Zoologie p-locale

———————

GdT Opérations cohomologiques logarithmiques
Université Paris 13

Frédéric Déglise

décembre 2004

Table des matières

Introduction

Le but de cet exposé est d'introduire la plupart des théories de cohomologie orientées qui interviendront par la suite. On supposera qu'il existe une bonne catégorie homotopique de MU-modules, afin qu'on puisse les construire en utilisant la méthode de [EKMM].

Le spectre BP de Brown-Peterson ; si temps le permet, il serait intéressant d'en énoncer la cohomologie. Les K-théories de Morava, $K(n)$. Enoncer le fait que ce sont des spectres en anneaux et qu'il existe un morphisme de Künneth. Si temps le permet : les théories , , ... Références : [Rav,Rav1], [HS2] pour une présentation des -théories de Morava, [Rud] et enfin [EKMM] pour l'idée de la construction.

Dans cet exposé, nous complétons l'étude des spectres orientés.

Le premier résultat les concernant est que tout spectre orienté rationnel est un spectre d'Eilenberg-Mac Lane, associé à un groupe abélien sans torsion.

Pour poursuivre l'étude, il apparait donc qu'il s'agit d'élucider les phénomènes de torsion dans les spectres orientés. Pour cela, on sépare la torsion en localisant par rapport à un entier premier p, ce qui revient à travailler avec des $\mathbb{Z}_{(p)}$-modules. Le procédé de localisation de la catégorie des spectres – procédé qui correspond au produit tensoriel parc $\mathbb{Z}_{(p)}$ dans les groupes abéliens – sera décrit dans l'exposé suivant.

Si E est un spectre, on dispose donc d'un spectre p-local $E_{(p)}$ qui est définit par la propriété $E^*_{(p)}(X) = E^*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.

Pour tout cet exposé, on fixe un entier premier p, et on travaille avec des spectres p-locaux sauf mention explicite du contraire.

Nous allons exhiber dans la catégorie des spectres orientés p-locaux des "briques" élémentaires qui constituent (à l'image des motifs purs) les facteurs directs des spectres orientés p-locaux (à préciser).

1 Spectres p-locaux et BP

1.1 Préliminaires

Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre.

Rappelons que toute loi de groupe formelle sur R est isomorphe à une loi de groupe formelle p-typique. Par ailleurs, il existe une loi de groupe formelle p-typique universelle (F^V, V).

Pour construire cette loi de groupe formelle – et son anneau associé – on utilise l'universalité de l'anneau de Lazard. En effet, on sait que toute loi de groupe formelle sur R correspond de manière biunivoque à un morphisme $\theta : L \to R$, équivalent à un morphisme $\theta : L \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \to R$.

Or, le fait pour la loi F d'être p-type se lit dans le morphisme θ : si $(m_i)_{i\geq 1}$ désignent les générateurs de L, F est p-typique équivaut à dire que $\theta(m_i) = 0$ si $i \neq p^t - 1$.

Pour construire V, ainsi que F^V, il nous suffit donc d'exhiber un morphisme $\Phi : L \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \to V$. Le fait que V est universel se traduit par le fait que Φ est un épimorphisme scindé. Ainsi, V est un facteur direct de $L \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ dont le projecteur est naturellement donné par

$$\Phi : L \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \to L \otimes \mathbb{Z}_{(p)}, m_i \mapsto \begin{cases} m_i & \text{si } i = p^t - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous partons de l'idée vague qu'un spectre orienté E est déterminé par le couple (F^E, E_*) formé par sa loi de groupe formelle et son anneau (E_* désigne au choix les groupes d'homotopie de E ou la cohomologie/homologie du point). Cette idée est légitimée par les faits suivants :

1. L'anneau de Lazard muni de sa loi canonique (F^L, L) est universel parmis les lois de groupe formel ce qui correspond au fait que le spectre de cobordisme complexe MU muni de son orientation canonique est universel parmis les théories cohomologiques orientés.
2. Toute loi de groupe formel sur $\mathbb{Q}$ est canoniquement isomorphe à la loi de groupe formelle additive ce qui correspond au fait que tout spectre orienté rationnel est canoniquement isomorphe à un spectre d'Eilenberg-Mac Lane.

