Coefficients p-adiques

———————

GdT Opérations cohomologiques logarithmiques
Université Paris 13

Frédéric Déglise

Février 2004

Table des matières

Introduction

Dans cet exposé, on présente une approche d'une théorie encore en devenir de coefficients p-adiques due à Takeshi Tsuji (cf [3]). Le but est de définir l'analogue des systèmes locaux dans le cadre du calcul différentiel p-adiques de manière à refléter la structure des formes différentielles - telle que la filtration de Hodge. Le résultat clé que l'on espère est un lien entre ces coefficients p-adiques et leur analogue étale, dont la structure principale est celle d'une représentation du groupe de Galois.

Cet espoir se base en premier lieu sur la correspondance de Riemann-Hilbert en géométrique analytique.

Soit X une schéma algébrique sur $\mathbb{C}$.

Connections intégrables Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.

Une connection sur $\mathcal{E}$ est un opérateur

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

tel que

$$\nabla(a.x) = a.\nabla(x) + da \otimes x$$

pour a une section de $\mathcal{O}_X$ et x une section de $\mathcal{E}$.

Considérons $(x_1, ..., x_n)$ des coordonnées locales de X, provenant d'un morphisme rationnel étale $X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

Alors, $(dx_1, ..., dx_n)$ est une base de Ω^1_X et on peut écrire

$$\nabla(x) = \sum_i dx_i \otimes \nabla_i(x).$$

On peut alors prolonger ∇ en une suite de morphismes

$$DR(\mathcal{E}, \nabla) = \mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} ... \Omega^n_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{d}_{\nabla} \Omega^{n+1}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

en posant

$$d^n_{\nabla}(\omega \otimes x) = d\omega \otimes x + \sum_i (dx_i \wedge \omega) \otimes \nabla_i(x).$$

On dit que la connection ∇ est *intégrable* si la suite ci-dessus est un complexe. Alors, le complexe en question est appelé complexe de De Rham associé au module à connection $(\mathcal{E}, \nabla)$.

Remarque 0.1.
1. Il suffit de vérifier que $d^2_{\nabla} \circ d^1_{\nabla} = 0$.
2. Il est équivelent de se donner un module connection intégrable ou un module quasi-cohérent sur l'algèbres $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels sur $\mathcal{O}_X$. Ceci fait le lien avec la terminologie plus classique de $\mathcal{D}$-modules.

On peut définir des images inverses exceptionnelles pour les modules à connections.

On dit qu'un module à connection $(\mathcal{E}, \nabla)$ est *holonome* si pour tout point rationnel x de X, désignant par $i_x : \{x\} \to X$ l'immersion canonique, $R^n i_x^!(\mathcal{E})$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Dans cette définition, on peut tout aussi bien utiliser un complexe borné de modules à connection.

Correspondance de Riemann-Hilbert Au $\mathbb{C}$-schéma X, on associe l'espace analytifié $X^{an} = X(\mathbb{C})$. De même, si M est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, on lui associe un faisceau M^{an} sur l'espace analytique X^{an}.

Théorème 0.2 (?,Borel)**.** *Le foncteur DR^{an} induit une équivalence de catégories triangulées monoïdales entre :*

1. *La catégorie des complexes bornés de modules à connections qui sont holonomes et* ***réguliers****.*
2. *La categorie des complexes bornés de faisceaux sur l'espace analytique $X(\mathbb{C})$ à cohomologie constructible.*

Voir [2].

Remarque 0.3.
1. Cette équivalence commute de plus aux images inverses et images directes. (Pourquoi pas aux images inverses et directes exceptionelles ?)
2. Elle est t-exacte au regard des t-structures régulières-holonomes à gauche et perverse à droite. C'est-à-dire qu'elle envoie module à connection régulière holonome sur faisceau pervers.
3. La condition de régularité est relié au problèmes de compactification de X - elle s'exprime en premier lieu pour les courbes.

Le cas p-adique Après cette longue introduction, nous sommes prêt à tenter de réaliser une telle correspondance dans le cadre p-adique.

On fixe donc $\mathcal{O}_K$ un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k parfait et de corps des fractions K.

Nous allons définir l'analogue des modules à connection ainsi que l'analogue du foncteur de De Rham.

La principale difficultée bien sûr est que nous considérons le cas d'inégale caractéristique pour les coefficients. Par ailleurs, le corps K n'est pas algébriquement clos - ce qui fait apparaître les représentations galosiennes[1].

