# L'identification du logarithme

———————

# GdT Opérations cohomologiques logarithmiques Université Paris 13

Frédéric Déglise

mars 2005

## Table des matières

## Introduction

Dans tout cet exposé, on fixe un couple d'entiers positifs $(p, n)$ tel que $p$ est premier.

On note $K(n)$ le $n$-ième spectre de K-théorie de Morava connexe. On désigne par $L$ le foncteur de localisation par rapport à $K(n)$.

Si $R$ est un spectre et $X$ un espace non pointé, on pose pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $R_n^\wedge(X) = [S^n, R \wedge \Sigma_+^\infty X]$ [1].

## 1 Définition

**1.1**.– Soit $R$ une $S$-algèbre commutative.

On note $\mathrm{GL}_1(R)$ l'espace défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_1(R) & \xrightarrow{j} & \Omega^\infty_-(R) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \pi_0(R)^\times & \xrightarrow{i} & \pi_0(R) \end{array}$$

où $p$ désigne la projection canonique et $i$ l'inclusion canonique.

Alors, $\mathrm{GL}_1(R)$ est un quasi-groupe $E_\infty$ (*i.e.* "group-like"). C'est donc l'espace des lacets d'un spectre $-1$-connexe que l'on note $\mathrm{gl}_1(R)$. Le spectre $\mathrm{gl}_1(R)$ est appelé le *spectre des unités* de $R$.

On vérifie aisément que pour tout espace $K$, $H^0(K; \mathrm{gl}_1(R)) \simeq (R^0K)^\times$.

**1.2**.– Rappelons le foncteur $L$ se factorise pas $\Omega^\infty$ : $L = \Phi \circ \Omega^\infty$ où $\Phi$ désigne le *foncteur de Bousflied-Kuhn* de la catégorie des espaces vers la catégorie des spectres.

Avec les notations et hypothèses qui précèdent, on associe à $j$ une application pointée $shift(j) : \mathrm{GL}_1(R) \to \Omega^\infty(R), x \mapsto j(x) - j(u)$, où $u$ désigne le neutre pour la structure de quasi-groupe sur $GL(R)$ (c'est l'élément qui s'envoie sur 1 dans $\pi_0(R)^\times$).

On définit le logarithme comme la composée

$$l : \mathrm{gl}_1(R) \to L\mathrm{gl}_1(R) \simeq \Phi\mathrm{GL}_1(R) \xrightarrow{\Phi(j)} \Phi\Omega^\infty(R) \simeq LR.$$

Le logarithme induit en homologie un morphisme :

$$l_* : (R^0K)^\times = H^0(K; \mathrm{gl}_1(R)) \to H^0(K; LR) = LR^0(K).$$

Le but de ce qui suit est de caractériser $l_*$ à l'aide des opérations puissances. Pour cela, on peut remplacer $R$ par $LR$ *i.e.* supposer sur $R$ est $K(n)$-local.

[1] Ceci nous semble être la convention de Rezk

## 2 Eléments logarithmiques

On fixe une $S$-algèbre commutative $R$ et un espace $K$.
On pose $Y = \Omega_-^\infty S^0$.

Rappelons les structures algébriques sur $R_0^\wedge(Y)$ [2].

1. $R_0^\wedge(Y)$ est un module sur $R_0^\wedge(*)$.
2. Il est muni de deux lois de $R_0^\wedge(*)$-algèbres unitaires, notées $\bullet$ et $\circ$.
3. Il existe des morphismes de $R_0^\wedge(*)$-algèbres

$$\pi : (R_0^\wedge(Y), +, \bullet) \to R^0(*)$$
$$\tau : (R_0^\wedge(Y), +, \circ) \to R^0(*)$$

tels que $\tau(u \bullet v) = \tau(u)\pi(v) + \pi(u)\tau(v)$.

4. $R_0^\wedge(Y)$ est une $R_0^\wedge(*)$-algèbre de Hopf.
5. On dispose d'opérations puissances

$$\begin{array}{rcl} op : R_0(Y) \times R^0(K)^\times & \to & R^0(K) \\ (u, x) & \mapsto & op_u(x) \end{array}$$

$R_0^\wedge(*)$-linéaire par rapport à la première variable.

*Remarque* 2.1. On fera attention que Rezk note . pour la loi que nous avons notée $\bullet$. Notre notation permet d'éviter la confusion avec le produit scalaire.

*Définition* 2.2. On appelle *élément logarithmique* pour $R$ tout $v \in R_0^\wedge(Y)$ vérifiant les propriétés :

(La) $\tau(v) = 1$.

(Lb) $\forall x \in R_0^\wedge(Y),\ x \circ v = \tau(x).v$.

Remarquons tout de suite que si il existe un élément logarithmique pour $R$, celui-ci est unique. En effet, soit $v$ et $v'$ deux éléments logarithmiques, alors :

$$v = 1.v = \tau(v').v = v' \circ v = v \circ v' = \tau(v).v' = 1.v' = v'.$$

En particulier, si $R$ (resp. $R'$) est une $S^0$-algèbre commutative, $v$ (resp. $v'$) un élément logarithmique pour $R$ (resp. $R'$) alors pour tout morphisme $\phi : R \to R'$ de $S^0$-algèbre $\phi_*(v) = v'$.

