Pleine fidélité du foncteur de Dieudonné *d'après* Berthelot-Messing

Groupe de travail de l'Université Paris XIII
«Théorie de Dieudonné cristalline»
Organisé par Ahmed Abbes

Frédéric Déglise

Table des matières

Introduction 2
1. Rappels préliminaires 3
2. Quelques réductions élémentaires 5
2.1. Compatibilité au changement de base 5
2.2. Réduction au cas des groupes finis 5
2.3. Réduction locale 5
2.4. Fidélité 5
3. Le cas régulier 6
3.1. Cas d'un anneau de valuation parfait (Berthelot) 6
3.2. Le cas d'un corps 9
3.3. Le cas d'un schéma admettant une p-base 10
3.4. Passage à la limite 11
4. Extension de la conjecture par déformation 13
5. Prolongements et commentaires 14
5.1. Equivalence de catégorie ? 14
5.2. Contre-exemples et conjecture 14
5.3. Illustration de la théorie 15
Références 16

Introduction

On peut dire que la théorie de Dieudonné cristalline est née de façon concomitante à la recherche d'une notion adéquate de «systèmes de coefficients cohomologiques en caractéristique p» menée par A. Grothendieck au milieu des années 60.

Dans sa lettre à Tate, Grothendieck évoque ainsi la possibilité d'utiliser la notion de cristal qu'il a en tête pour étudier les groupes p-divisibles sur une base de caractéristique p. Cette observation parait naturelle car un cristal sur un corps parfait k correspond à un $\mathbb{W}(k)$-module ; un cristal sur un schéma S peut donc être vu comme une «famille de tels modules». Dès lors, on peut appeler cristal de Dieudonné sur S la donnée d'un cristal sur S muni de deux opérateurs Frobenius et Verschiebung reliés par la condition classique des modules de Dieudonné.

Grothendieck a immédiatement l'idée (à la lecture de sa lettre à Tate) de généraliser le foncteur de Dieudonné dans ce cadre, et il le voit comme un invariant très précis des groupes p-divisibles – qu'il appellera plus tard «groupes de Barsotti-Tate» – ou encore des variétés abéliennes.

C'est principalement P. Berthelot et W. Messing qui s'attacheront à réaliser ce qui n'est alors dans la tête de Grothendieck qu'un «programme». Le premier fondera intégralement la théorie cristalline selon les voeux de Grothendieck et le second réalisera la construction du foncteur de Dieudonné suivant une idée de Grothendieck – inspirée de J.P.Serre selon ce dernier. Il était naturel que ces deux auteurs collaborent ensuite pour amener la théorie de Dieudonné cristalline à sa pleine maturité.

Ainsi, avec l'aide de L. Breen, ils établiront une nouvelle construction du foncteur de Dieudonné cristallin plus générale et plus naturelle que dans l'approche initiale. A l'aide de cette construction ils obtiendront le résultat remarquable que ce foncteur est pleinement fidèle dans de nombreux cas – répondant ainsi à une question qui était arrivée dans la bouche du «maître» au début des années 70.

L'achèvement de cette théorie montre à nouveau l'incroyable pénétration du regard de Grothendieck dans les faits mathématiques. Il semble que le mot «préscience» ait été inventé pour lui.

Nous exposerons ici le résultat de Berthelot et Messing, qui concerne plus précisément les schémas ayant une certaine propriété de régularité. Nous illustrerons aussi ce résultat en établissant une propriété des groupes de Barsotti-Tate obtenue grâce à l'étude des cristaux de Dieudonné associés.

1. Rappels préliminaires

Nous dirons syntomique pour plat localement d'intersection complète.

On fixe un schéma S sur lequel p est localement nilpotent. On pose $\Sigma = (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p), (p), \gamma)$ où γ désigne les puissances divisées canoniques sur l'idéal (p), et plus généralement pour tout entier $n > 0$, $\Sigma_n = (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}), (p), \gamma')$.

On associe à ces données deux sites :

1) Le gros site fppf de S formé de tous les schémas sur S muni de la topologie dont les recouvrements sont engendrés par les morphismes fidèlement plats de présentation finie. On note S_{fppf} ce site, $\tilde{S}_{fppf}$ le topos associé et $\mathcal{O}_S$ le faisceau en anneaux canonique sur S_{fppf}.