[1] Malgré tout, la correspondance que nous n'arriverons même pas à terminer en toute généralité ne traite que du cas local alors que le cas le plus important reste le cas global d'un corps de nombre.

1 F-isocristaux filtrés convergents

On défini la catégorie des F-isocristaux filtrés convergents sur un log-schéma (X, M) sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$.

Ces coefficients correspondent aux modules à connections dans le cas analytiques. La situation est ici compliquée par les points suivants :

1. On veut tenir compte de la structure de Hodge correspondant aux formes différentielles.
2. On veut définir directement des modules "réguliers holonomes", ce qui oblige à considérer une compactification, et surtout son bord dont le rôle est ici joué par la log-structure. La condition de régularité a pour analogue la condition de convergence ci-dessous.
3. Les coefficients comptant pour des "système locaux sur k", il leur est associé un automorphisme de Frobenius analogue à celui que l'on trouve sur des schémas de caractéristique p[2].

1.1 Cas affine pour une base non ramifiée

Ici, on se place dans le cas où K est non ramifié, $\mathcal{O}_K$ étant alors l'anneau des vecteurs de Witt, et $X = \mathrm{Spf}(A)$.

Complexe de De Rham à pôles logarithmiques On suppose qu'on s'est donné $(t_1, ..., t_n) \in A^d$ tel que :

1. $(dt_1, ..., dt_n)$ est une base de $\Omega^1_{A/\mathcal{O}_K}$.
2. la log-structure M sur A est donnée par le diviseur $t_1...t_n = 0$ que l'on suppose à croisements normaux : *i.e.* le diviseur d'équation $t_i = 0$ est vide ou lisse sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$.

Dans cette situation, on définit la module des formes différentielles à pôles logarithmiques (d'ordre 1) de $(\mathrm{Spf}(A), D)$:

$$\Omega^1_A(\log D) = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} A.\frac{dt_i}{t_i}.$$

Ici, lorsque t_i est inversible, $A.\frac{dt_i}{t_i} = A.dt_i$.

On pose défini alors le complexe de De Rham à pôles logarithmiques $\Omega^*_A(\log D) = \Lambda^* \Omega^1_A(\log D)$, complexe de Koszul associé à $\Omega^1_A(\log D)$.

Frobenius On se donne un relèvement $\varphi : A \to A$ du Frobenius de $A \otimes k$ tel que pour tout entier i tel que t_i est non inversible, $\varphi(t_i)$ est de la forme $u.t_i^p$ pour un élément inversible u de A.

[2]Dans l'idée de l'auteur, l'importance de cet opérateur tient au "manoeuvres" nécessaires pour mener à bien le calcul différentiel en caractéristique p.

Définition 1.1. Un F-isocristal filtré convergent sur $(\mathrm{Spf}A, D)$ est la donnée de :

1. un $A \otimes K$-module $\mathcal{E}$ projectif fini.
2. une connection intégrable
$$\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1_A(\log D) \otimes_A \mathcal{E}, x \mapsto \frac{dt_i}{t_i} \otimes \nabla_i(x).$$
3. une filtration décroissante (bornée) $Fil^i\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$ par des facteurs directs.
4. un isomorphisme $\Phi : \mathcal{E} \otimes_A A_\varphi \to \mathcal{E}$.

vérifiant les conditions suivantes :

(i) Φ est horizontal par rapport à ∇
i.e. le diagrame suivant commute :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \otimes_A A_\varphi & \xrightarrow{\nabla\otimes 1} & \Omega^1_A(\log D) \otimes_A \mathcal{E} \otimes_A A_\varphi \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes Phi} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1_A(\log D) \otimes_A \mathcal{E}. \end{array}$$

(ii) *Transversalité de Griffiths* : $\nabla(Fil^i\mathcal{E}) \subset \Omega^1_A(\log D) \otimes_A Fil^{i-1}\mathcal{E}$.

(iii) *Convergence* : pour tout $x \in \mathcal{E}$, pour tout réel $\delta > 0$, pour tout multi-indice $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n$,
$$\frac{p^{[\delta.|\underline{\alpha}|]}}{\underline{\alpha}!} \prod_i \prod_{0\leq j\leq n_i} \left(\Delta_i(x) - j\right)$$
tend vers 0 lorsque $|\underline{\alpha}|$ tend vers $+\infty$, pour la topologie p-adique induite sur $\mathcal{E}$.