Dès lors, il est naturel de penser que le couple (F^V, V) correspond à un spectre p-local. La construction de ce spectre, noté BP et appelé spectre de Brown-Peterson, suit la correspondance évoquée précédemment entre spectres orientés et loi de groupe formel, construction (et idée) due à Quillen.

1.2 Scinder $MU_{(p)}$ (d'après Quillen)

D'après l'heuristique qui précède, l'endomorphisme Φ de $L \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ doit correspondre à un endomorphisme e de $MU_{(p)}$.

1.1.– Soit $i : L \to L \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\iota : V \to L$ les morphismes canoniques et posons $\bar{F}^L = i_*(F^L)$, $\bar{F}^V = \iota_*(F^V)$ vues comme des lois de groupes formelles sur $L \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.

Le point fondamental dans le théorème de Cartier concernant les lois de groupes formelles p-typiques est que $\bar{F}^L$ et $\bar{F}^V$ sont strictement isomorphes (on le déduit en montrant que le log de $\bar{F}^V$ est à coefficients dans $L \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$).

Proposition 1.2. *Soit (E, x_E) un spectre (en anneau) orienté, F^E_x la loi de groupe formelle correspondant à x_E. Alors, il y a une bijection canonique entre :*

1. Les morphismes de spectres en anneaux $\sigma : MU \to E$.

2. Les orientations de E.

3. Les séries formelles dans $E_*[[x_E]]$ qui sont de la forme

$$f = x_E + \sum_{k>0} a_k . X_E^{k+1}$$

*où $a_k \in E_{2k}$ (*i.e.* de degré $-2k$).*

4. Les lois de groupe formel sur E_* strictement isomorphes à F^x.

définie par :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 4 \\ \sigma : MU \to E & \mapsto & \sigma_*(x_{MU}), y_E & \mapsto & \varphi(y_E), f & \mapsto & f^{-1}F_x^E\big(f(x), f(y)\big) \end{array}$$

où x_{MU} désigne l'orientation canonique de MU, $\varphi : E^*(\mathbb{C}P^\infty) \to E^*[[x_E]]$ désigne l'isomorphisme induit par l'orientation x_E et $\sigma_* : MU^*(\mathbb{C}P^\infty) \to E^*(\mathbb{C}P^\infty)$ (morphisme d'anneaux).

Démonstration. L'équivalence entre 2, 3 et 4 est évidente. Pour construire une réciproque $3 \to 1$, le point clé est le lemme suivant :

Lemme 1.3. *Soit E un spectre orientable.*

Le morphisme induit par cap-produit

$$E^*(MU) \to \mathrm{Hom}_{E_*}(E_*(MU), E_*)$$

est un isomorphisme (Hom_{E_*} désigne les morphismes homogènes de E_*-modules gradués).

De plus, les éléments de $E^0(MU)$ qui correspondent à des morphismes d'anneau $MU \to E$ sont envoyés à travers l'isomorphisme ci-dessus sur les morphismes de E_*-algèbres gradués de degré 0.

Par dualité, $E_*(\mathbb{C}P^\infty)$ est le E_*-module gradué libre engendré par $\{b_i^E, i \in \mathbb{N}^*\}$, base duale de $\{x_E^i, i \in \mathbb{N}^*\}$. Par ailleurs, le morphisme $\mathbb{C}P^\infty \simeq MU(1) \to \Sigma^2 MU$ induit un isomorphisme de E_*-algèbres (de degré 2),

$$E_*(\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{\psi} E_*(MU).$$

Si on pose $\beta_{i+1}^E = \psi(b_i^E)$, la réciproque de $1 \to 3$ est obtenue grâce à la flèche

$$\begin{array}{ccc} 2 & \to & 3 \\ x_E + \sum_{k>0} a_k . x_E^{k+1} & \mapsto & (\beta_{k+1}^E \mapsto a_k, k > 0) \end{array}$$

$\square$

Plaçons nous dans les conditions de la proposition précédente. Considérons un morphisme de spectres en anneau $\sigma : MU \to E$, ainsi que la série formelle F_y^E qui lui correspond dans le point 4.