2) Le gros site cristallin fppf de S/Σ dont les objets sont les diagrammes commutatifs de schémas

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & T \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ S & \rightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

où f et g sont des morphismes quelconques, p est localement nilpotent sur T et i est une immersion fermée dont l'idéal est muni de puissances divisées δ compatibles à γ. Les morphismes de ce site sont donnés par les carrés commutatifs avec une condition de compatibilité sur les puissances divisées. Les recouvrements sont engendrés par les morphismes qui sont des carrés cartésiens tels que le morphisme sur les épaississements est fidèlement plat de présentation finie. On note $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$ ce site, $(S/\Sigma)_{\mathrm{cris}}$ le topos associé et $\mathcal{O}_{S/\Sigma} : (U,T) \mapsto \mathcal{O}_T(T)$ le faisceau en anneaux canonique sur $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$.

On dispose des morphismes de sites

$$u_{S/\Sigma} : \mathrm{Cris}(S/\Sigma) \to S_{fppf}, (U,T,\delta) \mapsto U,$$
$$i_{S/\Sigma} : S_{fppf} \to \mathrm{Cris}(S/\Sigma), U \mapsto (U,U,0)$$

qui induisent des morphismes de topos

$$(u^*_{S/\Sigma}, u_{S/\Sigma *}) : (S/\Sigma)_{\mathrm{cris}} \to \tilde{S}_{fppf},$$
$$(i^*_{S/\Sigma}, i_{S/\Sigma *}) : \tilde{S}_{fppf} \to (S/\Sigma)_{\mathrm{cris}}.$$

De la relation $u_{S/\Sigma} \circ i_{S/\Sigma} = 1$, on tire l'égalité $u^*_{S/\Sigma} = i_{S/\Sigma *}$. Ce dernier foncteur commute donc à toutes les limites projectives et toutes les limites inductives. De plus, $i^*_{S/\Sigma}$ est adjoint à gauche de $u^*_{S/\Sigma}$. Suivant le yoga habituel, on pose donc parfois $u_{S/\Sigma})_! = i^*_{S/\Sigma}$.

Nous sommes appelés à comparer certaines sous-catégories de ces deux sites.

1) On note $GF(S)$ la catégorie des schémas en groupes abéliens de p-torsion qui sont finis localement libres[1] sur S. C'est une sous-catégorie pleine de $\tilde{S}_{fppf}$.

On note aussi $BT(S)$ la catégorie des groupes Barsotti-Tate sur S, encore appelés groupes p-divisibles. C'est la sous-catégorie pleine des faisceaux en groupes abéliens G sur S_{fppf} tel que G est de p-torsion, l'élévation à la puissance p dans G est surjective, et le sous-faisceau en groupes des éléments tués par p est un schéma en groupes fini localement libre sur S.
2) Soit σ l'automorphisme de Frobenius de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, et F_S le Frobenius absolu de S. Tout $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module E est un faisceau de $\mathbb{Z}_p$-modules. On note E^σ son twist par σ, obtenu par changement de base suivant le dimorphisme $(F_S, \sigma) : S/\Sigma \to S/\Sigma$.

On appelle cristal de Dieudonné sur S la donnée d'un cristal E en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules sur $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$ muni de deux morphismes

$$F : E^\sigma \to E$$
$$V : E \to E^\sigma,$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) E est localement libre sur $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$.

(2) $FV = p.1_E$, $VF = p.1_{E^\sigma}$.

On note $\mathbb{D}\mathcal{O}_{S/\Sigma} - mod$ la catégorie des cristaux de Dieudonné.

À tout faisceau abélien G sur S_{fppf}, on peut donc associer un faisceau sur $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$ en posant $\underline{G} = i_{S/\Sigma *}G = u^*_{S/\Sigma}G$.

Le foncteur de Dieudonné sur S est alors défini comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}_S : BT(S) & \to & \mathbb{D}\mathcal{O}_{S/\Sigma} - mod \\ G & \mapsto & \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}). \end{array}$$

Comme dans l'exposé précédent, on s'intéresse à la question de savoir si ce foncteur est pleinement fidèle. On notera (D_S) cette affirmation logique[2].

Nous nous bornerons ici au cas d'un schéma S de caractéristique p, et nous nous appuierons sur le fait que (D_S) est vraie lorsque S est le spectre d'un corps parfait puisque dans ce cas, la théorie cristalline utilisée ici coïncide avec la théorie classique.

[1] Rappelons qu'un morphisme fini localement de présentation finie est plat si et seulement si il est localement libre. Dans le langage courant, on trouve souvent le terme «plat fini» pour un schéma en groupes là où il faudrait «fini localement libre». Cette confusion provient sans doute du fait que fini sur un schéma localement noethérien implique localement de présentation finie.