On note $MF^\nabla\big((A, D)/K\big)$ la catégorie correspondante.

Cette définition est en fait indépendante des choix effectués, ce qui justifie l'abus de notation. Plutôt que de chercher à pourver cette indépendance, on se contente de prendre la définition ci-dessus comme une motivation en attendant l'étude plus générale qu'on peut faire grâce à l'utilisation des log-structures.

1.2 Cas général

Le problème est de donner une version géométrique des définitions précédentes. Pour cela, on a principalement besoin de la théorie des log-schémas.

1.2.1 log-schémas

Nous appelerons simplement schéma semi-stable sur $\mathcal{O}_K$ tout $\mathcal{O}_K$-schéma régulier X dont la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux[3].

Localement, un tel schéma correspond à une algèbre régulière A, et des éléments $t_1, ..., t_s \in A^\times$ paramétrisant la fibre spéciale. On obtient une définition canonique de cette paramétrisation en la remplaçant par le monoïde (multiplicatif)

$$\{f = a.t_1^{\alpha_1}...t_r^{\alpha_r} \mid a \in A^\times, \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^r\}$$

puisque celui-ci n'est autre que le monoïde des fonctions ivnersibles hors de $\mathrm{Spec} A \otimes k$.

Définition 1.2. Soit X un schéma.

Une log-structure sur X est la donnée d'un faisceau en monoïde $\mathcal{M}_X$ sur $X_{\text{ét}}$ et d'un morphisme de monoïde $\mathcal{M}_X \xrightarrow{\alpha} (O_X, \times)$ tel que $\alpha^{-1}\mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{O}_X^\times$ est un isomorphisme.

Un schéma muni d'une log-structure est appelé un log-schéma.

Les morphismes de log-schémas se définissent de manière évidente, et on en déduit une catégorie.

Exemple 1.3.

1. Si X est un schéma, le faisceau $\mathcal{O}_X$ vu comme un monoïde à travers sa structure multiplicative, est une log-structure sur X. On l'appele la log-structure triviale. Ainsi, la catégorie des schémas est une sous-catégorie pleine de la catégorie des log-schémas.
2. Soit $X/\mathcal{O}_K$ un schéma admettant réduction semi-stable.
   On pose $\mathcal{M}^{can}(V) = \{f \in \mathcal{O}_X(V) \mid f|_{V_K} \text{ est inversible}\}$. Ceci définit une log-structure sur X.

Soit $X/\mathcal{O}_K$ un schéma muni d'une log-structure $(\mathcal{M}, \alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{O}_X)$. Notons qu'on en déduit un morphisme $\mathcal{O}_K^\times \to \mathcal{M}$ via l'isomorphisme $\alpha^{-1}\mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{O}_X^\times$. Autrement dit, un morphisme de log-schéma $(X, \mathcal{M}) \to (\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K^\times)$.

Notons $\mathcal{M}^+$ la complétion en groupe de $\mathcal{M}$. On définit le complexe de De Rham logarithmique du log-schéma X comme le quotient du faisceau de $\mathcal{O}_K$-modules

$$\Omega^1_{X/\mathcal{O}_K} \oplus (\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{M}^+)$$

par les relations

1. $(df, 0) = (0, f \otimes \lambda)$ pour toute section λ de $\mathcal{M}$ et $f = \alpha(\lambda)$.
2. $(0, 1 \otimes \lambda) = 0$ pour tout λ dans l'image de $\mathcal{O}_K^\times \to \mathcal{M}$.

Nous noterons $\Omega^*_{X/\mathcal{O}_K}(\log \mathcal{M})$ le complexe de Koszul associé à ce faisceau de $\mathcal{O}_K$-modules.

[3]On dit aussi par abus que la fibre générique X_K a une réduction semi-stable

Ce complexe est fonctoriel par rapport aux morphismes de $\mathcal{O}_K$-log-schémas.

Lorsque X est un schéma semi-stable, et qu'on le munit de la structure logarithmique $\mathcal{M}$ correspondant à la fibre spéciale, $\Omega^1_{X/\mathcal{O}_K}(\log \mathcal{M})$ est localement libre de type fini.

