourra être amené à utiliser la transformation "tilde" définie par

$$\tilde{M}(v) = \epsilon M(v)^t \epsilon^{-1} = v^0 \sigma_0 - \sum_{i=1}^{3} v^i \sigma_i, \quad \epsilon = i\sigma_2. \tag{36}$$

On vérifiera en particulier la relation

$$M(v)\tilde{M}(v) = (\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)\mathbf{1}. \tag{37}$$

On introduira une représentation linéaire du groupe $SL(2,\mathbb{C})$ dans l'espace vectoriel des matrices 2×2 complexes hermitiques, et on montrera que, vue comme transformation linéaire du quadrivecteur v, cette représentation conserve le carré lorentzien.

2.4 Groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré, encore appelé groupe de Lorentz inhomogène, est noté $ISO^{\uparrow}(1,3)$. Il est défini comme l'ensemble des transformations affines de $\mathbb{R}^4$ qui laissent invariantes le carré de l'élément de longueur lorentzien $dx^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. On se restreindra à des transformations qui conservent l'orientation de l'espace et le sens du temps. Les transformations de Poincaré ont alors la forme

$$x^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{38}$$

où Λ est un élément de $SO^{\uparrow}(1,3)$ et a est un quadrivecteur. Notons $T_{\Lambda,a}$ cette transformation. L'ensemble des transformations de la forme $T_{\Lambda,0}$ constitue le sous-groupe de Lorentz, et l'ensemble des transformations de la forme $T_{\mathbf{1}_4,a}$ constitue le sous-groupe abélien des translations. La loi de produit s'écrit

$$T_{\Lambda,a} T_{\Lambda',a'} = T_{\Lambda\Lambda',a+\Lambda a'} \tag{39}$$

L'inverse de $T(\Lambda,a)$ est $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$.

3 Algèbres de Lie

3.1 Généralités

Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On dit que $\mathcal{L}$ est munie d'une structure d'algèbre de Lie si il existe une loi de composition interne

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}, \ \ (m \in \mathcal{L}, n \in \mathcal{L}) \to [m, n] \in \mathcal{L}, \tag{40}$$

parfois appelée crochet de m et n, qui possède les propriétés suivantes

– Distributivité

$$\forall (m, n, p) \in \mathcal{L}^3, \, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, [\lambda m + \mu n, p] = \lambda [m, p] + \mu [n, p]. \tag{41}$$

– Antisymétrie

$$\forall (m, n) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}, \, [m, n] = -[n, m], \tag{42}$$

– Identité de Jacobi

$$\forall (m, n, p) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}, \, [m, [n, p]] + [n, [p, m]] + [p, [m, n]] = 0, \tag{43}$$

où les trois termes du membre de gauche se déduisent les uns des autres par permutations circulaires.

On note $t^a \in \mathcal{L}$ les éléments d'une base de l'algèbre de Lie. Le crochet de deux éléments de cette base se développe à nouveau sur la base, ce que l'on écrit sous la forme

$$[t^a, t^b] = \sum_c f^{ab}{}_c t^c \tag{44}$$

Les nombres réels $f^{ab}{}_c$ sont appelées constantes de structure de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$. Une algèbre de Lie est complètement caractérisée par la donnée de ses constantes de structures. Une algèbre de Lie dont toutes les constantes de structure sont nulles est appelée abélienne, ou commutative. Notons que l'antisymétrie du crochet et l'identité de Jacobi se traduisent par des contraintes sur les constantes de structure

$$f^{ab}{}_c = -f^{ba}{}_c, \quad \sum_d (f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e) = 0. \tag{45}$$

On va maintenant décrire rapidement certaines propriétés des algèbres de Lie, dont on verra plus tard qu'elles ont une relation étroite avec certaines propriétés déjà étudiées des groupes.

- On dit que $\hat{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ est une sous-algèbre de Lie si $\hat{\mathcal{L}}$ est un sous-espace vectoriel fermé pour le crochet, c'est-à-dire tel que le crochet de deux éléments de $\hat{\mathcal{L}}$ est encore dans $\hat{\mathcal{L}}$.
- On dit que $\mathcal{I} \subset \mathcal{L}$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ si c'est un sous-espace vectoriel qui satisfait

$$\forall m \in \mathcal{L},\, \forall i \in \mathcal{I},\, [m,i] \in \mathcal{I}. \tag{46}$$

- On dit que $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie simple si les seuls idéaux qu'elle contient sont $\mathcal{L}$ elle-même et le sous-espace constitué du vecteur nul $\{0\}$.
- Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux algèbres de Lie on appelle morphisme pour la structure d'algèbre de Lie une application linéaire L de $\mathcal{L}_1$ dans $\mathcal{L}_2$ telle que

$$\forall (m,n) \in {\mathcal{L}_1}^2,\;\; L([m,n]) = [L(m), L(n)]. \tag{47}$$

- Soit X un espace vectoriel de dimension finie. L'ensemble $\mathcal{L}(X)$ des applications linéaires de X dans X possède une structure d'algèbre de Lie, dont le crochet est donné par le commutateur des applications

$$\forall (A,B) \in \mathcal{L}(X)^2, [A,B] = A \circ B - B \circ A. \tag{48}$$

  On appelle représentation T de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ dans l'espace vectoriel X un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}(X)$

$$T : \mathcal{L} \to \mathcal{L}(X) / \forall (m,n) \in \mathcal{L}^2,\;\; T([m,n]) = [T(m), T(n)]. \tag{49}$$

  Si X est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ dans lequel on a choisi une base, l'ensemble $\mathcal{L}(X)$ des applications linéaires est isomorphe à l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ à éléments dans $\mathbb{K}$. Cet ensemble est donc une algèbre de Lie dont le crochet est donné par le commutateur des matrices. On appelle représentation T de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ un morphisme de $\mathcal{L}$ dans $M_n(\mathbb{K})$

$$T : \mathcal{L} \to M_n(\mathbb{K}) / \forall (m,n) \in \mathcal{L}^2,\;\; T([m,n]) = [T(m), T(n)]. \tag{50}$$

- Soit T une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ dans l'espace vectoriel X. On dit que le sous-espace vectoriel $Y \subset X$ est un sous-espace invariant sous la représentation si il est stable sous toutes les applications linéaires de la représentation

$$\forall m \in \mathcal{L},\, \forall y \in Y,\;\; T(m)y \in Y. \tag{51}$$

– On dit que T est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ dans l'espace vectoriel X si les seuls sous-espaces invariants sont X et $\{0\}$.
– Le lemme de Schur fonctionne comme pour les groupes. Soit T une représentation irréductible de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ dans l'espace vectoriel complexe X. Si pour tout $m \in \mathcal{L}$, l'application linéaire L commute avec $T(m)$, $(LT(m) = T(m)L)$, alors L est proportionnelle à l'application identique, $L = \lambda \mathbf{1}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
– La notion de somme de deux représentations est définie comme dans le cas des groupes. Examinons le cas du produit tensoriel de deux représentations. Soient T_1 et T_2 deux représentations de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ dans les espaces vectoriels X_1 et X_2. On définit une représentation T de $\mathcal{L}$ dans l'espace vectoriel $X = X_1 \otimes X_2$ par

$$T(m)(v_1 \otimes v_2) = (T_1(m)v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (T_2(m)v_2). \tag{52}$$

On notera la différence avec le cas d'un groupe donné dans (14).

3.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit G un des groupes de Lie précédemment introduits, et C un chemin sur ce groupe, c'est-à-dire une application différentiable du segment $[-1 \quad 1]$ dans G

$$C : [-1 \quad 1] \to G, \quad t \to g(t). \tag{53}$$

On entend par application différentiable que chaque élément de matrice de $g(t)$ est une fonction différentiable de t. On suppose de plus que ce chemin passe par la matrice identité à $t = 0$, $g(0) = \mathbf{1}$. On considère la dérivée à l'origine du chemin

$$m = \left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=0}. \tag{54}$$

L'ensemble de toutes les matrices m obtenues par dérivation de tous les chemins passant par l'identité est appelé algèbre de Lie du groupe G et noté $\mathrm{Lie}(G)$. Une autre manière de présenter les choses est de dire que la matrice m caractérise le chemin C au voisinage de l'origine

$$g(t) = \mathbf{1} + tm + O(t^2), \qquad t \text{ petit}. \tag{55}$$

On va tout d'abord montrer que $\mathrm{Lie}(G)$ possède une structure d'espace vectoriel réel. Soient $C : t \to g(t)$ et $C' : t \to g'(t)$ deux chemins caractérisés au voisinage de l'origine par les matrices $m = \frac{d}{dt}g(t)\big|_{t=0}$ et $m' = \frac{d}{dt}g'(t)\big|_{t=0}$ de Lie(G). On utilise les deux chemins C et C' pour en construire un troisième C"

$$C\text{"} : [-1 \quad 1] \to G, \quad t \to g\text{"}(t) = g(t)g'(t), \tag{56}$$

et l'on calcule facilement

$$\frac{d}{dt}g\text{"}(t)\bigg|_{t=0} = m + m' \in \text{Lie}(G). \tag{57}$$

Si λ est un réel quelconque, on considère maintenant le chemin $C_\lambda : t \to g_\lambda(t) = g(\lambda t)$ déduit du chemin C. On a

$$\frac{d}{dt}g_\lambda(t)\bigg|_{t=0} = \lambda m \in \text{Lie}(G). \tag{58}$$

On va maintenant montrer qu'il existe une action du groupe G sur son algèbre de Lie Lie(G). Soient $C : t \to g(t)$ un chemin, et h un élément de G. On considère le chemin $C_h :\to g_h(t) = hg(t)h^{-1}$. On a

$$\frac{d}{dt}g_h(t)\bigg|_{t=0} = h\frac{d}{dt}g(t)\bigg|_{t=0} h^{-1}. \tag{59}$$

On en déduit que si m est dans Lie(G) et h dans G, alors hmh^{-1} est aussi dans Lie(G). L'algèbre de Lie est un espace vectoriel qui porte une représentation linéaire du groupe. Cette représentation particulière est appelée représentation adjointe.

Enfin, considérons un élément m de l'algèbre de Lie et un chemin $D : t \to h(t)$ qui définit un autre élément de l'algèbre de Lie

$$\frac{d}{dt}h(t)\bigg|_{t=0} = n. \tag{60}$$

Comme on a vu, $h(t)mh(t)^{-1}$ est dans l'algèbre de Lie pour toute valeur de t. On obtient ainsi un chemin dans l'algèbre de Lie. Comme Lie(G) est un espace vectoriel, la dérivée à l'origine de ce chemin est toujours dans Lie(G)

$$\frac{d}{dt}h(t)mh(t)^{-1}\bigg|_{t=0} = nm - mn = [n, m] \in \text{Lie}(G). \tag{61}$$

On en déduit que Lie(G) possède une structure d'algèbre de Lie, dont la loi de produit est donnée par le commutateur des matrices. Les éléments t^a d'une base de Lie(G) sont appelés les générateurs du groupe G.