[2] On fera attention qu'on démontrera en fait une affirmation logique plus forte que l'on appellera encore (D_S) par abus (cf 2.2).

2. Quelques réductions élémentaires

2.1. **Compatibilité au changement de base.** La propriété essentielle du foncteur de Dieudonné est sa compatibilité au changement de base : pour tout morphisme $f : T \to S$ de $\mathbb{F}_p$-schémas, et tout groupe $G \in GF_S$,

$$\mathbb{D}_T(G \times_S T) = f^*_{\text{Cris}}\mathbb{D}_S(G).$$

Remarque 2.1. Remarquons que $u^*_{S/\Sigma}$ est compatible au changement de base, et que f^*_{Cris} est exact. Dès lors, la compatibilité du foncteur de Dieudonné cristallin au changement de base se ramène à une formule de projection dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules :

$$R\underline{\text{Hom}}_{T/\Sigma}(f^*_{\text{Cris}}., \mathcal{O}_{T/\Sigma}) = f^*_{\text{Cris}}R\underline{\text{Hom}}_{S/\Sigma}(., \mathcal{O}_{S/\Sigma}).$$

2.2. **Réduction au cas des groupes finis.** Un point fondamental de la théorie de [2] est le fait que l'extension cristalline

$$\mathbb{D}_S(G) = \underline{\text{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

définit encore un cristal de Dieudonné[3] lorsque $G \in GF(S)$.

Par ailleurs, comme S est de caractéristique p, pour tout groupe de Barsotti-Tate G, si l'on note $G(1)$ sa partie tuée par p,

$$\mathbb{D}_S(G) = \underline{\text{Ext}}^1_{S/\Sigma}(G(1), \mathcal{O}_{S/\Sigma}).$$

Dès lors, dans la formulation de la conjecture (D_S), on peut considérer des schémas en groupes $G \in GF(S)$ au lieu des groupes de Barsotti-Tate. C'est ce que l'on fera systématiquement désormais :

$$(D_S) \quad \mathbb{D}_S : GF(S) \to \mathbb{D}\mathcal{O}_{S/\Sigma} - mod \text{ est pleinement fidèle.}$$

2.3. **Réduction locale.** On remarquera que les morphismes de cristaux sont des données de «nature locale» pour la topologie fppf sur S (ie déterminés par leur restriction à n'importe quel recouvrement de S).

La compatibilité du foncteur $\mathbb{D}_S$ au changement de base implique donc que (D_S) est une conjecture de nature locale fppf en S :

Pour tout recouvrement fidèlement plat de présentation finie $(V_i)_{i \in I} \to S$, l'implication suivante est vérifiée :

$$\forall i \in I, (D_{V_i}) \Rightarrow (D_S).$$

Remarque 2.2. En termes plus conceptuels, les catégories $\mathbb{D}\mathcal{O}_{?/\Sigma} - mod$ et $GF_?$, fibrées au-dessus de la catégorie des schémas, sont des champs fppf. Le foncteur $\mathbb{D}_? : GF_? \to \mathbb{D}\mathcal{O}_{?/\Sigma} - mod$ est un morphisme de champs fppf.

2.4. **Fidélité.** On se borne à remarquer que si S est un schéma intègre (ou même localement intègre d'après ce qui précède), la fidélité est évidente.

En effet, soit K le corps des fonctions de S et L sa cloture parfaite. Pour tester la nullité d'un morphisme entre groupes finis localement libres sur S, il suffit de le vérifier sur les fibres au-dessus de L. On peut donc conclure car le foncteur de Dieudonné est compatible au changement de base et qu'il est fidèle au-dessus de L.

[3] On notera cependant que, lorsque G est un groupe de Barsotti-Tate, $\mathbb{D}_S(G)$ est localement libre de rang fini égal à la hauteur de G, et lorsque $G \in GF(S)$, $\mathbb{D}_S(G)$ est localement de présentation finie de longueur d si le rang de G est p^d.

3. Le cas régulier

Ce cas concerne principalement les anneaux admettant une p-base.