Remarque 1.4. On peut définir plus généralement le complexe de De Rham logarithmique associé à un morphisme de log-schémas. Il existe une notion de lissité sur les log-schémas qui équivaut au fait que le complexe de De Rham logarithmique est localement libre de type fini - qui se traduit aussi en termes d'épaississement dans le style de Grothendieck. Il est alors assez aisé de voir qu'un log-schéma sur $\mathcal{O}_K$ est log-lisse si et seulement si il est semi-stable - moyennant une bonne condition de finitude.

1.2.2 Frobenius

Définition 1.5. Soit $(X_0, \mathcal{M}_0)$ un log-schéma sur k.

On définit le Frobenius absolu de $(X_0, \mathcal{M}_0)$ comme l'endomorphisme de log-schéma définit par les morphismes

1. $F_{X_0} : X_0 \to X_0$ automorphisme de Frobenius absolu de X.
2. $F_X^{-1}\mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_X, \lambda \mapsto p.\lambda$.

Soit $(X, \mathcal{M})$ un log-schéma sur $\mathcal{O}_K$.

Un relèvement du Frobenius absolu F_0 de $(X_0, \mathcal{M}_0)$ est un endomorphisme de log-schéma $F_* : (X, \mathcal{M}) \to (X, \mathcal{M})$ dont la réduction modulo p est F_0.

Considérons le morphisme $dF : \Omega_{X/\mathcal{O}_K}(\log \mathcal{M}) \to \Omega_{X/\mathcal{O}_K}(\log \mathcal{M})$.

Rappelons que le morphisme F_0 sur la partie logarithmique est la multiplication par le scalaire p. On en déduit que

$$dF(\Omega_{X/\mathcal{O}_K}(\log \mathcal{M})) \subset p.\Omega_{X/\mathcal{O}_K}(\log \mathcal{M}).$$

ce qui nous permet définir de manière unique un endomorphisme $\frac{dF}{p}$ du complexe $\Omega_{X/\mathcal{O}_K}(\log \mathcal{M})$ de faisceaux de $\mathcal{O}_K$-modules.

1.2.3 F-isocristaux filtrés convergents

Fixons $(X, \mathcal{M})$ un log-schéma sur W.

Supposons qu'il existe un relèvement F du Frobenius absolu de $(X_0, \mathcal{M}_0)$ à $(X, \mathcal{M})$.

Définition 1.6. Un F-isocristal filtré convergent sur $(X, \mathcal{M})$ est la donnée de :

1. Un $K \otimes \mathcal{O}_X$-module projectif de type fini $\mathcal{E}$.

2. Une connection intégrable

$$\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1_{X/W}(\log \mathcal{M})_K \otimes \mathcal{E}.$$

3. une filtration décroissante (bornée) $Fil^i\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$ par des facteurs directs telle que $Fil^0\mathcal{E} = \mathcal{E}$.
4. un isomorphisme $\Phi : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X)_F \to \mathcal{E}$.

vérifiant les conditions suivantes :

(i) Φ est horizontal par rapport à ∇

(ii) *Transversalité de Griffiths* : $\nabla(Fil^i\mathcal{E}) \subset \Omega^1_{X/W}(\log \mathcal{M})_K \otimes Fil^{i-1}\mathcal{E}$.

(iii) *Convergence* : La connexion ∇ est quasi-nilpotente au sens de Berthelot (cf [1], chap. 2, 4.3).

Dans le cas modérément ramifié, lorsque les puissances divisées sur l'idéal maximal de W s'étendent à X, on peut définir suivant Kato le site cristallin associé au log-schéma $(X, \mathcal{M})$. Alors, un module à connection intégrable quasi-nilpotente correspond biunivoquement à un cristal sur $(X, \mathcal{M})$.

Dans le cas où X est semi-stable, $(X, \mathcal{M})$ étant la log-structure correspondante, la cohomologie d'un cristal sur $(X, \mathcal{M})$ ne dépend que de la fibre spéciale de X - conformément à l'idée de cristal (toujours due à Kato).

Ainsi, la cohomologie du complexe de De Rham $\Omega^* = \Omega^*_{X/W}(\log \mathcal{M})_K \otimes \mathcal{E}$ ne dépend que de la fibre spéciale. De plus, dans la correspondance entre modules à connection et cristaux, une filtration transverse est envoyée sur une filtration du cristal et un morphisme horizontal sur un morphisme de cristal. Dès lors, la filtration et le Frobenius sur la cohomologie de Ω^* ne dépendent pareillement que de la fibre spéciale.