Il résulte de la démonstration précédente que si F^{MU} désigne la loi de groupe formelle canonique de MU, et $\sigma_* : MU_* \to E_*$ le morphisme induit par σ, $F = \sigma_*(F_{MU})$.

Pour la définition qui suit, nous exploitons la variante p-locale évidente de la proposition précédente. Nous considérons $MU_{(p)}$ comme orienté par l'image x de l'orientation canonique. Ainsi, la loi de groupe formel qui lui correspond sur ${MU_{(p)}}_* = L \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ n'est autre que $\bar{F}^L$.

Définition 1.4. On définit l'endomorphisme de Quillen de $MU_{(p)}$ comme le morphisme de spectres p-locaux en anneaux $e : MU_{(p)} \to MU_{(p)}$ qui correspond par la proposition précédente à la loi de groupe formel $\bar{F}^V$ sur $MU_{(p)}$ définie en 1.1.

Il résulte de la proposition précédente que la série formelle correspondant à l'orientation $e_*(x)$ de $MU_{(p)}$ n'est autre que $\bar{F}^V$. Par ailleurs, l'endomorphisme de ${MU_{(p)}}_*$ induit par e est bien l'isomorphisme Φ, comme prévu.

Remarque 1.5. Nous avons précisé l'analogie entre lois de groupe formel et spectres orientés. Nous avons montré l'assertion suivante :

Soit E un spectre orienté, F sa loi de groupe formel.

Un morphisme d'anneaux $L \xrightarrow{\theta} E_*$ se relève en un morphisme de spectres en anneaux $MU \xrightarrow{\sigma} E$ (*i.e.* $\sigma_* = \theta$) si et seulement si la loi de groupe formel qui correspond à θ est strictement isomorphe à F.

On peut ajouter que le relèvement σ est unique.

Lemme 1.6. *L'endomorphisme e est un idempotent.*

En effet, Φ est un idempotent. L'assertion d'unicité dans la remarque précédente permet donc de conclure puisque e^2 est un relèvement de $\Phi^2 = \Phi$.

Définition 1.7. On définit le spectre de Brown-Peterson BP comme l'image dans $\mathscr{SH}$ de l'idempotent de Quillen e.

Par définition, BP est un spectre en anneaux p-local. Le morphisme canonique $MU \to BP$ correspond à une orientation canonique de BP.

Par ailleurs, BP_* est l'image du projecteur $e_* = \Phi$, donc $BP_* = V$. La loi de groupe formel associé à l'orientation canonique de BP est la loi de groupe formelle p-typique universelle F^V. De ce point de vue, BP est l'analogue p-local de MU, pour les lois de groupe formel p-typiques.

1.8.– Rappelons que $BP_* = V$ est la $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre graduée libre engendrée par les générateurs d'Hazewinkel $(v_i)_{i \geq 1}$ $v_1, v_2, ...]$ définis dans l'exposé 6.

1.3 Structure des spectres p-locaux

Rappelons que $MU_{(p)_*} = L \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}[x_i; i > 0]$ où x_i a pour degré $2i$. Or par définition, $V = \mathbb{Z}_{(p)}[x_i; i = p^t - 1]$. Il en résulte que

$$L \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \bigoplus_{i \neq p^t - 1, r > 0} V.x_i^r.$$

Poursuivant notre analogie entre lois de groupe formel et spectres orientés, nous allons relever cette décomposition au niveau des spectres.

Pour tout couple (i, r), $i \neq p^t - 1$, $r > 0$, on définit

$$\Sigma^{ri} BP \xrightarrow{m_i^r \vee \iota} MU_{(p)} \vee MU_{(p)} \xrightarrow{\mu} MU_{(p)}$$

où m_i désigne par abus le morphisme $S^{ri} \to MU_{(p)}$ correspondant à m_i^r et ι désinge l'inclusion canonique.

En considérant le bouquet de ces morphismes, on obtient le morphisme

$$\bigvee_{(i,r)} \Sigma^{ri} BP \to MU_{(p)},$$

et comme il induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie, c'est un isomorphisme dans $\mathscr{SH}$.

Nous verrons plus bas que BP est indécomposable. Le scindage ci-dessus est donc optimal.