Si A est une $\mathbb{F}_p$-algèbre, et $(x_i)_{i\in I}$ une p-base de A, on a déjà vu que A admettait des relèvements A_n plat sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Si $(\tilde{x}_i)_{i\in I}$ est une famille relevant la p-base dans A_n, alors les formes différentielles $(d\tilde{x}_i)_{i\in I}$ forment une base de $\Omega^1_{A_n/\mathbb{Z}}$. Par ailleurs, un cristal sur Cris(Spec$(A)/\Sigma$) est alors équivalent à la donnée d'une famille indexée par $n \in \mathbb{N}$ de A_n-modules M_n munis d'une connexion $\Delta_n : M_n \to M_n \otimes_{A_n} \Omega^1_{A_n/\mathbb{Z}}$ intégrable qui soient compatibles entre eux et telle que $(\Delta_n)_n$ est quasi-nilpotente.

Un des points clés du cas régulier est le corollaire suivant de cette description (cf [3], 1.3.4) :

Corollaire 3.1. *Soit $\varphi : A \to A'$ un morphisme injectif de $\mathbb{F}_p$-algèbres admettant une p-base.*

Alors le foncteur image inverse $(\mathrm{Spec}(A)/\Sigma)_{\mathrm{cris}} \to (\mathrm{Spec}(A')/\Sigma)_{\mathrm{cris}}$ est fidèle lorsqu'on le restreint à la catégorie des cristaux localement libres sur $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)/\Sigma}$.

Démonstration. En effet, étant donnés deux relèvement A_n et A'_n respectifs de A et A' sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, on sait que l'on peut relever φ en un morphisme $\varphi_n : A_n \to A'_n$. Mais la platitude de A'_n sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ entraîne par un petit calcul que φ_n est nécessairement injectif ce qui permet de conclure d'après la description qui précède des cristaux sur Spec$(A)/\Sigma$. □

3.1. **Cas d'un anneau de valuation parfait (Berthelot).** Supposons que $S = \mathrm{Spec}(A)$ où A est un anneau intègre parfait, $\mathbb{W}(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt de A et σ le Frobenius sur $\mathbb{W}(A)$.

On a déjà vu dans l'exposé de Xavier qu'un cristal E sur S/Σ équivaut à la donnée d'un $\mathbb{W}(A)$-module séparé complet pour la topologie p-adique, par le foncteur section globale sur le site cristallin, noté simplement Γ.

On note $\mathbb{D}(A)$ la $\mathbb{W}(A)$-algèbre non commutative définie par générateurs et relations suivante :

$$\mathbb{D}(A) = \mathbb{W}(A)[F, V]/(*)$$

où les relations (*) sont données par

(1) $F.\lambda = \sigma(\lambda).F$ pour tout $\lambda \in A$
(2) $V.\sigma(\lambda) = \lambda.V$ pour tout $\lambda \in A$
(3) $FV = p$
(4) $VF = p$.

Un cristal de Dieudonné est donc équivalent à la donnée d'un $\mathbb{D}(A)$-module à gauche – dans la suite, nous dirons simplement $\mathbb{D}(A)$-module.

Soit M un tel objet. Il admet donc une structure canonique de $\mathbb{W}(A)$-module. Nous dirons que M est de longueur constante (sur $\mathbb{W}(A)$) si pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$,

$$\mathrm{lg}_{\mathbb{W}(A)}(M) = \mathrm{lg}_{\mathbb{W}(\kappa_x)}\left(M \otimes_{\mathbb{W}(A)} \mathbb{W}(\kappa_x)\right).$$

Notons que pour tout cristal de Dieudonné E sur S/Σ, ΓE est un $\mathbb{D}(A)$-module de longueur constante.

Enfin, pour tout groupe G dans $GF(S)$, le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \to \Gamma\underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

est un isomorphisme (cf [2], 4.2.13).

En effet, Γ est la limite projective des foncteurs Γ_n, sections globales sur $(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Spec}(\mathbb{W}_n(A)))$, couple de schémas affines. Puisque les cristaux en jeux sont des cristaux en modules quasi-cohérents, ces foncteurs section globales sont exacts. Donc le résultat est vrai pour Γ_n. Le passage à la limite préserve cette propriété car le système projectif en jeu est essentiellement nul.

Théorème 3.2 (Berthelot, [1], 3.4.1 et 4.3.4)**.** *Supposons que S est un schéma affine dont l'anneau A est intègre, parfait et vérifie l'hypothèse*

(P) pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$, A_x est soit un corps soit un anneau de valuation[4]*.*

Alors le foncteur $\Gamma\mathbb{D}_S$ réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des A-schémas en p-groupes finis localement libres et la catégorie des $\mathbb{D}(A)$-modules qui sont de type fini, de p-torsion et de longueur constante sur $\mathbb{W}(A)$.