Dans le théorème qui suit, nous verrons que pour toute $S^0$-algèbre commutative $R$, il existe un unique élément logarithmique.

[2] Ici, Rezk considère plutôt le groupe $R_0^\wedge(\Omega^\infty S^0)$ qui est un facteur direct de $R_0^\wedge(Y)$. Toutefois, l'élément logarithmique qu'il définit vit naturellement dans ce dernier groupe ce qui explique notre choix

# 3 Théorème de l'élément logarithmique de Rezk

## 3.1 Rappels préliminaires

Soit $E$ un spectre et $K$ un espace. On pose par ailleurs $X = \Sigma_+^\infty K$ et $Y = \Omega_-^\infty E$. On aura besoin des trois types de morphismes suivants :

**3.1**.– Considérons en premier lieu le morphisme d'adjonction de la paire d'adjoints $(\Omega^\infty, \Sigma^\infty)$ évalué sur l'espace $\Omega^\infty E$ : $(\Omega^\infty E) \to \Omega^\infty\Sigma^\infty(\Omega^\infty E)$.

On note $\lambda_E : LE \to L\Sigma^\infty\Omega^\infty E$ le morphisme qui s'en déduit par application du foncteur de Bousfield-Kunh $\Phi$.

Par ailleurs, on obtient facilement l'isomorphisme
$\Sigma_+^\infty\Omega_-^\infty E = S^0 \wedge \Sigma^\infty\Omega^\infty E$.
On en déduit un monomorphisme scindé $\Sigma^\infty\Omega^\infty E \xrightarrow{i} \Sigma_+^\infty\Omega_-^\infty E$.
On note $\lambda_E^+ = Li \circ \lambda_E : LE \xrightarrow{\lambda_E} L\Sigma^\infty\Omega^\infty E \xrightarrow{Li} L\Sigma_+^\infty Y$.

**3.2**.– Soit $\epsilon_E^+ : \Sigma_+^\infty Y \to E$ le morphisme d'adjonction associé à la paire $(\Omega_-^\infty, \Sigma_+^\infty)$.

**3.3**.– On considère enfin

$$\delta_{E,K}^+ : Y \times K \to \Omega_-^\infty(E \wedge X)$$

morphisme obtenu par adjonction à partir de

$$\epsilon_E^+ \wedge 1 : \Sigma_+^\infty Y \times K \to E \wedge X.$$

Ces morphismes vérifient les trois relations suivantes :

**Lemme** 8.2. $LE \xrightarrow{\lambda_E^+} L\Sigma_+^\infty Y \xrightarrow{L\epsilon_E^+} LE = 1.$

**Proposition** 8.3.

$$\begin{tikzcd} & (L\Sigma_+^\infty Y) \wedge X \arrow[d, "L\Sigma_+^\infty \delta_{E,K}^+"] \\ L(E \wedge X) \arrow[ur, "\lambda_E^+ \wedge 1"] \arrow[r, "\lambda_{E\wedge X}^+"'] & L\Sigma_+^\infty\Omega_-^\infty(E \wedge X) \end{tikzcd}$$

commute.

**Lemme** 8.4 Dans le cas où $E = S^0$,

$$\begin{tikzcd} LS^0 \wedge \Sigma_+^\infty Y \arrow[r, "\lambda_{S^0}^+ \wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge\epsilon_{S^0}^+"'] & (L\Sigma_+^\infty Y) \wedge \Sigma_+^\infty Y \arrow[d, "L\Sigma_+^\infty m"] \\ LS^0 \arrow[r, "\lambda_{S^0}^+"] & L\Sigma_+^\infty Y \end{tikzcd}$$

commute.

Dans le dernier lemme, $m : Y \times Y \to Y$ désigne la multiplication canonique sur $\Omega_-^\infty S^0$.

### 3.2 Enoncé

La fin de l'exposé se concentre sur la preuve du théorème suivant :

*Théorème* 3.4 (Rezk). *Soit $R$ une $S$-algèbre.*

*Il existe un unique élément $v \in R_0^{\wedge}(\Omega_-^{\infty} S)$ tel que :*

$$\textit{pour tout espace } K,\ \forall \alpha \in (R^0 K)^{\times},\ l_*(\alpha) = op_v(\alpha).$$

*De plus, $v$ est l'élément logarithmique pour $R$.*

### 3.3 Preuve

Fixons pour la preuve un espace $K$ arbitraire. On reprend les notations de 3.1 avec $E = S^0$ : $X = \Sigma_+^{\infty} K$ et $Y = \Omega_-^{\infty} S^0$.