Citons pour finir le théorème de Boardman :

Théorème 1.9 (Boardman)**.** *Soit E un spectre p-local tel que pour tout i, $\pi_i(E)$ est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module libre de type fini, et $H_*(E)$ est sans torsion.*

Alors, $E \simeq \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \Sigma^\lambda BP$.

1.4 Cohomologie de BP

Rappelons que l'algèbre de Steenrod modulo p est l'algèbre des opérations du spectres en anneau $K\mathbb{F}_p$:

$$\mathscr{A}_p = [S^* \wedge K(\mathbb{F}_p), K(\mathbb{F}_p)] = H^*(BP; \mathbb{F}_p).$$

C'est une algèbre de Hopf engendrée par les opérations

1. Sq^i (degré i) pour $i > 0$ si $p = 2$.
2. β (degré 1) et P^i (degré $2i(p-1)$) si p impair.

La description (due à Milnor) l'algèbre de Hopf duale permet de définir des éléments primitifs $Q_0, Q_1, ...$ de cette algèbre de Hopf (qui engendre le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel des éléments primitifs si $p = 2$). On note (Q_0) l'idéal à gauche et à droite de $\mathscr{A}_p$ engendré par Q_0.

Proposition 1.10. *Le morphisme canonique $K\big(\mathbb{Z}_{(p)}\big) \to BP$ induit un isomorphisme :*

$$H^*(BP;\mathbb{F}_p) \simeq \mathscr{A}_p/(Q_0).$$

Indication. On commence par montrer que $H^*(MU;\mathbb{F}_p)$ est un $\mathscr{A}_p/(Q_0)$-module libre (probablement à l'aide de la suite spectrale d'A.-H.). Or, $H^*(BP;\mathbb{F}_p)$ est un facteur direct de ce module libre. Comme $H^*(BP;\mathbb{F}_p)$ et $\mathscr{A}_p/(Q_0)$ sont de même dimension sur $\mathbb{F}_p$, on peut conclure. □

Remarque 1.11. Cela montre que BP est indécomposable, au moins si $p = 2$ (car il en est de même de $\mathscr{A}_p/(Q_0)$.

2 BP-algèbres

2.1 Modification des groupes d'homotopie

Les spectres que nous allons construire dorénavant sont obtenus à partir d'un spectre E déjà connu en tuant ou inversant des classes dans le groupe d'homotopie $\pi_*(E)$.

Nous allons utiliser le fait que ce problème associé au spectre E et a un ensemble de classes de $\pi_*(E)$ admet une solution universelle, quitte à enrichir la catégorie des spectres.

Soit E un spectre en anneau, et μ sa multiplication.

Pour tout $a \in \pi_d(E)$, la multiplication par a sur l'anneau $\pi_*(E)$ est représentée par le morphisme de spectre :

$$a \boxtimes 1_E : S^d \wedge E \xrightarrow{a \wedge 1_E} E \wedge E \xrightarrow{\mu} E.$$

2.1.1 Annulation

On veut tout d'abord résoudre le problème suivant :

Il existe un spectre en anneau E', un morphisme $\sigma : E \to E'$ tel que $\sigma_*(a)$ est nul, σ_* désignant le morphisme induit sur les groupes d'homotopie.

On peut en effet faire la construction suivante : considérons un triangle distingué :

$$\Sigma^d E \xrightarrow{a \boxtimes 1_E} E \xrightarrow{\sigma} E/a \xrightarrow{+1}$$

Notons que E/a n'est défini qu'à isomorphisme (non canonique) près. On peut de même relever le morphisme $\mu : E \wedge E \to E$ en un morphisme $\mu/a : E/a \to E/a$ qui soit compatible avec le morphisme σ.

Le problème est que l'on ne peut pas démontrer les axiomes qui ferait de $(E/a, \mu/a)$ un spectre en anneaux. Il manque de la srtucture sur E pour faire cette construction.