Remarque 1.7. On peut faire une variante entière de cette définition. Tout semble marcher pour la cohomoloie en degré $< p$ (voir $< p-1$) mais le reste de la cohomologie est un mystère complet.

Pour démontrer l'indépendance de la définition précédente par rapport au choix de F, on procède comme suit :

1. On introduit une variante de la définition précédente dans le cas où on s'est donnée une immersion fermée $(X, \mathcal{M}) \to (U, \mathcal{N})$ où $(U, \mathcal{N})$ est un log-schéma lisse munie de puissances divisées compatibles avec celles de W. Pour cette variante, on a besoin d'un relèvement du Frobenius absolu à $(U, \mathcal{N})$, noté F_U.
2. On montre ensuite que si l'on s'est donné un triangle

$$\begin{tikzcd} & (X, \mathcal{M}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (U, \mathcal{N}, F_U) \arrow[rr, "f"] & & (U', \mathcal{N}', F_{U'}) \end{tikzcd}$$

compatible aux relèvements de Frobenius, on peut construire un couple d'adjoints (f^*, f_*) qui est une équivalence si f est lisse.

3. Etant donné finalement F et F' deux relèvements de Frobenius sur $(X, \mathcal{M})$, on applique le résultat précédent aux triangles

$$\begin{tikzcd} & (X,\mathcal{M}) \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr] & \\ ((X,\mathcal{M}) \times_W (X,\mathcal{M}), F \times_X F') \arrow[rr, "p_1"] & & (X,\mathcal{M},F) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (X,\mathcal{M}) \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr] & \\ ((X,\mathcal{M}) \times_W (X,\mathcal{M}), F \times_X F') \arrow[rr, "p_2"] & & (X,\mathcal{M},F') \end{tikzcd}$$

le morphisme δ désignant l'immersion diagonale, et les morphismes p_1, p_2 les deux projections canoniques.

Définition 1.8. On note $MF^{\nabla}_{(X,\mathcal{M})}(\Phi)$ la catégorie des F-isocristaux filtrés convergents.

L'esquisse de démonstration précédente implique que pour tout morphisme $f : (Y, \mathcal{N}) \to (X, \mathcal{M})$ de log-schémas lisses sur W, il existe un couple de foncteurs adjoints $MF^{\nabla}_{(Y,\mathcal{N})}(\Phi) \leftrightarrows MF^{\nabla}_{(X,\mathcal{M})}(\Phi)$.

On peut utiliser cette fonctorialité pour définir la catégorie $MF^{\nabla}_{(X,\mathcal{M})}(\Phi)$ sans avoir recours à l'existence d'un relèvement de Frobenius. En effet, un tel relèvement existe localement pour la topologie étale. Cela signifie qu'il existe un recouvrement étale $(X', \mathcal{M}') \to p(X, \mathcal{M})$ telle que le Frobenius absolu de $(X'_k, \mathcal{M}'_k)$ se relève. Il suffit alors de dire qu'un objet de $MF^{\nabla}_{(X,\mathcal{M})}(\Phi)$ est donné par un objet de $MF^{\nabla}_{(X',\mathcal{M}')}(\Phi)$ satisfaisant la condition de descente par rapport à p.

Il y a une vérification à faire pour la cohérence de cette définition. Cette vérification entraine que les catégories additives, «quasi-abéliennes», $MF^{\nabla}_{(X,\mathcal{M})}(\Phi)$ forment un champ pour la topologie log-étale.

2 Cohomologie syntomique

2.1 Cas affine pour une base non ramifiée

On se place dans les hypothèses du §1.1.
Soit $(\mathcal{E}, \nabla, Fil^i, \Phi)$ un F-module filtré convergent.

Complexe de De Rham La condition d'intégrabilité sur la connection ∇ nous permet de construire un complexe de De Rham $\Omega^*_A(\log D) \otimes_A \mathcal{E}$, encore noté $DR_{(A,D)}(\mathcal{E})$.

Filtration de Hodge On définit une filtration sur ce complexe en posant pour $i \in \mathbb{Z}$:

$$Fil^i\big(\Omega^q_A(\log D) \otimes_A \mathcal{E}\big) = \Omega^q_A(\log D) \otimes_A Fil^{i-q}\mathcal{E}.$$

La condition de transversalité de Griffiths équivaut à dire que ceci définit bien une filtration du complexe $\Omega^*_A(\log D) \otimes_A \mathcal{E}$.