*Etape 1.* définition de $v$

On considère l'unité $\eta_R : S^0 \to R$ de la $S$-algèbre $R$ et on définit $v$ comme la composée

$$LS^0 \xrightarrow{\lambda_{S^0}^+} L\Sigma_+^{\infty} Y \xrightarrow{\eta_R \wedge 1} R \wedge L\Sigma_+^{\infty} Y.$$

C'est donc l'image de $\lambda_{S^0}^+ \in \pi_0(L\Sigma_+^{\infty} Y)$ par le morphisme d'Hurewicz $\pi_0(L\Sigma_+^{\infty} Y) \to R_0^{\wedge}(Y)$ (rappelons que par hypothèse, $R = LR$).

*Etape 2.* relation vérifiée par $v$

Soit $\alpha \in (R^0 K)^{\times} = [K, \Omega_-^{\infty} \mathrm{gl}_1(R)]$. On note $\tilde{\alpha}$ son image par l'isomorphisme d'adjontion $[K, \Omega_-^{\infty} \mathrm{gl}_1(R)] \simeq [X, \mathrm{gl}_1(R)]$.

Il s'agit de calculer $l_*(\alpha)$ qui est égal à la composée

$$X \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathrm{gl}_1(G) \xrightarrow{l} LR.$$

Or d'après la proposition 8.6 de Rezk, cette flèche s'écrit encore comme la composée

$$X \xrightarrow{(1)} LX \xrightarrow{\lambda_X^+} L\Sigma_+^{\infty}\Omega_-^{\infty} X \xrightarrow{L\Sigma_+^{\infty}\Omega_-^{\infty}\tilde{\alpha}} L\Sigma_+^{\infty}\Omega_-^{\infty}\mathrm{gl}_1(R) \xrightarrow{L\tilde{j}} LR$$

où (1) est le morphisme de localisation et $\tilde{j}$ est le morphisme obtenu par adjonction de l'inclusion $\mathrm{GL}_1(R) \to \Omega_-^{\infty} R$.

On s'intéresse au deuxième membre de l'égalité. Rappelons que $op_v(\alpha) = eval_v(P(\alpha))$.

Rappelons que $P(\alpha) \in R^0(Y \times K)$ est l'application obtenue par adjonction à partir de la composée

$$Y \times K \xrightarrow{\delta_{S^0,K}^+} \Omega_-^{\infty}(S^0 \wedge X) \xrightarrow{\Omega_-^{\infty}(\tilde{\alpha})} \mathrm{GL}_1(R) \xrightarrow{j} \Omega_-^{\infty} R.$$

*i.e.* $P(\alpha) : \Sigma^\infty_+(Y\times K) \xrightarrow{\Sigma^\infty_+\delta^+_{S^0,K}} \Sigma^\infty_+\Omega^\infty_-(S^0\wedge X) \xrightarrow{\Sigma^\infty_+\Omega^\infty_-(\tilde{\alpha})} \mathrm{gl}_1(R) \xrightarrow{\tilde{j}} R.$

Or par définition, $v = (\eta_R \wedge 1)\circ \lambda^+_{S^0}$. Revenant à la définition du produit slant, on en déduit facilement que $eval_v(P(\alpha))$ est la composée

$$X \xrightarrow{(1)} LX = S^0 \wedge LX \xrightarrow{\lambda^+_{S^0}\wedge 1} L\Sigma^\infty_+ Y \wedge LX = L\Sigma^\infty_+(Y\times K)$$
$$\xrightarrow{L\Sigma^\infty_+\delta^+_{S^0,K}} L\Sigma^\infty_+\Omega^\infty_-(S^0\wedge X) \xrightarrow{L\Sigma^\infty_+\Omega^\infty_-(\tilde{\alpha})} L\mathrm{gl}_1(R) \xrightarrow{L\tilde{j}} LR.$$

Il nous suffit maintenant pour conclure d'appliquer le lemme 8.3 de la section 3.1 dans le cas $E = S^0$ : $\lambda^+_X = L\Sigma^\infty_+\delta^+_{S^0,K}\circ(\lambda^+_{S^0}\wedge 1)$.

*Etape 3.* <u>$v$ est un élément logarithmique</u>
Il nous reste à vérifier les relations de la définition 2.2.

(La) Rappelons que $\tau : R^\wedge_0(Y) \to R^0(*)$ est induit par $\epsilon^+_{S^0} : \Sigma^\infty_+ Y \to S^0$. Donc $\tau(v)$ est la composée

$$\begin{tikzcd} LS^0 \arrow[r, "\lambda^+_{S^0}"] & L\Sigma^\infty_+ Y \arrow[r, "\eta_R\wedge 1"] \arrow[d, "L\epsilon^+_{S^0}"'] & R\wedge L\Sigma^\infty_+ Y \arrow[d, "1_R\wedge L\epsilon^+_{S^0}"] \\ & S^0 \arrow[r, "\eta_R"] & R. \end{tikzcd}$$

La relation résulte donc du lemme 8.2 de la section 3.1.

(Lb) Cette relation pour $x$ variant dans $R^\wedge_0(Y)$ se déduit directement du diagramme commutatif du lemme 8.4 de la section 3.1 en lui appliquant le foncteur $\pi_0(R\wedge ?)$.