Remarque 3.3. Ce théorème constitue donc une généralisation du théorème de Dieudonné classique.

Par passage à la limite, $\Gamma\mathbb{D}_S$ établit encore une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des groupes de Barsotti-Tate et celle des D_A-modules localement libres de rang fini sur le spectre formel de $\mathbb{W}(A)$. En effet, la condition être de longueur constante sur $\mathbb{W}(A)$ est impliquée par le fait d'être sans torsion sur $\mathbb{W}(A)$.

Démonstration. Elle se fait en trois temps.

1. On introduit les covecteurs de Witt[5] :

Soit B un anneau. L'anneau des covecteurs de Witt[6] à coefficients dans B est défini par

$$CW(B) = \left\{ \begin{array}{l} (a_{-i})_{i\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}} \mid \\ \langle a_{-i} | \ i \geq N \rangle_B \text{ est nilpotent pour } N \text{ assez grand} \end{array} \right\}.$$

On muni $CW(B)$ d'une structure de groupe grâce à la loi somme des vecteurs de Witt, en remarquant que celle-ci converge sur chaque covecteur de Witt. On peut par ailleurs définir des opérateurs F et V de manière analogue au cas des vecteurs de Witt.

On en déduit ainsi un faisceau en groupes abéliens sur S_{fppf}, CW_S qui a un S-schéma affine $X = \mathrm{Spec}(B)$ associe $CW(B)$.

Si $G \in GF_S$, on pose suivant Berthelot $M_S(G) = \mathrm{Hom}_S(G, CW_S)$. Les opérateurs F et V sur CW_S font de $M_S(G)$ un $D(A)$-module. Il est évident que $M_S(G)$ est de p-torsion sur $\mathbb{W}(A)$.

Il y a deux points clés que Berthelot parvient à démontrer sur cette construction, lorsque A vérifie les hypothèses du théorème :

---

[4] Ces anneaux sont encore appelés anneaux de Prüfer

[5] On attribue leur construction à Barsotti, toutefois la définition que l'on adopte est due en toute généralité à Fontaine.

[6] Quand $A = k$ est un corps parfait, $K = \mathrm{Frac}(\mathbb{W}(k))$, on obtient $CW(k) = K/\mathbb{W}(k)$. L'anneau des covecteurs de Witt sur k est donc exactement le $\mathbb{W}(k)$-module dualisant.

(*) $M_S : GF_S \to D(A) - mod$ est un foncteur exact (cf [1], 2.4.1).

(**) pour tout point $x \in \mathrm{Spec}(A)$ de corps résiduel κ_x, le morphisme canonique

$$M_x(G_x) \to M(G) \otimes_{\mathbb{W}(A)} \mathbb{W}(\kappa_x)$$

est un isomorphisme (cf [1], 2.7.1) – c'est le cas d'un point fermé qui est le plus profond.

On en déduit que $M(G)$ est un $\mathbb{W}(A)$-module de type fini et de longueur constante.

2. On produit un adjoint à gauche du foncteur M_S qui en sera un quasi-inverse. Cette construction est à l'origine due à Grothendieck dans le cas où A est un corps parfait et les $D(A)$-modules ont un Verschiebung nilpotent (cf [5], II.6) et a été généralisé au cas où A est un corps parfait pour tous les $D(A)$-modules (cf [4], III, §1).

Soit M un $D(A)$-module et $G \in GF_S$. On cherche à définir un schéma en groupes $\mathbb{E}_M$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, M_S(G)) \simeq \mathrm{Hom}_{GF_S^{op}}(\mathbb{E}_M, G) = \mathrm{Hom}_S(G, \mathbb{E}_M).$$

L'idée clé est de définir le faisceau $\mathbb{E}_M$ par cette relation, en remplaçant ci-dessus le schéma en groupes G par un S-schéma affine arbitraire $\mathrm{Spec}(B)$. En effet, le $D(A)$-module $M_S(G) = \mathrm{Hom}_S(G, CW)$ est encore défini lorsqu'on remplace G par $\mathrm{Spec}(B)$, ce qui mène à la formule :

$$\mathbb{E}_M(\mathrm{Spec}(B)) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(M, CW(B)),$$

qui fait de $\mathbb{E}_M$ un faisceau en groupes abéliens.