Considérons un par un les groupes précédemment introduits. On va déterminer l'algèbre de Lie associée à chaque groupe en étudiant un chemin au voisinage de l'identité.

3.3 Algèbre du groupe des rotations

En premier lieu, considérons un chemin $R(t)$ dans le groupe orthogonal $O(n)$, avec $R(0) = \mathbf{1}_n$. Pour toute valeur de t, la matrice $R(t)$ satisfait donc

$$R(t)^t R(t) = \mathbf{1}_n \tag{62}$$

Développons $R(t)$ au premier ordre au voisinage de $t = 0$

$$R(t) = \mathbf{1}_n + t\,\mathbf{r} + O(t^2), \tag{63}$$

où $\mathbf{r}$ est une matrice réelle $n \times n$. Au premier ordre en t, la contrainte d'orthogonalité s'écrit

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}^t = 0 \tag{64}$$

L'algèbre de Lie du groupe orthogonal, que l'on notera $o(n)$, est donc constituée des matrices $n\times n$ réelles antisymétriques. Cet ensemble possède bien une structure d'algèbre de Lie : le commutateur de deux matrices antisymétriques est encore une matrice antisymétrique. Dans le cas du groupe des rotations, on doit ajouter la contrainte $\det R(t) = 1$. Au premier ordre en t, on a $\det R(t) = 1 + t\,\mathrm{tr}(\mathbf{r})$. La contrainte sur le déterminant se traduit donc dans l'algèbre de Lie par $\mathrm{tr}(\mathbf{r}) = 0$. Notons cependant que la trace d'une matrice antisymétrique est automatiquement nulle. On en déduit que les algèbres de Lie $o(n)$ et $so(n)$ des groupes $O(n)$ et $SO(n)$ coïncident. Ces deux groupes ne diffèrent que "loin" de l'identité.

Une base de l'algèbre de Lie du groupe des rotations $SO(3)$ est donnée par les matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{65}$$

qui satisfont les relations de commutation

$$[J_a, J_b] = -\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} J_c. \tag{66}$$

3.4 Algèbre du groupe unitaire

Un raisonnement analogue au précédent montre que l'algèbre de Lie $u(n)$ du groupe unitaire $U(n)$ est constituée des matrices $n \times n$ complexes anti-hermitiques

$$\mathbf{m} \in u(n) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{m}^\dagger + \mathbf{m} = 0. \tag{67}$$

Cette fois, l'algèbre de Lie $su(n)$ du groupe spécial unitaire $SU(n)$ ne coïncide pas avec celle du groupe unitaire

$$\mathbf{m} \in su(n) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{m}^\dagger + \mathbf{m} = 0 \text{ et } \mathrm{tr}(\mathbf{m}) = 0. \tag{68}$$

Une base de l'algèbre de Lie $su(2)$ est donnée par les matrices anti-hermitiques de trace nulle $j_a = \frac{i}{2}\sigma_a$, $a = 1 \cdots 3$, qui satisfont les relations de commutation

$$[j_a, j_b] = -\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} j_c. \tag{69}$$

On observe que les constantes de structure des algèbres de Lie $su(2)$ et $so(3)$ coïncident, ce qui signifie que ces algèbres sont isomorphes. On en déduit que les groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ coïncident au voisinage de l'origine.

3.5 Algèbres des groupes de Lorentz et de Poincaré

L'algèbre du groupe de Poincaré est déterminée par sa loi de produit (39). Rappelons que les translations forment un groupe abélien, ce qui implique

$$T(\mathbf{1}_4, b)T(\mathbf{1}_4, a)T(\mathbf{1}_4, -b) = T(\mathbf{1}_4, a) \tag{70}$$

Supposons que les composantes du quadrivecteur a soient infinitésimales. On développe alors $T(\mathbf{1}_4, a)$ sous la forme

$$T(\mathbf{1}_4, a) = \mathbf{Id} + a^\mu P_\mu, \tag{71}$$

où P_μ sont les générateurs des translations, et $\mathbf{Id} = T(\mathbf{1}_4, 0)$ est l'élément neutre du groupe de Poincaré. L'équation (70) conduit alors à

$$T(\mathbf{1}, b)P_\mu T(\mathbf{1}, -b) = P_\mu. \tag{72}$$

Si maintenant les composantes de b sont elles-mêmes infinitésimales, et que l'on développe $T(\mathbf{1}_4, b) = \mathbf{Id} + b^\mu P_\mu$, on obtient les relations de commutation

$$\boxed{[P_\mu, P_\nu] = 0.} \tag{73}$$

A un groupe abélien correspond donc une algèbre de Lie abélienne. On va maintenant utiliser l'action adjointe du groupe de Lorentz sur le groupe de Poincaré
$$T(\hat{\Lambda},0)T(\Lambda,a)T(\hat{\Lambda}^{-1},0)=T(\hat{\Lambda}\Lambda\hat{\Lambda}^{-1},\hat{\Lambda}a). \tag{74}$$
On suppose que les composantes de a sont infinitésimales, et aussi que la transformation de Lorentz est proche de l'identité

$$\Lambda=\mathbf{1}_4+\omega \ \Leftrightarrow\ \Lambda^\mu{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu \tag{75}$$

où les composantes de la matrice ω sont infinitésimales. Les contraintes sur la transformation de Lorentz Λ se traduisent sur la matrice infinitésimale ω

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma=\eta_{\rho\sigma}\ \Rightarrow\ \omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu},\,\omega_{\mu\nu}=\eta_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu. \tag{76}$$

On développe alors la transformation de Poincaré au voisinage de l'identité sous la forme
$$T(\Lambda,a)=\mathbf{Id}+a^\mu P_\mu+\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \tag{77}$$
où les $M^{\mu\nu}$ sont les générateurs des transformations de Lorentz. Comme on doit introduire le même nombre de générateurs qu'il y a de paramètres libres dans la matrice ω, on doit imposer

$$M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}. \tag{78}$$

L'action adjointe (74) se traduit alors au premier ordre dans les paramètres infinitésimaux par

$$T(\hat{\Lambda},0)P_\mu T(\hat{\Lambda}^{-1},0)=P_\rho\hat{\Lambda}^\rho_{\ \mu},\,T(\hat{\Lambda},0)M^{\mu\nu}T(\hat{\Lambda}^{-1},0)=(\hat{\Lambda}^{-1})^\mu{}_\rho(\hat{\Lambda}^{-1})^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma}. \tag{79}$$
Si maintenant $\hat{\Lambda}$ est lui-même supposé infinitésimalement proche de l'identité

$$\hat{\Lambda}=\mathbf{1}_4+\hat{\omega},\ \ T(\hat{\Lambda},0)=\mathbf{Id}+\frac{1}{2}\hat{\omega}_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \tag{80}$$

On obtient les relations de commutation

$$\boxed{[M^{\mu\nu},P_\rho]=P^\mu\delta^\nu{}_\rho-P^\nu\delta^\mu{}_\rho,} \tag{81}$$
$$\boxed{[M^{\mu\nu},M^{\rho\sigma}]=\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}-\eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}+\eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}.} \tag{82}$$

Nous avons dérivé ces relations de commutation de manière abstraite, en s'appuyant sur la loi de produit du groupe de Poincaré, mais sans faire référence à une réalisation particulière du groupe, ni de l'algèbre de Lie. Si pour le groupe de Lorentz, on considère la représentation de définition dans l'espace de Minkovski, on obtient la représentation explicite des générateurs par des matrices 4×4

$$(M^{\mu\nu}_{\text{déf}})^{\rho}{}_{\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma}\eta^{\nu\rho} - \delta^{\nu}_{\sigma}\eta^{\mu\rho}. \tag{83}$$

Il est parfois commode de séparer dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz les génerateurs qui correspondent aux rotations

$$\mathcal{J}_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} M_{jk}, \quad [\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k, \tag{84}$$

et ceux qui correspondent au "boosts"

$$\mathcal{K}_i = M_{0i}, \quad [\mathcal{J}_i, \mathcal{K}_j] = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k, \quad [\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k. \tag{85}$$

L'expression des J_i, K_i dans la représentation de définition est donnée par

$$J_1^{\text{déf}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; J_2^{\text{déf}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; J_3^{\text{déf}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

$$K_1^{\text{déf}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K_2^{\text{déf}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K_3^{\text{déf}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{87}$$

3.6 Application exponentielle

De nouveau, on se limite aux groupes de matrices précédemment étudiés et à leurs algèbres de Lie. La définition donnée dans le paragraphe 3.2 de l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie fait intervenir des chemins dans le groupe qui passent par l'identité. Toutefois, la définition de l'élément de l'algèbre de Lie associé à un chemin fait seulement intervenir la dérivée à l'origine du chemin. Il est donc clair que de nombreux chemins distincts correspondent au même élément de l'algèbre de Lie. En fait, si il existe un voisinage de $t = 0$ sur lequel deux chemins coïncident, alors ils définissent le même élément de l'algèbre de Lie. Un élément de l'algèbre de Lie est donc associé à un classe de chemins plutôt qu'à un chemin particulier. Cependant, on peut montrer que dans la classe des chemins associés à un élément m de l'algèbre de Lie, il existe un unique chemin qui est aussi un groupe abélien, c'est-à-dire qui possède la propriété

$$g(t+u) = g(u)g(t). \tag{88}$$

Si $u = \epsilon$ est infinitésimal, on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\begin{aligned} & g(t+\epsilon) = g(\epsilon)g(t) = (\mathbf{1} + \epsilon m + O(\epsilon^2))g(t) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{g(t+\epsilon) - g(t)}{\epsilon} = \frac{dg}{dt}(t) = mg(t). \end{aligned} \tag{89}$$

Ce chemin satisfait donc une équation différentielle, qui possède une unique solution telle que $g(t = 0) = \mathbf{1}$

$$g(t) = e^{mt}. \tag{90}$$

Considérons le point $t = 1$. Le chemin précédemment défini permet d'associer à un élément m de l'algèbre de Lie, un élément du groupe donné par e^m. L'exponentielle fournit donc une application de l'algèbre de Lie $Lie(G)$ vers le groupe de Lie G. Cette application n'est en général ni surjective, ni injective. Mais dans tous les cas, il existe un voisinage du vecteur nul dans l'algèbre de Lie qui est envoyé de façon biunivoque par l'application exponentielle sur un voisinage de l'identité dans le groupe de Lie.