2.1.– La démarche pour résoudre ce problème est la suivante ; il faut :

1. trouver une catégorie de modèle $\mathscr{M}$ monoïdale $\wedge_{\mathscr{M}}$ dont la catégorie homotopique associée soit la catégorie $\mathscr{SH}$ et telle que le foncteur dérivé (à gauche) de $\wedge_M$ soit le produit tensoriel sur $\mathscr{SH}$.
2. l'objet E correspond donc à au moins un objet X de $\mathscr{M}$. Il faut encore trouver un tel objet X qui soit muni d'une structure de monoïde (commutatif) dans $\mathscr{M}$ relevant la structure de monoïde de E dans $\mathscr{SH}$.

Exemple 2.2. Pour le point 1, il y a deux candidats : la catégorie des S-modules ou la catégorie des spectres symétriques.

Pour le point 2, on peut procéder directement à partir d'un cas concret (par exemple MU), voir qu'il admet de manière naturel un modèle dans $\mathscr{M}$ et montrer que ce modèle est un monoïde. Le problème est qu'il n'est pas toujours commutatif – l'axiome d'associativité peut faire défaut. Une manière plus canonique de procéder est d'utiliser la catégorie des A_∞-algèbres, dans laquelle les monoïdes ne vérifient des relations qu'à "homotopie près".

Supposant qu'on puisse résoudre les deux problèmes précédents pour le spectre E, on peut définir E/a comme le "cone" (ou cofibre homotopique) de $a \boxtimes 1_E$ dans $\mathscr{M}$ et obtenir une structure de monoïde sur E/a dans $\mathscr{M}$. La classe de E/a dans $\mathscr{SH}$ est alors une solution du problème universelle.

2.1.2 Inversion

Il s'agit de résoudre le problème universel :

Il existe un spectre en anneau E', un morphisme $\sigma : E \to E'$ tel que $\sigma_*(a)$ est inversible, σ_* désignant le morphisme induit sur les groupes d'homotopie.

On considère pour cela la tour suivante (télescope associé à a) :

$$E \to ... \to \Sigma^{-id} E \xrightarrow{\Sigma^{-i(d+1)} a \boxtimes 1_E} \Sigma^{-(i+1)d} E \to ...$$

Supposant à nouveau que l'on soit dans les conditions de 2.1, la colimite homotopique de cette tour admet un modèle canonique qui est un monoïde de $\mathscr{M}$ et on note $a^{-1}E$ sa classe dans $\mathscr{SH}$.

Par construction,

$$\pi_*(E[a^{-1}]) = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}} \left(\pi_*(E).1/a^i \right) = \pi_*(E)[a^{-1}]$$

et $E[a^{-1}]$ est une solution universelle du problème de l'inversion.

Remarque 2.3. Soit E un spectre et E' un spectre qui s'en déduit par annulation ou inversion de classes d'homtopie.

Nous avons vu que sous l'hypothèse 2.1, si E est un spectre en anneau (commutatif), E' hérite d'une structure canonique de spectre en anneau (commutatif).

Notons que si E est (de plus) orientable, alors E' est aussi orientable, et ceci sans l'hypothèse 2.1. Sous cette hypothèse, on obtient qu'une orientation de E induit canoniquement une orientation de E'.[1]

2.1.3 Exemple : BP

Dans tout ce qui suit, nous partons de l'hypothèse que MU satisfait les conditions 2.1.

On peut obtenir une construction plus rapide de BP grâce à la méthode d'annulation des classes d'homotopie. Le noyau du morphisme $e : L \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \to V$ est l'idéal $(x_i; i \neq p^t - 1)$. On peut alors vérifier que

$$BP = MU_{(p)}/\{x_i; i \neq p^t - 1)\}.$$

La méthode de construction de Quillen est valable sans recours à l'hypothèse 2.1. En fait, elle montre directement que BP est une solution universelle du problème d'annulation pour $MU_{(p)}$ et I.

2.2 K-théories de Morava

Rappelons la définition de la loi de Honda :

On note

$$\theta_n : V \to \mathbb{F}_p, v_i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où (v_i) désignent les générateurs d'Hazewinkel (cf 1.8).

La loi de groupe formel p-typique canonique de hauteur n est alors $F_n = \theta_{n*}(F^V)$.