Or dans le cas où A est le spectre d'un corps et V est nilpotent sur M, Grothendieck a donné une formule explicite pour un schéma en groupes affines G_M représentant $\mathbb{E}_M$. Or cette formule garde un sens dans le cas d'un anneau parfait A quelconque mais a priori, on obtient un ind-schéma en groupes. Le fait que le système inductif se stabilise résulte du cas d'un corps parfait appliqué aux points génériques de $S = \mathrm{Spec}(A)$ qui implique que le rang de G_M est borné par p^d où d est la longueur (constante !) de M.

Le foncteur $M \mapsto G_M$ est par définition l'adjoint à gauche de M_S. Le fait qu'il en soit un quasi-inverse résulte à nouveau du cas d'un corps parfait et de la propriété (**) du foncteur M_S qui permet de se ramener aux points génériques et aux points fermés de S.

3. Il reste maintenant à comparer le foncteur M_S avec le foncteur $\Gamma\mathbb{D}_S$.

Pour cela, il faut introduire une version cristalline des covecteurs de Witt en général, tenant compte des épaississements.

Considérons donc un (U, T, δ) un objet de $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$. On se place dans le cas affine, $T = \mathrm{Spec}(C)$, $U = \mathrm{Spec}(B)$ et on note J l'idéal de $C \to B$.

On pose alors $CW_{S/\Sigma}(U, T, \delta) = CW(C)/CW(J)$, où $CW(J)$ est défini par la même formule que dans le cas d'un anneau, et devient donc un idéal de $CW(C)$. On remarquera que la flèche naturelle $CW(C)/CW(J) \to CW(B)$ est injective mais n'est pas surjective en général car l'idéal J peut ne pas être nilpotent.

Un calcul permet alors de déduire de l'extension canonique $0 \to C \to CW(C) \xrightarrow{V} CW(C) \to 0$, l'extension dans $(S/\Sigma)_{\mathrm{cris}}$ suivante :

$$0 \to \mathcal{O}_{S/\Sigma} \to \mathcal{E}_{S/\Sigma} \to CW_{S/\Sigma} \to 0.^7$$

Cette suite exacte courte induit la suite exacte longue

$$... \to \mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{E}_{S/\Sigma}) \to \mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(\underline{G}, CW_{S/\Sigma}) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Ext}^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})...$$

Supposons que $A = L$ est le spectre d'un corps parfait. Dans ce cas, pour tout $G \in GF(S)$, on peut vérifier :

(1) $\mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{E}_{S/\Sigma}) = 0$ (cf [2], 4.2.11).
(2) $\mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(\underline{G}, CW_{S/\Sigma}) = \mathrm{Hom}_S(G, CW_S) = M_S(G)$ (cf [2], paragraphe précédant le lemme 4.2.13).
(3) Si G est de rang p^d, les $\mathbb{W}(L)$-modules $M(G)$ et $\Gamma\mathbb{D}_S(G)$ sont de longueur d.

On en conclut donc que τ est un monomorphisme, et comme les modules en jeu sont de même longueur, τ est un isomorphisme[8].

Le cas général d'un anneau de Prüfer A s'en déduit grâce à la propriété (**) du foncteur M_S et au fait qu'un $D(A)$-module de longueur constante est sans torsion par rapport aux représentants de Teichmüller des éléments de $A - \{0\}$ (ainsi, τ un monomorphisme car c'est un isomorphisme au-dessus des points génériques et un épimorphisme car il en est de même au-dessus des points fermés). □

3.2. **Le cas d'un corps.** Un des points clés du résultat général que nous allons démontrer est d'étendre la théorie de Dieudonné au cas des corps quelconques. Ce résultat montre bien que la théorie cristalline que l'on expose ici est le prolongement naturel de la théorie de Dieudonné.

Proposition 3.4. *Lorsque S est le spectre d'un corps K, le foncteur $\mathbb{D}_K$ est pleinement fidèle.*

Démonstration. Il ne reste qu'à traiter la pleine fidélité. Soit G et H deux groupes dans GF_K. On cherche à relever un morphisme arbitraire $v = \mathbb{D}_K(H) \to \mathbb{D}_K(G)$.

Soit L la cloture parfaite de K. D'après la théorie de Dieudonné classique appliquée à L, il existe un morphisme $u_L : G_L \to H_L$ tel que $\mathbb{D}(u_L) = v_L$. Tout le problème est de redescendre ce morphisme à K.

Or, comme les groupes d'origine sont de présentation finie sur K, le morphisme u_L se relève sur une extension finie totalement inséparable E/K en un morphisme $u_E : G_E \to H_E$. Or on peut appliquer le corollaire[9] 3.1 à l'inclusion $\varphi : E \to L$: $\mathrm{Spec}(\varphi)^*(\mathbb{D}_E(u_E)) = 0$ implique $\mathbb{D}_E(u_E) = 0$.