On peut en fait donner une propriété un peu plus forte : non seulement l'algèbre de Lie et le groupe de Lie sont en bijection au voisinage de l'origine, mais la loi de produit du groupe de Lie est déterminée (au voisinage de l'identité) par le crochet de l'algèbre de Lie. Cette assertion s'appuie sur une identité, appelée identité de Campbell-Hausdorff, que l'on se contentera de mentionner ici.

4 Quelques propriétés de $su(n)$

Dans ce paragraphe, on prendra pour exemple le groupe $SU(n)$ et son algèbre de Lie simple $su(n)$. Les résultats qu'on va obtenir s'étendent en fait à tout groupe dont l'algèbre de Lie est simple. On rappelle que, dès que l'on a défini un groupe et son algèbre de Lie, on connaît deux de leurs représentations de dimension finie.

- La représentation fondamentale ou de définition : c'est simplement celle qui sert à définir le groupe $SU(n)$ comme l'ensemble des matrices g $n \times n$ unitaires de déterminant 1. L'espace vectoriel sur lequel agit la représentation est $\mathbb{C}^n$. On obtient les matrices de l'algèbre de Lie en se restreignant à des transformations infinitésimales

$$g = \mathbf{1} + \epsilon m, \quad m \in su(n), \tag{91}$$

où ϵ est le paramètre infinitésimal, et m est une matrice antihermitienne de trace nulle. Les physiciens ont l'habitude d'utiliser une base T^r des matrices *hermitiennes* de trace nulle. Un élément m de l'algèbre de Lie $su(n)$ s'écrit alors

$$m = i m_r T^r, \quad m_r \in \mathbb{R}. \tag{92}$$

L'indice r prend $n^2 - 1$ valeurs. Les matrices T^r satisfont les relations de commutation

$$[T^r, T^s] = i f^{rs}{}_u T^u, \tag{93}$$

Les constantes réelles $f^{rs}{}_u$ sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie. Remarquons que les matrices $(-T^r)^t$ satisfont les mêmes relations de commutation que les matrices T^r

$$[(-T^r)^t, (-T^s)^t] = i f^{rs}{}_u (-T^u)^t, \tag{94}$$

On en déduit que les matrices T^r et $(-T^r)^t$ forment les bases de deux représentations, en général distinctes, de l'algèbre de Lie $su(n)$. Les physiciens appellent n la représentation fondamentale de $su(n)$, dont les matrices s'écrivent $m = i m_r T^r$. Ils appellent $\bar{n}$ la représentation conjuguée, dont les matrices s'écrivent $m^* = i m_r (-T^r)^t$. Pour ce qui concerne le groupe $SU(n)$, si il agit dans la représentation fondamentale n par une matrice g, il agit dans la représentation conjuguée $\bar{n}$ par la matrice $(g^{-1})^t = g^*$. L'habitude des physiciens est d'écrire les composantes d'un vecteur w de la $\bar{n}$ comme un vecteur ligne $w = (w_1 \cdots w_n)$ avec la loi de transformation $w \to w g^{-1}$.

Exercice : Montrer que les représentations 2 et $\bar{2}$ de $SU(2)$ sont équivalentes.

En dehors de la représentation fondamentale de $SU(n)$ et de sa conjuguée, on connaît la représentation adjointe. Le groupe $SU(n)$ agit sur l'algèbre de Lie $su(n)$ par

$$g \in SU(n), \;\; m \in su(n) \;\longrightarrow\; g m g^{-1} = \mathrm{Ad} g.m, \quad \mathrm{Ad} g_1 \mathrm{Ad} g_2 = \mathrm{Ad} g_1 g_2. \tag{95}$$

L'algèbre de Lie $su(n)$ porte donc une représentation de $SU(n)$. Cette représentation est irréductible, comme pour tous les groupes dont l'algèbre est simple. Sa dimension est $n^2 - 1$. Puisque l'on a une action du groupe sur l'algèbre de Lie, on a aussi une action de l'algèbre de Lie sur elle-même. On considère dans la formule (95) une transformation infinitésimale $g = \mathbf{1} + \epsilon p$, $p \in su(n)$, et on obtient

$$
\begin{gathered}
p \in su(n), \;\; m \in su(n) \longrightarrow [p, m] = \mathrm{ad}p.m, \\
\mathrm{ad}p_1 \mathrm{ad}p_2 - \mathrm{ad}p_2 \mathrm{ad}p_1 = \mathrm{ad}[p_1, p_2].
\end{gathered}
\tag{96}
$$

Étudions la matrice de la transformation linéaire ad$p$ dans la base T^r

$$
\begin{gathered}
m = i m_r T^r, \;\; p = i p_s T^s, \\
\mathrm{ad}p.m = i(\mathrm{ad}p)_r{}^s m_s T^r = [p, m] = -p_u m_s [T^u, T^s] = -i f^{us}{}_r p_u m_s T^r \\
(\mathrm{ad}p)_r{}^s = -f^{us}{}_r p_u.
\end{gathered}
\tag{97}
$$

En particulier, on obtient $(\mathrm{ad}\, T^u)_r{}^s = f^{su}{}_r$. Les constantes de structures peuvent être vus comme les éléments de matrice des générateurs infinitésimaux dans la représentation adjointe.

Remarquons que les éléments de matrice obtenus sont **réels**. On en déduit que pour toute algèbre de Lie la représentation adjointe est équivalente à sa conjuguée. On dit que la représentation adjointe est une représentation réelle.

De manière générale, considérons maintenant une représentation irréductible R du groupe $SU(n)$ dans un espace vectoriel V_R. Puisque le groupe $SU(n)$ est compact, R est une représentation unitaire et V_R est de dimension finie D. À tout élément g de $SU(n)$ est donc associé une matrice unitaire $D \times D$ notée g_R. De même, à tout élément m de l'algèbre de Lie $su(n)$ est associé une matrice antihermitienne notée m_R. Ces matrices se développent sur une base par

$$
m = i m_s T^s \quad m_R = i m_s T^s_R, \tag{98}
$$

où les T^s_R sont des matrices hermitiennes $D \times D$ qui représentent les T^s. Elles satisfont les relations de commutation

$$
[T^r_R, T^s_R] = i f^{rs}{}_u T^u_R, \tag{99}
$$

On introduit le tenseur

$$
\eta^{rs}_R = \mathrm{tr} T^r_R T^s_R. \tag{100}
$$

C'est un tenseur symétrique, dont on montre qu'il est strictement positif. Ce tenseur définit donc une métrique sur l'algèbre de Lie. Lorsque cette métrique est calculée dans la représentation adjointe, elle est appelée métrique de Killing. Cette métrique possède un inverse, que l'on notera η^R_{rs}, également symétrique, définie positif

$$\eta_R^{rs}\eta^R_{st} = \delta^r_t. \tag{101}$$

En utilisant l'invariance par permutation circulaire de la trace, on obtient l'identité

$$\mathrm{tr}([T^u_R, T^r_R]T^s_R + T^r_R[T^u_R, T^s_R]) = 0, \Longrightarrow \quad f^{ur}{}_t\eta_R^{ts} + f^{us}{}_t\eta_R^{rt} = 0. \tag{102}$$

On dit que η_R^{rs} est un tenseur invariant. On déduit facilement de (102) une équation pour le tenseur inverse

$$f^{ut}{}_r\eta^R_{ts} + f^{ut}{}_s\eta^R_{rt} = 0. \tag{103}$$

On va maintenant montrer que si R et R' sont deux représentations irréductibles de $SU(n)$, les tenseurs η_R^{rs} et $\eta_{R'}^{rs}$ sont proportionnels. On utilise ces deux tenseurs pour construire la matrice

$$C_r{}^s = \eta^{R'}_{rt}\eta_R^{ts} \tag{104}$$

Les équations (102) et (103), satisfaites pour R comme pour R', permettent de montrer que la matrice C satisfait l'identité

$$C_r{}^t f^{us}{}_t - f^{ut}{}_r C_t{}^s = 0. \tag{105}$$

En utilisant l'expression (97) des éléments de matrice dans la représentation adjointe, on déduit de l'équation précédente que, pour tout élément p de l'algèbre de Lie $su(n)$, on a

$$C_r{}^t(\mathrm{ad}p)_t{}^s - (\mathrm{ad}p)_r{}^t C_t{}^s = 0 \ \Leftrightarrow [\mathrm{ad}p, C] = 0. \tag{106}$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme de Schur, et le fait que la représentation adjointe soit irréductible, pour conclure que la matrice C est nécessairement proportionnelle à l'identité, et donc les tenseurs η_R^{rs} et $\eta_{R'}^{rs}$ sont proportionnels. On en déduit que si l'on choisit une base T^r telle que, pour une certaine représentation irréductible R,

$$\eta_R^{rs} = T_R\delta^{rs}, \tag{107}$$

Alors ce tenseur sera proportionnel à l'identité dans toute représentation irréductible. Un tel choix de base est toujours possible, on peut même s'arranger pour que

$$T_F = \frac{1}{2}, \tag{108}$$

où F désigne la représentation fondamentale.

Les tenseurs η_R^{rs} et η_{rs}^R peuvent être vus comme servant à "monter" et "descendre" les indices de l'algèbre de Lie. Ainsi, on définit

$$f^{rsu} = \eta_R^{uv} f^{rs}{}_v. \tag{109}$$

L'équation (102) s'écrit alors

$$f^{urs} + f^{usr} = 0, \tag{110}$$

c'est-à-dire que le tenseur à trois indices f^{urs} est antisymétrique sur ses deux derniers indices. On sait aussi, par construction, qu'il est antisymétrique sur ses deux premiers indices. On en déduit finalement que ce tenseur est complètement antisymétrique. Dans une représentation irréductible quelconque R, on considère alors l'opérateur $\mathcal{C}_R = \eta_{rs}^R (T_R^r T_R^s)$. Montrons que c'est un opérateur de Casimir de l'algèbre de Lie $su(n)$

$$\begin{aligned} [T_R^r, \mathcal{C}_R] = \eta_{uv}^R [T_R^r, (T_R^u T_R^v)] &= (\eta_{uv}^R ([T_R^r, T_R^u] T_R^v + T_R^u [T_R^r, T_R^v]) \\ &= (\eta_{wv}^R f^{rw}{}_u + \eta_{uw}^R f^{rw}{}_v) T_R^u T_R^v = 0. \end{aligned} \tag{111}$$

On en déduit que dans une représentation irréductible R, l'opérateur $\mathcal{C}_R$ est proportionnel à l'opérateur identité. On note

$$\mathcal{C}_R = C_R \mathbf{1}_{V_R}. \tag{112}$$

5 Représentations irréductibles de $SU(2)$ et $SO(3)$

Les deux groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ partagent la propriété d'être des groupes compacts. En conséquence, comme on l'a déjà signalé, leurs représentations irréductibles sont unitaires et de dimension finie. On sait qu'il existe un morphisme de $SU(2)$ dans $SO(3)$. On en déduit que toute représentation de $SO(3)$ est aussi une représentation de $SU(2)$. Mais, comme le morphisme entre $SU(2)$ et $SO(3)$ n'est pas bijectif, l'inverse n'est pas vrai : une représentation de $SU(2)$ n'est pas nécessairement une représentation de $SO(3)$.