On peut fabriquer aisément un spectre orienté ayant cette loi de groupe formel :

Définition 2.4. Adoptons les notations précédentes. On définit les spectres suivants :

1. le n-ème spectre de K-théorie de Morava connexe :

$$k(n) = BP/\{p, v_i; i \neq n\}.$$

2. le n-ème spectre de K-théorie de Morava périodique :

$$K(n) = k(n)[v_n^{-1}].$$

[1]Si l'on n'impose pas aux spectres orientés d'avoir une loi de spectres en anneau, on obtient une structure beaucoup plus souple vis-à-vis des procédés d'annulation ou d'inversion. Par contre, un tel spectre (dit "$\mathbb{C}$-marqué" par Rudyak) ne dispose pas d'une loi de groupe formel. On peut voir qu'un tel spectre correspond à un MU-module, et beaucoup de propriétés des spectres orientés sont déjà vraies dans cette théorie.

Ces spectres sont des BP-algèbres. Ils sont donc canoniquement orientés, on a des morphismes canoniques :

$$BP \xrightarrow{\Theta^n} k(n) \to K(n)$$

et les anneaux de ces théories cohomologiques sont :

$$k(n)_* = \mathbb{F}_p[v_n]$$
$$K(n)_* = \mathbb{F}_p[v_n, v_n^{-1}]$$

Notons que v_n est un élément de degré homologique $2(p^n - 1)$.

Par définition, le morphisme canonique Θ^n induit le morphisme θ_n sur les groupes d'homotopie, donc la loi de groupe formel de $k(n)$ est la loi de Honda de hauteur n. Comme inverser un élément ne modifie pas la loi de groupe formel, $K(n)$ admet aussi la loi F_n pour loi de groupe formel.

Le nom de ces variantes provient de ce que :

1. $k(n)$ est connexe (ie $\pi_{-i}(k(n)) = 0$ si $i < 0$).
2. Le morphisme $\Sigma^{2(p^n-1)}K(n) \to K(n)$ de multiplication par v_n est un isomorphisme.

Une propriété importante des spectres de K-théorie de Morava connexe est qu'il vérifie la formule de Kunneth :

Proposition 2.5. *Soient X, Y deux espaces pointés.*
Alors, le morphisme canonique

$$K(n)^*(X) \otimes_{K(n)_*} K(n)^*(Y) \to K(n)^*(X \wedge Y)$$

est un isomorphisme.

Indication. Remarquons que tout $\pi_*(K(n))$-module gradué est libre. Il en résulte tout $K(n)$-module est un bouquet de copies de $K(n)$. On déduit de cela, comme dans le cas du spectre d'Eilenberg-Mac Lane $K(G)$, que $K(n)_*$ vérifie la formule de Kunneth. □

Remarque 2.6. De plus, on pose $K(0) = K\mathbb{Q}$ et $K(\infty) = K(\mathbb{F}_p)$. On voit les spectres $K(n)$ comme des intermédiaires entre ces deux spectres...

2.3 Panorama

Pour terminer, on dresse un tableau des différentes BP-algèrbes qu'on peut construire grâce à la méthode d'annulation ou d'inversion de classes d'homotopie (ces spectres sont donc caractérisés par leur anneau de coefficients) :

$$\begin{aligned}
k(n) &\text{ tel que } k(n)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_n] \\
K(n) &\text{ tel que } K(n)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_n, v_n^{-1}] \\
BP\langle n\rangle &\text{ tel que } BP\langle n\rangle_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, ..., v_n] \\
E(n) &\text{ tel que } E(n)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, ..., v_n, v_n^{-1}] \\
P(n) &\text{ tel que } P(n)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_{n+1}, v_{n+2}, ...]
\end{aligned}$$

Les propriétés et relations qu'on obtient sur ces spectres est bien sur directement analogue aux propriétés et relations de leur anneau de coefficients. Ainsi, on obtient une tour :

$$... \to BP\langle 1\rangle \to BP\langle 0\rangle = K(\mathbb{Z}_{(p)}).$$

dont les cofibres homotopiques sont décrites dans le triangle distingué canonique (suite cofibre) :

$$\Sigma^{2(p^n-1)}BP\langle n\rangle \xrightarrow{v_n \boxtimes 1} BP\langle n\rangle \to BP\langle n-1\rangle \xrightarrow{+1}$$