[7]Précisons que l'application de Γ à cette suite exacte redonne la suite exacte classique

$$0 \to \mathbb{W}(A) \to \mathbb{W}(A)[1/p] \to \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}_n(A) \to 0.$$

[8]On fera attention que τ est seulement σ-linéaire.

[9]On remarquera ici un problème dans la démonstration de [3], car à ce point, les cristaux considérés ne sont pas localement libres. Si on veut que les cristaux soient effectivement localement libre, il faut travailler soit avec des groupes finis annulés par p ou encore avec des groupes de Barsotti-Tate tronqués. La démonstration fonctionne alors sans changement.

On a donc redescendu le morphisme u_L à l'extension finie E de K. Soit $T = \mathrm{Spec}(E)$. Le morphisme $T \to S$ est fidèlement plat. Pour redescendre le morphisme u_E de T à S, il suffit donc de vérifier la condition de descente pour ce morphisme :

Soit $p_1, p_2 : T \times_S T \to T$ les deux projections canoniques. On cherche à montrer que $w = p_1^*(u_E) - p_2^*(u_E)$ est nul. Or, par compatibilité au changement de base, $\mathbb{D}_{T \times_S T}(w) = 0$. On est donc ramené à un résultat de fidélité du foncteur de Dieudonné, pour le schéma $T' = T \times_S T$. On notera que ce schéma est non réduit, mais il est syntomique sur $T = \mathrm{Spec}(E)$, qui lui admet une p-base.

Soit $G' = G \times_S T'$, $H' = H \times_S T'$. Précisons que, sous les hypothèses précédentes, si G' est annulé par Frobenius, le cristal de Dieudonné $\mathbb{D}_{T'}(G')$ correspond essentiellement au faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{T'}$-module $\omega_{G'}$ des formes différentielles invariantes par translation. De la nullité de $\mathbb{D}_{T'}(w)$, on en déduit donc la nullité du morphisme induit $\omega_{G'} \to \omega_{H'}$ qui implique que w s'annule sur la partie de G' annulée par Frobenius. Itérant ce raisonnement, on parvient à montrer que w s'annule sur $\cup_n \mathrm{Ker}(F^n_{G'})$, c'est-à-dire sur la partie connexe de G'.

On est donc ramené au cas où G est étale. D'après la compatibilité du foncteur de Dieudonné sur T' à la dualité, on voit qu'on peut supposer dualement que H est de type multiplicatif. Or pour montrer la nullité de w, il suffit de le faire sur une cloture séparable de K. On peut donc supposer que G et H sont constants. Par dévissage, on est finalement ramené au cas où $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $H = \mu_p$. Dès lors, w correspond au choix d'une racine p-ième de l'unité ζ dans K.

D'après l'exposé de Xavier,

$$\mathbb{D}_K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathcal{O}_{S/\Sigma}/p.\mathcal{O}_{S/\Sigma}$$
$$\mathbb{D}_K(\mu_p) = \mathcal{O}_{S/\Sigma}/p.\mathcal{O}_{S/\Sigma}.$$

Dès lors, un calcul direct montre que le morphisme $\mathbb{D}_S(w)$ est égal à la multiplication par le log de ζ. Pour conclure, précisons que la nullité de ce log implique que ζ est égal à 1, donc $w = 0$. □

3.3. **Le cas d'un schéma admettant une p-base.** Le théorème principal de [2] est maintenant un dévissage à partir des deux cas précédents :

Théorème 3.5 ([2], 4.1.1). *Soit S un schéma de caractéristique p, normal, localement intègre et admettant localement une p-base.*

Alors, (D_S) est vrai.

Démonstration. Par réduction au cas local, on suppose que $S = \mathrm{Spec}(A)$ où A est intègre normal et admet une p-base.

Démontrons la pleine fidélité. Soit G et H des S-schémas en groupes finis localement libres et $v : \mathbb{D}_A(H) \to \mathbb{D}_A(G)$ un morphisme de cristaux de Dieudonné. Notons que par réduction locale, on peut supposer que G et H sont libres.

Malgré tout, P. Berthelot nous a signalé qu'on peut renforcer le corollaire 3.1 pour obtenir la fidélité du foncteur extension des scalaires considérés ici sur tous les cristaux.

Soit K le corps des fractions de A. D'après 3.4, le morphisme v_K admet un antécédent $u_K : G_K \to H_K$ pour $\mathbb{D}_K$. Comme dans le cas d'un corps, on va redescendre ce morphisme à A.