On va commencer par chercher les représentations irréductibles de dimension finie de l'algèbre de Lie $su(2) \equiv so(3)$. Un théorème dit que ces représentations irréductibles de l'algèbre de Lie portent également une représentation irréductible du groupe $SU(2)$. On verra lesquelles, parmi ces représentations de $SU(2)$, sont également des représentations de $SO(3)$

On considère donc un espace vectoriel V sur $\mathbf{C}$ de dimension finie D. Il est supposé muni d'une base, et on identifiera l'ensemble des applications linéaires de V avec l'ensemble des matrices complexes $D \times D$. On dira que V est un espace de représentation de l'algèbre de Lie $SU(2)$ si l'on est capable de trouver trois matrices $D \times D$, notées $\mathcal{J}_a$, $a = 1, 2, 3$, qui satisfont les relations de commutation

$$[\mathcal{J}_a, \mathcal{J}_b] = -\epsilon_{abc}\mathcal{J}_c. \tag{113}$$

On connait déja un tel ensemble de matrices en dimension 2 (les j_a) et en dimension 3 (les J_a). Dans la suite, on va supposer que la représentation est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-espaces de V invariant sous l'action des trois matrices $\mathcal{J}_a$. Dans ce cas, l'opérateur de Casimir quadratique

$$\mathcal{C} = \sum_{a=1}^{3}(\mathcal{J}_a)^2, \quad [\mathcal{C}, \mathcal{J}_a] = 0, \tag{114}$$

est une matrice $D \times D$ proportionnelle à la matrice identité.

On commence par former les combinaisons linéaires complexes suivantes des matrices $\mathcal{J}_a$

$$e = \mathcal{J}_2 - i\mathcal{J}_1, \quad f = \mathcal{J}_2 + i\mathcal{J}_1, \quad h = -i\mathcal{J}_3. \tag{115}$$

En utilisant [113], on obtient les relations de commutation

$$[h, e] = e, \quad [h, f] = -f, \quad [e, f] = -2h. \tag{116}$$

En terme de ces matrices, l'opérateur de Casimir s'écrit

$$\mathcal{C} = -h^2 + \frac{1}{2}(ef + fe) = -h(h + \mathbf{1}_D) + fe = -h(h - \mathbf{1}_D) + ef. \tag{117}$$

Les deux dernières expressions ont été obtenues en utilisant les relations de commutation (116). Avant de poursuivre, notons la forme des matrices e, f

et h dans la représentation de définition de l'algèbre de Lie $su(2)$

$$e_F = j_2 - ij_1 = \frac{i}{2}(\sigma_2 - i\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f_F = j_2 + ij_1 = \frac{i}{2}(\sigma_2 + i\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$h_F = -ij_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{118}$$

Dans une représentation irréductible quelconque, on sait que la matrice h possède au moins une valeur propre, que nous noterons λ. Soit $|\lambda, \alpha >$, $\alpha = 1 \cdots n$ une base du sous-espace propre de V correspondant à la valeur propre λ de h

$$h|\lambda, \alpha >= \lambda|\lambda, \alpha > . \tag{119}$$

En utilisant les relations de commutation (116) et la relation (119), on obtient

$$h(e|\lambda, \alpha >) = (\lambda + 1)(e|\lambda, \alpha >), \quad h(f|\lambda, \alpha >) = (\lambda - 1)(f|\lambda, \alpha >). \tag{120}$$

Le vecteur $e|\lambda, \alpha >$, si il est non nul, est donc vecteur propre de h avec la valeur propre $\lambda+1$. De même, le vecteur $f|\lambda, \alpha >$, si il est non nul, est vecteur propre de h avec la valeur propre $\lambda - 1$. L'opérateur e augmente la valeur propre de h d'une unité, et l'opérateur f la diminue d'une unité. De manière générale, si les vecteurs $e^p|\lambda, \alpha >$ et $f^q|\lambda, \alpha >$ sont non nuls, on notera

$$e^p|\lambda, \alpha >= c_p|\lambda + p, \alpha >, \quad f^q|\lambda, \alpha >= d_q|\lambda - q, \alpha >$$
$$h|\lambda + p, \alpha >= (\lambda + p)|\lambda + p, \alpha >, \quad h|\lambda - q, \alpha >= (\lambda - q)|\lambda - q, \alpha >, \tag{121}$$

où c_p et d_q sont des coefficients numériques que nous discuterons ultérieurement. Notons que si deux vecteurs propres de h correspondent à des valeurs propres distinctes, alors ils sont linéairement indépendants. On en déduit que tous les vecteurs $e^p|\lambda, \alpha >$ et $f^q|\lambda, \alpha >$ non nuls forment un système linéairement indépendant. Puisque la dimension de V est finie, il existe nécessairement une valeur de p et une valeur de q à partir desquelles les vecteurs $e^p|\lambda, \alpha >$ et $f^q|\lambda, \alpha >$ sont nuls

$$e^P|\lambda, \alpha >= c_P|\lambda + P, \alpha > \neq \vec{0}, \; e^{P+1}|\lambda, \alpha >= c_P e|\lambda + P, \alpha >= \vec{0},$$
$$f^Q|\lambda, \alpha >= d_Q|\lambda - Q, \alpha > \neq \vec{0}, \; f^{Q+1}|\lambda, \alpha >= d_Q f|\lambda - Q, \alpha >= \vec{0}. \tag{122}$$

On notera dans la suite $j_+ = \lambda + P$, $j_- = \lambda - Q$, $\Re e(j_+) \geq \Re e(j_-)$. Les vecteurs extrêmes $|j_+, \alpha >$ et $|j_-, \alpha >$ sont caractérisés par

$$h|j_+, \alpha >= j_+|j_+, \alpha >, \quad e|j_+, \alpha >= \vec{0},$$
$$h|j_-, \alpha >= j_-|j_-, \alpha >, \quad f|j_-, \alpha >= \vec{0}. \tag{123}$$

En utilisant les relations (121) et (123), on obtient l'action de l'opérateur de Casimir sur ces vecteurs

$$\mathcal{C}|j_+, \alpha >= (-h(h + \mathbf{1}) + fe)|j_+, \alpha >= -j_+(j_+ + 1)|j_+, \alpha >,$$
$$\mathcal{C}|j_-, \alpha >= (-h(h - \mathbf{1}) + ef)|j_-, \alpha >= -j_-(j_- - 1)|j_-, \alpha > . \tag{124}$$

on a déjà dit que, dans une représentation irréductible, l'opérateur de Casimir doit être proportionnel à la matrice identité. Il doit donc agir de la même façon sur les vecteurs $|j_+, \alpha >$ et $|j_-, \alpha >$, ce qui conduit à l'équation

$$j_+(j_+ + 1) = j_-(j_- - 1). \tag{125}$$

La contrainte que la partie réelle de j_+ est supérieure ou égale à celle de j_- fait qu'il n'y a qu'une solution à cette équation, $j_+ = -j_-$, $\Re e(j_+) \geq 0$. On notera désormais

$$j \equiv j_+ = -j_- \tag{126}$$

On sait aussi que la différence $j_+ - j_- = 2j$ vaut $P + Q$, c'est-à-dire est un entier positif ou nul. j est appelé le spin de la représentation considérée, et ne peut prendre que des valeurs entières et semi-entières. Finalement, on observe que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $|m, \alpha >, -j \leq m \leq j$ avec α fixé, est invariant sous l'action de e, f et h, c'est-à-dire invariant sous l'action de l'algèbre de Lie. On en déduit que dans une représentation irréductible, l'index α prend une valeur et une seule. Dans la suite, on notera une base de la représentation caractérisée par le spin j sous la forme $|j, m >, -j \leq m \leq j$

On notera que nous ne nous sommes pas encore préoccupés du produit scalaire. Pour obtenir une représentation unitaire d'un groupe, il faut que son algèbre de Lie soit représentée par des opérateurs anti-unitaires, $\mathcal{J}_a^\dagger = -\mathcal{J}_a$. On en déduit les propriétés

$$e^\dagger = -f, \quad h^\dagger = h. \tag{127}$$

On va montrer que l'on peut choisir le produit scalaire de telle manière que ces propriétés soient satisfaites. En premier lieu, l'hermiticité de h implique

que le produit scalaire est diagonal dans la base $|j,m>, -j \leq m \leq j$. On peut alors choisir la normalisation des vecteurs de la base de telle façon qu'elle soit hortonormale

$$< j,m|j,m' >= \delta_{mm'}. \tag{128}$$

L'action de l'opérateur e sur les vecteurs de base s'écrit alors

$$e|j,m >= c_m|j,m+1 > \tag{129}$$

Il est possible de choisir la phase des vecteurs de la base de façon que les coefficients c_m soient réels et positifs. L'opérateur $-f$ est l'adjoint de e. Son action s'écrit donc

$$f|j,m >= -c_{m-1}|j,m-1 > \tag{130}$$

En utilisant les relations de commutation (116), on obtient

$$- < j,m|[e,f]|j,m >=< j,m|2h|j,m > \Rightarrow \ c_{m-1}^2 - c_m^2 = 2m. \tag{131}$$

En utilisant la condition $c_j = 0$, l'unique solution de l'équation précédente s'écrit

$$c_m = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \tag{132}$$

On a ainsi complètement déterminé l'action des opérateurs e, f et h de telle façon qu'ils satisfassent les propriétés (127).

Nous avons étudié jusqu'ici l'action de l'algèbre de Lie, mais qu'en est-il de l'action du groupe ? On sait que l'on passe de l'algèbre de Lie au groupe par exponentiation. On ne va pas essayer ici d'exponentier une matrice générale de l'algèbre de Lie, on se contentera d'étudier l'action sur les vecteurs de base d'une transformation du type $\exp(\alpha \mathcal{J}_3) = \exp(i\alpha h)$. On obtient

$$\exp(i\alpha h)|j,m >= \exp(i\alpha m)|j,m > . \tag{133}$$

Considérée comme transformation du groupe $SO(3)$, la transformation $\exp(\alpha J_3)$ est une rotation d'un angle α autour de l'axe Oz. En particulier, si $\alpha = 2\pi$, c'est la transformation identité. Par contre, considérée comme transformation du groupe $SU(2)$, la transformation $\exp(\alpha j_3)$ vaut $-\mathbf{1}$ lorsque $\alpha = 2\pi$. Comme on le voit sur la formule générale (133), la transformation $\exp(2\pi \mathcal{J}_3)$ vaut l'identité lorsque le spin j est entier, et moins l'identité lorsque le spin est demi-entier. A strictement parler, seuls les cas j entier correspondent à des représentations irréductibles du groupe des rotations. Le cas demi-entier correspond à une représentation dite projective du groupe des rotations. La raison de cette dénomination et de la pertinence des représentations projectives en physique fera l'objet du paragraphe 7. En revanche, les cas j demi-entier comme les cas j entier correspondent à des représentations irréductibles du groupe $SU(2)$.