Endomorphisme de Frobenius Rappelons que $D = (t_1 ... t_n = 0)$. De plus, si t_i n'est pas inversible, $\varphi(t_i) = u.t_i^p$. On pose $\varphi(\frac{dt_i}{t_i}) = p.\frac{dt_i}{t_i}$. Ceci nous permet de prolonger φ en un endomorphisme du complexe $\Omega^*_A(\log D)$, noté φ_Ω.

L'isomorphisme Φ définit en fait un endomorphisme semi-linéaire $\varphi_\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$. Le fait que Φ soit horizontal par rapport à ∇ implique que $\varphi_\Omega \otimes \varphi_\mathcal{E}$ définit un endomorphisme du complexe $\Omega^*_A(\log D) \otimes \mathcal{E}$, que nous noterons simplement φ par abus.

Définition 2.1. Soit $(\mathcal{E}, \nabla, Fil^i, \Phi)$ un isocristal filtré convergent.

Le complexe syntomique associé à $\mathcal{E}$ est le mapping cone du morphisme

$$1 - \varphi : Fil^0\big(\Omega^*_A(\log D) \otimes \mathcal{E}\big) \to \Omega^*_A(\log D) \otimes \mathcal{E}.$$

On le note $\mathcal{S}_{(A,D)}(\mathcal{E})$.

On définit alors respectivement la cohomologie crystaline et la cohomologie syntomioque de $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} H^m_{crys}((X,D);\mathcal{E}) &= H^m DR_{(X,D)}(\mathcal{E}) \\ H^m_{syn}((X,D);\mathcal{E}) &= H^m \mathcal{S}_{(X,D)}(\mathcal{E}) \end{aligned}$$

Ainsi, l'endomorphisme de Frobenius sur le complexe de De Rham induit un endomorphisme φ^* sur la cohomologie cristaline. Il en est de même pour la filtration de Hodge.

Par définition du complexe syntomique, on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} ... \; H^m_{syn}((X,D);\mathcal{E}) \to Fil^0 H^m_{crys}((X,D);\mathcal{E}) \xrightarrow{1-\varphi} H^m_{crys}((X,D);\mathcal{E}) \\ \to H^{m+1}_{syn}((X,D);\mathcal{E}) \to ... \end{aligned}$$

2.2 Cas général

Si on s'est donné un log-schéma $(X, \mathcal{M})$ sur W ainsi qu'un relèvement F à $(X, \mathcal{M})$ du Frobenius absolu, on peut définir de manière analogue le complexe cristallin et le complexe syntomique associé à un F-isocristal convergent.

Dans le cas général, on vérifie que ces complexes sont compatibles au changement de base. La définition s'étend de manière évidente aux log-schémas simplicaux dont chaque composante est munie d'un relèvement de

Frobenius. Pour conclure, il suffit de montrer que si $f : (X'_\bullet, \mathcal{M}'_\bullet, F'_\bullet) \to (X, \mathcal{M}, F)$ est un hyper-recouvrement étale, le morphisme

$$DR_{(X,\mathcal{M})}(\mathcal{E}) \to f_* f^* DR_{(X,\mathcal{M})}(\mathcal{E})$$

est un isomorphisme.

Cela garantit que pour un log-schéma $(X, \mathcal{M})$, on peut prendre un hyper-recouvrement étale $(X_\bullet, \mathcal{M}_\bullet)$ dont chaque composante admet un relèvement de Frobenius (de manière compatible) et définir le complexe cristallin (resp. syntomique) associé à $(X, \mathcal{M})$ comme le complexe total associé à $(X_\bullet, \mathcal{M}_\bullet)$ et au système de relèvements de Frobenius.

L'ingrédient essentiel pour faire cela est le lemme de Poincaré.

Références

[1] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.

[2] A. Borel, P.-P. Grivel, B. Kaup, A. Haefliger, B. Malgrange, and F. Ehlers. *Algebraic D-modules*, volume 2 of *Perspectives in Mathematics.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.

[3] Takeshi Tsuji. Crystalline sheaves, syntomic cohomology and p-adic polylogarithms. Notes or the seminar at Cal Tech on Feb. 20, 2001.