6 Représentations de SU(3)

On ne va pas donner ici une description complète des représentations irréductibles de $SU(3)$, le lecteur est invité à consulter, par exemple, le livre de William Fulton et Joe Harris, "Representation Theory". On va se contenter ici de quelques exemples, sans expliciter les preuves. Dans le cas du groupe $SU(2)$, on peut obtenir toutes les représentation irréductibles à partir de la représentation fondamentale (doublet) par produit tensoriel complètement symétrisé. En d'autres termes, un tenseur complètement symétrique à n indices $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ consitue une représentation irréductible de $SU(2)$ dont on peut montrer qu'elle est caractérisé par le moment cinétique $j = \frac{n}{2}$. Est-il possible d'appliquer une méthode du même type dans le cas de $SU(3)$? Dans ce cas, il y a deux représentations fondamentales : la 3 et son adjointe la $\bar{3}$. On mettra en haut l'indice d'une représentation 3, en bas celle d'une $\bar{3}$, avec les lois de transformation

$$v^i \to g^i{}_j v^j, \;\; w_i \to w_j (g^{-1})^i{}_j. \tag{134}$$

Ces deux représentations sont de dimension 3. Considérons le produit d'une 3 et d'une $\bar{3}$, c'est-à-dire un tenseur avec un indice en haut et un autre en bas

$$T_i^j \;\to\; g^j{}_k T_l^k (g^{-1})^l{}_i \tag{135}$$

C'est une représentation de dimension $3 \times 3 = 9$ du groupe $SU(3)$. À cause de l'invariance par permutation circulaire, la trace T_l^l est un invariant, c'est-à-dire une représentation unidimensionnelle. On peut retirer au tenseur T_i^j un terme proportionnel à la matrice identité de façon à former un tenseur sans trace :

$$U_i^j = T_i^j - \frac{1}{3}\delta_i^j T_l^l, \quad , U_l^l = 0. \tag{136}$$

Ce tenseur se transforme en lui-même sous les transformations de $SU(2)$. Il forme en fait une représentation irréductible de dimension 8, qui n'est autre que la représentation adjointe. On a donc effectué la décomposition du tenseur T en représentations irréductibles

$$T_i^j = U_i^j + \frac{1}{3}\delta_i^j T_l^l, \quad 9 = 8 + 1. \tag{137}$$

Considérons maintenant le produit de deux représentations 3, c'est-à-dire un tenseur avec deux indices en haut V^{ij}

$$V^{ij} \to g^i{}_k g^j{}_l V^{kl}. \tag{138}$$

Les parties symétriques et antisymétriques de ce tenseur vont se transformer indépendamment l'une de l'autre

$$S^{ij} = \frac{1}{2}(V^{ij} + V^{ji}),\ A^{ij} = \frac{1}{2}(V^{ij} - V^{ji}),\ S^{ij} \to g^i{}_k g^j{}_l S^{kl},\ A^{ij} \to g^i{}_k g^j{}_l A^{kl}. \tag{139}$$

Les tenseurs symétrique S^{ij} et antisymétriques A^{ij} forment des représentations irréductibles de dimensions respectives 6 et 3. On a donc cette fois la décomposition

$$V^{ij} = S^{ij} + A^{ij},\ 9 = 6 + 3. \tag{140}$$

Notons que la représentation de dimension 3 donnée par le tenseur antisymétrique A^{ij} est en fait équivalent à la $\bar{3}$. Pour le voir, on utilise le tenseur complètement antisymétrique à trois indices qui est un tenseur invariant

$$\epsilon_{lmn}(g^{-1})^l{}_i(g^{-1})^m{}_j(g^{-1})^n{}_k = \det(g^{-1})\epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk}. \tag{141}$$

On en déduit que le tenseur $\epsilon_{ijk}A^{jk}$ possède les lois de transformation de la $\bar{3}$.

Considérons désormais le produit de 3 représentations 3, c'est-à-dire un tenseur avec 3 indices en haut W^{ijk}. C'est une représentation de dimension 27 du groupe $SU(3)$

$$W^{ijk} \to g^i{}_l g^j{}_m g^k{}_n W^{lmn}. \tag{142}$$

Bien sur, on pourra trouver des sous-espaces invariants en symétrisant ou en antisymétrisant complètement le tenseur W. Ce n'est pas cependant suffisant, puisque la dimension du tenseur symétrisé est $\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$ et celle du tenseur antisymétrisé $\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3} = 1$, le total est donc seulement de 11. En fait, il faut raisonner sur les permutations : le groupe des permutations de trois objets agit sur le tenseur à trois indices de la façon suivante. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}$

une permutation de trois objets. On lui associe la transformation t_P agissant sur le tenseur W par

$$(t_P W)^{i_1 i_2 i_3} = W^{i_{P_1} i_{P_2} i_{P_3}} \tag{143}$$

Cette action du groupe des permutation commute avec l'action de $SU(3)$. Si l'on trouve un sous-espace invariant sous l'action des permutations, c'est également un sous-espace invariant sous l'action de $SU(3)$. Par exemple, les parties complètement symétriques et antisymétriques, qui sont des sous-espaces invariants sous l'action des permutations, sont également des sous-espaces invariants sous l'action de $SU(3)$. On est donc ramené au problème de décomposer le tenseur en représentations irréductibles sous l'action des permutations : on admettra que chacune de ces composantes est également une représentation irréductible sous l'action de $SU(3)$. On va donner ici, sans preuve, la "recette" pour construire ces représentations. On utilise une représentation graphique, que l'on appelle tableaux de Young. À la représentation 3 est associée une boîte $\square$. Le tenseur W correspond donc au produit de trois boîtes, que l'on numérote $\boxed{1}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3}$. On construit alors des diagrammes en collant ces boîtes, avec les règles suivantes. Le nombre de boîtes ne croît pas entre une ligne et la suivante. Pour $SU(3)$, les diagrammes ne peuvent avoir plus de trois lignes. Les numéros des boîtes croissent de gauche à droite dans chaque ligne et du haut en bas dans chaque colonne. Dans le cas étudié, on obtient quatre tableaux de Young distincts

$$\boxed{1}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}. \tag{144}$$

A chaque tableau est associé un opérateur construit de la façon suivante. On note P_α les permutations de trois objets qui ne mélangent pas entre elles les différentes lignes du tableau et P_β les permutations qui ne mélangent pas les colonnes. On fait alors agir sur le tenseur W l'opérateur

$$(\sum_\beta \epsilon(P_\beta) t_{P_\beta})(\sum_\alpha t_{P_\alpha}), \tag{145}$$

où $\epsilon(P)$ est la signature de la permutation P.

Pour le premier tableau, les permutations ne mélangent pas les lignes puisqu'il n'y en a qu'une. L'opérateur qu'on obtient est alors l'opérateur de symétrisation complète. De même, pour le quatrième tableau, les permutations ne mélangent pas les colonnes, et l'opérateur antisymétrise complètement. Les deux tableaux restants correspondent à un cas intemédiaire, ou l'opérateur est un produit d'un symétriseur partiel et d'un antisymétriseur partiel

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \longrightarrow (1 - T_{P_{13}})(1 + T_{P_{12}}),$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \longrightarrow (1 - T_{P_{12}})(1 + T_{P_{13}}),$$

où P_{12} (P_{13}) est la transposition de 1 et de 2 (de 1 et de 3) Finalement, on obtient la décomposition suivante du tenseur W

$$\begin{array}{rl} W^{ijk} = & \frac{1}{6}(W^{ijk} + t_{kij} + W^{jki} + W^{jik} + W^{kji} + W^{ikj}) \\ + & \frac{1}{3}(W^{ijk} - W^{kij} + W^{jik} - W^{kji}) \\ + & \frac{1}{3}(W^{ijk} - W^{jki} - W^{jik} + W^{kji}) \\ + & \frac{1}{6}(W^{ijk} + W^{kij} + W^{jki} - W^{jik} - W^{kji} - W^{ikj}). \end{array} \tag{146}$$

La dimension de la représentation de $SU(3)$ associée à un tableau de Young se calcule de la façon suivante. Soit n_i le nombre de boîtes dans la i-ième ligne, $i = 1 \cdots 3$. Alors la dimension D de la repésentation de $SU(3)$ s'écrit

$$D = (n_1 - n_2 + 1)(n_2 - n_3 + 1)(\frac{1}{2}(n_1 - n_3) + 1). \tag{147}$$

Dans le cas étudié, la décomposition en représentation irréductibles s'écrit du point de vue des dimensions $27 = \mathbf{10} + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{1}$. Chacune des représentations de dimension 8 est en fait équivalente à la représentation adjointe.

Exercice : Montrer que le produit de 4 boîtes se décompose, pour ce qui concerne les dimensions des représentations irréductibles, suivant $81 = \mathbf{15} \cdot 4 + \mathbf{3} \cdot 3 + \mathbf{6} \cdot 2$.

7 Symétries en mécanique quantique

On considère un système quantique auquel est associé un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. La probabilité de trouver un état $|\psi >$ dans l'état $|\varphi >$, ou probabilité de transition, s'écrit

$$P([\psi], [\varphi]) = \frac{| < \psi|\varphi > |^2}{< \psi|\psi >< \varphi|\varphi >}. \tag{148}$$

Notons que cette probabilité ne change pas si l'on remplace les vecteurs $|\varphi >$ et $|\psi >$ par des vecteurs $\lambda|\varphi >$ et $\mu|\psi >$ qui leur sont proportionnels,

$\lambda \in \mathbf{C}$, $\mu \in \mathbf{C}$. Introduisons une relation d'équivalence telle que deux vecteurs non nuls de $\mathcal{H}$ soient en relation si ils sont proportionnels. On appelle espace projectif associé à $\mathcal{H}$, que l'on notera $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, l'ensemble des classes d'équivalence sous cette relation. $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ est donc l'ensemble des sous-espaces unidimensionnels de $\mathcal{H}$. En fait, l'état d'un système quantique est spécifié par la donnée, non d'un vecteur $|\varphi>$ de l'espace de Hilbert, mais de la droite complexe $[\varphi]$ qui le contient, c'est-à-dire d'un élément de l'espace projectif. Notons que la probabilité (148) est en fait définie entre éléments de l'espace projectif. Notons aussi que l'espace projectif $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ n'est pas un espace vectoriel.

A ce point, on se pose la question de définir une transformation de symétrie en mécanique quantique. Il parait raisonnable d'appeler transformation de symétrie une bijection de l'espace projectif $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ qui laisse invariantes les probabilités de transition. Il existe deux manières très simples de construire de telles transformations. La première est de considérer une transformation unitaire U de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$

$$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad |\varphi> \to |\varphi_U> = U|\varphi>, \quad <\psi_U|\varphi_U> = <\psi|\varphi> . \tag{149}$$

À partir de cette application linéaire de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on construit une application $U_{\mathcal{P}}$ qui agit sur l'espace projectif $\mathcal{P}(\mathcal{H})$

$$U_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to \mathcal{P}(\mathcal{H}), \quad U_{\mathcal{P}}([\varphi]) = [\varphi_U] \tag{150}$$

On vérifie facilement en utilisant l'unitarité de U que $U_{\mathcal{P}}$ conserve les probabilités de transition. Notons que toute transformation unitaire qui diffère de U par une phase conduit à la même transformation projective. Notons également qu'au produit de deux transformations unitaires correspond le composé des transformations projectives, $U_P \circ U'_P = (UU')_P$.

La deuxième méthode consiste à utiliser une transformation anti-unitaire A de l'espace de Hilbert

$$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad |\varphi> \to |\varphi_A> = A|\varphi>, \quad <\psi_A|\varphi_A> = \overline{<\psi|\varphi>}, \tag{151}$$
$$A(\lambda|\varphi> + \mu|\psi>) = \bar{\lambda}A|\varphi> + \bar{\mu}A|\psi> . \tag{152}$$

Dans la deuxième ligne, on a détaillé la propriété d'anti-linéarité de A. Comme dans le cas unitaire, on construit une application $A_{\mathcal{P}}$ de l'espace projectif

$$A_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to \mathcal{P}(\mathcal{H}), \quad A_{\mathcal{P}}([\varphi]) = [\varphi_A], \tag{153}$$

dont on montre facilement qu'elle laisse invariantes les probabilités de transition. Un théorème très célèbre dû à Wigner dit que toute transformation de symétrie peut être construite par l'une ou l'autre de ces méthodes. En d'autres termes, à toute transformation de symétrie agissant sur l'espace projectif $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, on peut associer une transformation unitaire ou une transformation anti-unitaire de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Supposons maintenant que l'on a un ensemble de transformations de symétries. Supposons de plus que cet ensemble forme un groupe sous la composition, et que ce groupe soit isomorphe à l'un des groupes de Lie G étudiés jusqu'ici. On dit alors que l'on a une action du groupe G sur l'espace projectif $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ qui laisse invariantes les probabilités de transition. Une telle action est appelée représentation projective de G dans $\mathcal{H}$, et G est un groupe de symétrie de la théorie quantique.

On aimerait bien passer du groupe des transformations projectives à un groupe de transformations linéaires de l'espace de Hilbert, qui sont plus faciles à manipuler. On a vu qu'a toute transformation projective est associée une transformation unitaire ou anti-unitaire, on a donc une application du groupe G dans l'ensemble des transformations unitaires et anti-unitaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Si l'on se restreint à un groupe G connexe[1] on peut montrer que seules interviennent des transformations unitaires. On sait qu'il y a un arbitraire dans le choix de la transformation unitaire correspondant à une transformation projective. On se demande alors si l'on peut utiliser cet arbitraire pour obtenir une représentation unitaire de G dans l'espace de Hilbert H. A priori, on sait seulement que l'on a une action sur l'espace projectif, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\forall g \in G, \forall g' \in G, U_P(g) \circ U_P(g') = U_P(gg') \Rightarrow \\ &\quad U(g)U(g') = \lambda(g,g')U(gg'),\ |\lambda(g,g')| = 1. \end{aligned} \tag{154}$$

Est-il possible de redéfinir les transformations $U(g)$ de façon à faire disparaître le facteur $\lambda(g,g')$? C'est-à-dire, peut-on trouver des facteurs de mo-

1. C'est-à-dire, en un seul morceau. Le groupe des rotations $SO(3)$ est connexe, le groupe orthogonal $O(3)$ est en deux morceaux, correspondants aux signe ± 1 du déterminant. En physique quantique, seul le renversement du temps est associé à une transformation anti-unitaire.

dule unité $\tau(g)$ tels que

$$\hat{U}(g) = \tau(g)U(g),\ |\tau(g)| = 1,\ \hat{U}(g)\hat{U}(g') = \hat{U}(gg') \Leftrightarrow \lambda(g,g') = \frac{\tau(gg')}{\tau(g)\tau(g')}? \tag{155}$$

On va considérer un exemple bien connu. Le groupe compact $SU(2)$ possède des représentations irréductibles unitaires de dimension finie indexées par un entier ou demi-entier j. La représentation qui correspond à $j = \frac{1}{2}$ est la représentation de définition de $SU(2)$, parfois appelée représentation doublet. Une matrice de $SU(2)$ dans cette représentation peut s'écrire $U(\varphi, \vec{n}) = e^{-\frac{i}{2}\varphi\vec{n}\vec{\sigma}}$, où $\sigma_i, i = 1 \cdots 3$ sont les matrices de Pauli, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $\vec{n}$ est un vecteur unitaire. On sait qu'il existe un morphisme entre le groupe unitaire $SU(2)$ et le groupe des rotations $SO(3)$. Dans ce morphisme, la matrice $U(\varphi, \vec{n})$ a pour image la rotation d'un angle φ autour du vecteur $\vec{n}$. On en déduit que les matrices $U(\varphi, \vec{n})$ et $U(2\pi - \varphi, -\vec{n}) = -U(\varphi, \vec{n})$ correspondent à la même rotation. Comme il y a deux matrices distinctes associées à chaque rotation, le doublet ne constitue pas une représentation du groupe des rotations. Cependant, ces deux matrices correspondent à la même transformation projective sur l'espace projectif des droites complexes dans $\mathbf{C}^2$. On a donc une représentation projective du groupe des rotations.

Essayons de choisir un représentant et un seul pour chaque rotation entre les deux possibles. On peut par exemple limiter l'angle φ à l'intervalle $[0, \pi]$. Notons $\hat{U}(\varphi, \vec{n})$ la matrice unitaire ainsi associée à chaque rotation. Dans ce cas, si l'on se limite à des rotations autour d'un axe fixe $\vec{n}$, on aura la loi de produit

$$\hat{U}(\varphi, \vec{n})\hat{U}(\varphi', \vec{n}) = \begin{cases} \hat{U}(\varphi + \varphi', \vec{n}),\ \varphi + \varphi' \leq \pi \\ -\hat{U}(2\pi - \varphi - \varphi', -\vec{n}),\ \varphi + \varphi' \geq \pi \end{cases} \tag{156}$$

En d'autre termes, on n'a pas la loi de produit habituelle des rotations, mais plutôt

$$\hat{U}(R)\hat{U}(R') = \pm\hat{U}(RR'). \tag{157}$$

On voit que dans ce cas, le facteur unitaire qui apparaît dans la loi de produit est restreint aux valeurs ± 1. Ce facteur ne peut pas être éliminé par une redéfinition des $\hat{U}(R)$. De manière générale, les représentations de $SU(2)$ de spin demi-entier sont des représentations projectives de $SO(3)$, avec une loi de produit comme dans (157).

Les propriétés que l'on vient d'observer dans le cas des groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ se généralisent à bien d'autres cas, et en particulier au groupe de

Poincaré. On peut montrer que, à cause du sous-groupe des rotations, le groupe de Poincaré possède des représentations projectives, mais les facteurs de phase $\lambda(g, g')$ prennent seulement les valeurs ± 1. On va voir que les représentations projectives sont associées aux particules de spin demi-entier.

Pour une discussion beaucoup plus complète des symétries en physique quantique, on pourra consulter le livre de Steven Weinberg, "The Quantum Theory of Fields" tome 1.

8 Représentations du groupe de Poincaré

On va chercher a construire certaines représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré qui jouent un rôle important en physique. Le groupe de Poincaré étant non compact, on sait que l'espace d'une telle représentation doit être un espace de Hilbert de dimension infinie $\mathcal{H}$. Ce sont également des représentations de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. On doit donc avoir des opérateurs anti-hermitiques de l'espace de Hilbert $\mathcal{P}_\mu$, $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ dont les relations de commutation reproduisent celles données en (73,81,82). Dans un premier temps, on va ignorer la présence possible de représentations projectives, et on va raisonner comme si l'on cherchait des représentations vraies du groupe de Poincaré. On note $U(\Lambda, a)$ l'opérateur unitaire de $\mathcal{H}$ qui représente la transformation de Poincaré $T(\Lambda, a)$.

Opérateurs de Casimir :
Dans une représentation donnée de l'algèbre de Poincaré, on peut étudier l'action de polynômes dans les générateurs $\mathcal{P}_\mu$, $\mathcal{M}_{\mu\nu}$. On cherche si il existe parmi ces polynômes des opérateurs de Casimir, c'est-à-dire des opérateurs qui commutent avec tous les générateurs. Dans le cas de l'algèbre de Poincaré, on peut montrer qu'il y a deux opérateurs de Casimir fondamentaux (on peut toujours en construire d'autres, qui sont des polynômes dans ces deux-là). Le premier est l'opérateur $\mathcal{P}^2$ de masse carrée invariante

$$\mathcal{P}^2 = \eta^{\mu\nu}\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu,\ [\mathcal{P}^2, \mathcal{P}_\mu] = 0,\ [\mathcal{P}^2, \mathcal{M}_{\mu\nu}] = 0. \tag{158}$$

Pour construire le second opérateur de Casimir, on commence par introduire le vecteur de Pauli-Lubanski

$$\mathcal{W}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{P}_\nu\mathcal{M}_{\rho\sigma} \tag{159}$$

Il se transforme sous les transformations de Lorentz comme le quadrivecteur $\mathcal{P}^\mu$

$$U(\Lambda, 0)\mathcal{W}^\mu U(\Lambda^{-1}, 0) = \Lambda^\mu{}_\nu \mathcal{W}^\nu. \tag{160}$$

Après quelques calculs, on trouve les relations de commutation

$$[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{W}_\rho] = 0,\ [\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{W}_\rho] = \eta_{\nu\rho}\mathcal{W}_\mu - \eta_{\mu\rho}\mathcal{W}_\nu. \tag{161}$$

On montre alors facilement que l'opérateur $\mathcal{W}^2 = \eta^{\mu\nu}\mathcal{W}_\mu\mathcal{W}_\nu$ est un opérateur de Casimir de l'algèbre de Poincaré. On en déduit que dans une représentation irréductible de l'algèbre de Poincaré, les opérateurs $\mathcal{P}^2$ et $\mathcal{W}^2$ sont proportionnels à l'opérateur identité. En particulier, dans une représentation irréductible de l'algèbre de Poincaré, la masse invariante des états est fixée.

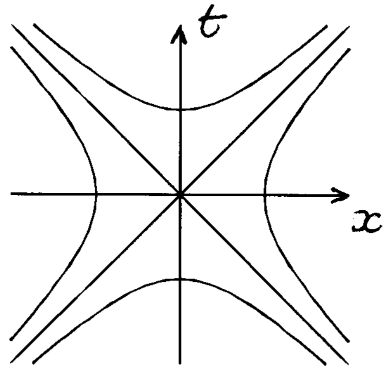
Les générateurs des translations $\mathcal{P}_\mu$ forment un ensemble de quatre opérateurs antihermitiques commutants, qui peuvent donc être diagonalisés en même temps. On choisit une base de l'espace de Hilbert constituée de vecteurs propres sous ces opérateurs

$$\mathcal{P}_\mu|p, \alpha >= -ip_\mu|p, \alpha >,\ \Rightarrow \mathcal{P}^2|p, \alpha >= -p^2|p, \alpha > . \tag{162}$$

Ici, α désigne l'ensemble des nombres quantiques nécessaires pour caractériser un état, en plus de la quadri-impulsion p_μ. Comme nous construisons une représentation irréductible, l'opérateur $\mathcal{P}^2$ est proportionnel à l'opérateur identité. On en déduit que toutes les quadri-impulsions p_μ présentes dans la base ont la même valeur de p^2. Une fois fixée cette valeur de p^2, quelles sont les quadri-impulsions p_μ qui apparaissent dans la base ? En utilisant l'identité (79), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\mu U(\Lambda, 0)|p, \alpha >&= U(\Lambda, 0)(U(\Lambda^{-1}, 0)\mathcal{P}^\mu U(\Lambda, 0))|p, \alpha > \\ &= U(\Lambda, 0)(\Lambda^\mu{}_\nu\mathcal{P}^\nu)|p, \alpha >= i((\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)U(\Lambda, 0)|p, \alpha > .\end{aligned} \tag{163}$$

Le vecteur $U(\Lambda, 0)|p, \alpha >$ est donc un vecteur propre de $\mathcal{P}^\mu$ avec la valeur propre $(\Lambda p)^\mu$. On en déduit que si une quadri-impulsion apparaît dans la base, toutes celles qui s'en déduisent par une transformation de Lorentz doivent apparaître également. L'ensemble des quadri-impulsions qui se déduisent de l'une d'entre elles par transformation de Lorentz est appelé une orbite sous le groupe de Lorentz.



Comme on le voit sur la figure ci-dessus, ces orbites sont de plusieurs types. Il y a des hyperboloïdes à une seule nappe situés à l'extérieur du cône de lumière ($p^2 < 0$). Cette situation (quadri-impulsion de genre espace) ne peut pas être réalisée pour une particule ou une assemblée de particules. On n'étudiera pas ce cas ici. Il y a également des hyperboloïdes à deux nappes situés à l'intérieur du cône de lumière. La nappe d'énergie positive $p^2 > 0$, $p^0 > 0$ n'est pas reliée à l'autre $p^2 > 0$, $p^0 < 0$ par une transformation de Lorentz [2] . Chacune d'entre elles forme donc une orbite. À nouveau, seules les orbites à énergie positive sont intéressantes du point de vue de la physique, seul ce cas sera donc étudié ici. Le dernier type d'orbite est celui constitué par le cône de lumière lui-même, passé ($p^2 = 0$, $p^0 < 0$) ou futur ($p^2 = 0$, $p^0 > 0$). Seul le cas d'une énergie positive sera étudié.

On va donc dans la suite se limiter à deux types de représentations, que l'on appelle représentations massives ($p^2 = M^2 > 0, p^0 > 0$), et représentations de masse nulle ($p^2 = 0, p^0 > 0$). Notons que deux quadri-impulsions sur la même orbite sont toujours reliées par une transformation de Lorentz. Dans la suite, il sera utile, pour chacun des deux types de représentation, de faire le choix d'une quadri-impulsion de référence, et aussi d'une transformation de Lorentz qui envoie la quadri-impulsion de référence en un point quelconque de l'orbite.

Représentation massive $\quad \mathbf{p^2 = M^2 > 0}$, $\mathbf{p^0 > 0}$

On utilisera dans ce cas la quadri-impulsion de référence qui correspond à la

2. On rappelle qu'on s'est restreint aux transformations orthochrones, qui ne changent pas le signe de l'énergie.

particule au repos

$$k = (M, \vec{0}). \tag{164}$$

Considérons maintenant une quadri-impulsion arbitraire $p = (p^0, \vec{p})$, $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$, sur la même orbite que k. On cherche une transformation de Lorentz $L(p) \in SO^{\uparrow}(1,3)$ qui fasse passer de k à p

$$L(p)k = p. \tag{165}$$

Il y a de nombreuses possibilités, mais un choix simple pour $L(p)$ est un boost de Lorentz le long de $\vec{p}$

$$L(p) = \begin{pmatrix} \frac{p^0}{M} & \frac{\vec{p}^t}{M} \\ \frac{\vec{p}}{M} & m(p) \end{pmatrix}, \quad m(p) = \mathbf{1}_3 + \frac{\vec{p}\vec{p}^t}{M(M+p^0)}. \tag{166}$$

Il peut être commode d'écrire cette transformation comme une exponentielle

$$L(p) = e^{\alpha \vec{n}\vec{K}^{\text{déf}}}, \;\; \vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \;\; e^{\alpha} = \frac{p^0 + |\vec{p}|}{M}. \tag{167}$$

Représentation de masse nulle $\quad \mathbf{p^2 = 0}$, $\mathbf{p^0 > 0}$

Il n'y a pas dans ce cas de référentiel au repos. On choisit arbitrairement une quadri-impulsion de référence

$$k = (\kappa, 0, 0, \kappa). \tag{168}$$

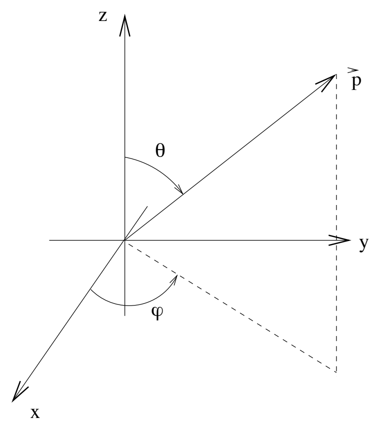
On considère maintenant une quadri-impulsion arbitraire $p = (p^0 = |\vec{p}|, \vec{p})$ sur le cône de lumière futur. On cherche une transformation de Lorentz $L(p)$ qui fait passer de k à p. On choisit de faire d'abord un boost dans la direction Oz

$$B(p) = e^{\alpha K_3^{\text{déf}}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 & \operatorname{sh}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}, \quad e^{\alpha} = \frac{p^0}{\kappa}, \tag{169}$$

de façon que l'on ait

$$B(p)k = \begin{pmatrix} p^0 \\ 0 \\ 0 \\ p^0 \end{pmatrix}. \tag{170}$$

On fait ensuite une rotation qui amène le trivecteur impulsion de la direction Oz à la direction voulue. En utilisant des coordonnées sphériques pour $\vec{p}$, il est très facile de construire une telle rotation.



$$\vec{p} = p^0 \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \; 0 < \varphi < 2\pi, \; 0 < \theta < \pi.$$

On prendra

$$R(p) = e^{-\varphi J_3^{\text{déf}}} e^{-\theta J_2^{\text{déf}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{171}$$

et au total $L(p) = R(p)B(p)$.

Base de l'espace de Hilbert

Comme on l'a vu plus haut, l'état $U(L(p),0)|k,\alpha>$ est un état propre des opérateurs P_μ de valeur propre

$$(L(p)k)_\mu = p_\mu \tag{172}$$

On utilise cette propriété pour construire une base du sous-espace propre d'impulsion p_μ à partir de la base $|k,\alpha>$ du sous-espace propre correspondant à l'impulsion de référence k_μ. On *définit* le vecteur $|p,\alpha>$ par

$$|p,\alpha> = U(L(p),0)|k,\alpha> . \tag{173}$$

Soit maintenant Λ une transformation de Lorentz quelconque. Son action sur un état quelconque de la base s'écrit

$$U(\Lambda,0)|p,\alpha> = U(L(\Lambda p),0)U^{-1}(L(\Lambda p),0)U(\Lambda,0)U(L(p),0)|k,\alpha> . \tag{174}$$

On définit alors la transformation de Lorentz $W(\Lambda, p)$ par

$$W(\Lambda, p) = L(\Lambda p)^{-1}\Lambda L(p). \tag{175}$$

Cette transformation possède la propriété suivante

$$W(\Lambda, p)k = k. \tag{176}$$

On dit que la transformation $W(\Lambda, p)$ appartient au groupe d'isotropie, ou petit groupe, de la quadri-impulsion de référence k dans le groupe de Lorentz. On en déduit que le vecteur $U(W(\Lambda, p), 0)|k, \alpha >$ appartient toujours au sous-espace propre d'impulsion k. Si W est un élément quelconque du petit groupe de k, en développant sur une base de ce sous-espace propre, on écrit

$$U(W, 0)|k, \alpha >= \sum_\beta \mathcal{D}(W)^\beta_\alpha |k, \beta > . \tag{177}$$

Puisque les opérateurs unitaires $U(\Lambda, a)$ forment une représentation de Poincaré, les matrices $\mathcal{D}(W)$ doivent former une représentation du petit groupe de k. Si cette représentation est connue, on en déduira la représentation du groupe de Poincaré dans l'espace de Hilbert en utilisant (174) et (177)

$$\begin{aligned} U(\Lambda, 0)|p, \alpha >= U(L(\Lambda p), 0)U(W(\Lambda, p), 0)|k, \alpha > \\ = \textstyle\sum_\beta \mathcal{D}(W(\Lambda, p))^\beta_\alpha U(L(\Lambda p), 0)|k, \beta >= \sum_\beta \mathcal{D}(W(\Lambda, p))^\beta_\alpha |\Lambda p, \beta > . \end{aligned} \tag{178}$$

La méthode que l'on est en train d'utiliser pour construire les représentations du groupe de Poincaré s'appelle la méthode des représentations induites. On induit une représentation du gros groupe (Poincaré) à partir d'une représentation d'un de ses sous-groupes, ici le petit groupe d'un quadrivecteur k. On montre facilement que si la représentation du sous-groupe n'est pas irréductible, celle du groupe de Poincaré ne l'est pas non plus. On peut également montrer que si la représentation du sous-groupe est irréductible, celle du groupe l'est aussi.

On va maintenant étudier plus précisément la structure du petit groupe de k dans les deux cas massif et non massif.

Représentation massive

Une transformation $W \in SO^\uparrow(1, 3)$ satisfait à l'équation (176) si

$$W \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow W \in SO(3), \tag{179}$$

On dit que le petit groupe d'un vecteur de genre temps est le groupe des rotations $SO(3)$. Les représentations irréductibles du groupe $SO(3)$ sont unitaires et de dimension finie. Si on autorise les représentations projectives, elles sont caractérisées par un entier ou demi-entier j, que l'on appellera le spin. La représentation de spin j possède une base $|j, m>$, $-j \leq m \leq j$ et m est entier (demi-entier) si j l'est. Dans cette représentation, les éléments de la matrice qui représente un élément W de $SO(3)$ seront notés ${\mathcal{D}_j}^{m'}{}_m(W)$. On en déduit qu'une base de cette représentation projective unitaire irréductible de Poincaré est donnée par les vecteurs $|p, j, m>$, et l'action du groupe sur ces vecteurs est donnée par

$$\begin{array}{c} U(\mathbf{1}, a)|p, j, m >= e^{-iap}|p, j, m > \\ U(\Lambda, 0)|p, j, m >= \sum_{m'} {\mathcal{D}_j}^{m'}{}_m(W(\Lambda, p))|\Lambda p, j, m' > . \end{array} \tag{180}$$

On peut interpréter ces états comme l'ensemble des états d'une particule libre de masse M et de spin j.

Considérons le cas particulier d'une transformation R appartenant au sous-groupe $SO(3)$ du groupe de Lorentz. On aura alors

$$W(R, p) = L(Rp)^{-1}RL(p) \tag{181}$$

Dans le cas d'une représentation massive, l'expression de $L(p)$ est donnée dans l'équation (166). On vérifie alors facilement que l'on a l'équation

$$L(Rp) = RL(p)R^{-1} \ \Rightarrow \ W(R, p) = R \tag{182}$$

L'action des des rotations est donc très simple dans la base considérée

$$U(R, 0)|p, j, m >= \sum_{m'} {\mathcal{D}_j}^{m'}{}_m(R)|Rp, j, m' > . \tag{183}$$

Il est intéressant d'observer que c'est la même formule que celle qu'on obtiendrait dans le cas non relativiste pour l'action d'une rotation sur les états d'une particule de spin j. Notons également que les représentations que l'on vient de construire sont des représentations projectives de Poincaré avec un facteur de phase ± 1 lorsque j est demi-entier, et sont des représentations de Poincaré au sens habituel lorsque j est entier.

Représentation de masse nulle

Une transformation $W \in SO^{\uparrow}(1,3)$ satisfait à l'équation (176) si

$$W \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}. \tag{184}$$

On cherche donc les transformations de Lorentz qui laissent invariant le vecteur de genre lumière k. Au lieu de les chercher directement, il est plus simple de regarder des transformations infinitésimales. Dans ce cas, on doit déterminer quels sont les éléments de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz qui annihilent k. En utilisant les expressions (86) et (87) des générateurs dans la représentation de définition, on trouve facilement

$$J_3^{\rm def} k = 0,\ (J_2^{\rm def} + K_1^{\rm def})k = 0,\ ,(J_1^{\rm def} - K_2^{\rm def})k = 0. \tag{185}$$

J_3 est le générateur infinitésimal des rotations autour de Oz, qui laissent bien le quadrivecteur k inchangé. Les trois générateurs $j = J_3$, $p_1 = J_2 + K_1$ et $p_2 = J_1 - K_2$ forment une base de l'algèbre de Lie du petit groupe de k. Leurs seules relations de commutation non triviales s'écrivent

$$[j, p_1] = p_2, \quad [j, p_2] = -p_1. \tag{186}$$

Cette algèbre n'est autre que l'algèbre de Lie du groupe des déplacements (translations et rotation) du plan, que l'on note $ISO(2)$. Le petit groupe d'un vecteur de genre lumière est donc un sous-groupe du groupe de Lorentz isomorphe à $ISO(2)$ Il nous faut maintenant construire les représentations unitaires du groupe $ISO(2)$. Ce n'est pas un groupe compact, et donc ses représentations unitaires sont en général de dimension infinie. Pour le voir, le plus simple est de suivre un chemin identique à celui que nous avons utilisé dans le cas de Poincaré. On remarque que l'on dispose de deux opérateurs p_1 et p_2 qui commutent, et qui peuvent donc être diagonalisés en même temps. On utilise une base $|\vec{a}, \alpha >$ d'états propres de ces opérateurs

$$p_i|\vec{a}, \alpha >= -ia_i|\vec{a}, \alpha >, \quad i = 1, 2. \tag{187}$$

En fixant la valeur de l'opérateur de Casimir $p_1^2 + p_2^2$, on se restreint à une longueur fixée du vecteur $\vec{a}$. D'autre part, en considérant l'action d'une rotation plane, on se convainc que tous les vecteurs qui se déduisent les uns des autres par une rotation doivent être inclus dans la base. On obtient donc une représentation de dimension infinie de $ISO(2)$, sauf dans un cas : celui où $\vec{a} = \vec{0}$. Les représentations avec $\vec{a} \neq \vec{0}$ ne peuvent pas être interprétés comme des états à une particule. En fait, dans tous les cas connus une particule possède une nombre finis d'états à impulsion fixée. Dans la suite, on va donc se limiter au cas $\vec{a} = \vec{0}$. On a alors fixé l'action des opérateurs $p_i,\ i = 1, 2$, il reste uniquement à préciser l'action des rotations planes. Comme c'est un groupe abélien, ses représentations irréductibles sont unidimensionnelles, et déterminées par l'action de j sur un vecteur de base que l'on notera $|s>$, $j|s>= is|s>$. Pour des représentations vraies, s devrait être entier. Ici, on va autoriser des valeurs demi-entières de s et donc des représentations projectives. Finalement, une base pour une représentation irréductible de masse nulle du groupe de Poincaré est donnée par les vecteurs $|p, s>$ avec $p^2 = 0$ et s fixé. Il y a donc un seul vecteur d'impulsion donnée, alors qu'il y en a $2j+1$ dans le cas massif. Le nombre quantique s est appelé hélicité de la particule de masse nulle considérée, on le calcule en utilisant $J_3|k, s>= is|k, s>$. Si l'on se souvient que l'impulsion $\vec{k}$ est par convention dans la direction Oz, on peut interpréter l'hélicité s comme la projection du spin le long de l'impulsion.

Vecteur de Pauli-Lubanski
On va maintenant étudier l'action des opérateurs $\mathcal{W}_\mu$ de Pauli-Lubanski ainsi que de l'opérateur de Casimir $\mathcal{W}^2$ dans une représentation irréductible. À nouveau, on est conduit à étudier séparément le cas d'une représentation massive et celui d'une représentation de masse nulle.

Représentation massive
Comme on se restreint à une représentation irréductible, l'opérateur $\mathcal{W}^2$ est proportionnel à l'opérateur identité, et on peut donc étudier son action sur un vecteur quelconque de la base. Il sera commode d'utiliser un état dont l'impulsion est l'impulsion de référence

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu|k, j, m>= -ik_\mu|k, j, m>= -iM\delta_{\mu 0}|k, j, m>, \\ \Rightarrow\ \mathcal{W}^\mu|k, j, m>= -\tfrac{iM}{2}\epsilon^{\mu 0\rho\sigma}\mathcal{M}_{\rho\sigma}|k, j, m>,\ \Rightarrow\ \mathcal{W}^0|k, j, m>= \mathbf{0}, \\ \mathcal{W}^k|k, j, m>= \tfrac{iM}{2}\epsilon^{klm}\mathcal{M}_{lm}|k, j, m>= -iM\mathcal{J}_k|k, j, m>. \end{aligned} \tag{188}$$

Dans le référentiel au repos, le vecteur de Pauli-Lubanski se réduit donc, à un facteur près, à l'opérateur moment cinétique. Le calcul de l'action de l'opérateur de Casimir $\mathcal{W}^2$ est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2|k,j,m>= -\textstyle\sum_{i=1}^3 \mathcal{W}^i\mathcal{W}^i|k,j,m>= iM\sum_{i=1}^3 \mathcal{W}^i\mathcal{J}_i|k,j,m> \\ = iM\textstyle\sum_i \mathcal{J}_i\mathcal{W}^i|k,j,m>= M^2\vec{\mathcal{J}}^2|k,j,m>= M^2 j(j+1)|k,j,m> \end{aligned} \quad (189)$$

On voit donc que si l'on connait la masse de la particule considérée, l'opérateur de Casimir $\mathcal{W}^2$ caractérise son spin.

Représentation de masse nulle
On agit sur le vecteur dont l'impulsion est l'impulsion de référence $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$, et on calcule calmement l'action de chaque composante du vecteur de Pauli-Lubanski

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^0|k,s>&= \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\mathcal{P}_i\mathcal{M}_{jk}|k,s>= -\sum_{i=1}^3 \mathcal{P}_i\mathcal{J}_i|k,s>= \kappa s|k,s>, \\ \mathcal{W}^1|k,s>&= (\epsilon^{1023}\mathcal{P}_0\mathcal{M}_{23} + \epsilon^{1302}\mathcal{P}_3\mathcal{M}_{02})|k,s>= -i\kappa(\mathcal{J}_1 - \mathcal{K}_2)|k,s>= \mathbf{0}, \\ \mathcal{W}^2|k,s>&= (\epsilon^{2013}\mathcal{P}_0\mathcal{M}_{13} + \epsilon^{2301}\mathcal{P}_3\mathcal{M}_{01})|k,s>= -i\kappa(\mathcal{J}_2 + \mathcal{K}_1)|k,s>= \mathbf{0}, \\ \mathcal{W}^3|k,s>&= \epsilon^{3012}\mathcal{P}_0\mathcal{M}_{12}|k,s>= -i\kappa\mathcal{J}_3|k,s>= \kappa s|k,s> . \end{aligned} \quad (190)$$

On déduit de ces équations que la valeur de l'opérateur de Casimir $\mathcal{W}^2$ est toujours nulle dans une représentation de masse nulle

$$\mathcal{W}^2|p,s>= \mathbf{0}. \quad (191)$$

On remarque également la relation de proportionnalité

$$\mathcal{W}^\mu = is\mathcal{P}^\mu \quad (192)$$

On a démontré cette relation quand les opérateurs agissent sur le vecteur $|k,s>$, mais, du fait que les opérateurs $\mathcal{W}^\mu$ et $\mathcal{P}^\mu$ se transforment de la même façon sous les transformations de Lorentz, cette relation reste vrai sur tout vecteur de la représentation de masse nulle. On peut donc caractériser l'hélicité s comme le coefficient de proportionnalité entre le vecteur de Pauli-Lubanski $\mathcal{W}^\mu$ et le vecteur énergie-impulsion $\mathcal{P}^\mu$.