Comme A est normal, il est intersection des anneaux de valuation V tels que $A \subset V \subset K$. Fixons un tel anneau V. Si L désigne la cloture parfaite de K, la cloture intégrale W de V dans L est un anneau de valuation parfait. D'après 3.2, le morphisme v_W admet un antécédent $u_W : G_W \to H_W$ pour le foncteur $\mathbb{D}_W$.

Or les morphismes $u_W \otimes_W L$ et $u_K \otimes_K L$ coincide par fidélité du foncteur de Dieudonné sur L, et d'après sa compatibilité au changement de base. On peut considérer des bases de G et H en tant que A-modules libres. Les matrices respectives de u_W et u_K par rapport à ces bases coïncident après extension des scalaires à L, donc ces matrices coïncident et définissent une matrice M à coefficients dans $W \cap K = V$.

Le même raisonnement montre que M est en fait à coefficients dans tous les anneaux de valuation V tels que $A \subset V \subset K$. Donc M est à coefficients dans A et définit un morphisme de A-schémas $u : G \to H$. C'est bien un morphisme de schémas en groupes car il suffit de le vérifier après extension des scalaires à K. Pour conclure que $\mathbb{D}_A(u) = v$, il suffit maintenant d'appliquer le corollaire[10] 3.1 au morphisme d'inclusion $A \to K$. □

3.4. **Passage à la limite.** On peut extraire de [3], paragraphe 4.2.4, le lemme intermédiaire suivant :

Lemme 3.6. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système inductif filtrant d'anneaux intègres noethériens.*

On pose $A = \varinjlim_{i \in I} A_i$, $S_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ et $S = \mathrm{Spec}(A)$, et on suppose que A est noethérien.

Alors on a l'implication :

$$\forall i \in I, (D_{S_i}) \Rightarrow (D_S).$$

Remarque 3.7. On remarquera que toute la démonstration de la proposition 3.4 consiste à montrer que si l'on considère

$$L = \varinjlim_{E/K \text{ radicielle}} E$$

l'implication réciproque de celle considérée dans le lemme ci-dessus est vraie !

Démonstration. Comme A est intègre, la fidélité de $\mathbb{D}_S$ est déjà résolue.

Soit G et H des schémas en groupes dans $GF(S)$, et $v : \mathbb{D}_S(H) \to \mathbb{D}_S(G)$ un morphisme de $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules.

Comme S est noethérien, les schémas en groupes G et H sont de présentation finie. Il existe donc $i \in I$ et un schéma en groupe G_i (resp. H_i) dans $GF(S_i)$ tel que $G = G_i \times_{S_i} S$ (resp. $H = H_i \times_{S_i} S$). Si $j \in I$ est au-dessus de i, on pose $G_j = G_i \times_{S_j} S_i$ (resp. $H_j = H_i \times_{S_i} S_j$). Donc, quitte à remplacer I par la catégorie I/i, on peut supposer que G est relevé sur chacun des S_i.

[10]On peut faire la même note que celle qui apparaît dans la démonstration du cas d'un corps, les cristaux ne sont pas nécessairement localement libre. Ce problème n'apparaît pas lorsqu'on considère des groupes de Barsotti-Tate et pour le cas des groupes finis localement libre, on peut corriger la preuve comme nous l'a signalé P. Berthelot.

Le problème revient donc à trouver un $i \in I$ tel que le morphisme v se relève en un morphisme $v_i : \mathbb{D}(G_i) \to \mathbb{D}(H_i)$.

Pour cela, considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que G et H sont globalement tués par p^n. On peut alors travailler avec les cristaux de Dieudonné restreint à $\mathrm{Cris}(S/\Sigma_n)$.

On pose $B_i = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[A_i]$. On considère :

(1) l'augmentation canonique $B_i \to A_i$ et D_i l'enveloppe à puissance divisée de son noyau.

(2) la multiplication $B_i \otimes_{A_i} B_i \to B_i$ et $D_i(1)$ l'enveloppe à puissance divisée de son noyau.

Soit $B = \varinjlim_{i\in I} B_i$, $D = \varinjlim_{i\in I} D_i$, $D(1) = \varinjlim_{i\in I} D_i(1)$.

Géométriquement, posant $T = \mathrm{Spec}(B)$, $T_i = \mathrm{Spec}(B_i)$, on a construit un diagramme de schémas

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "D_i"] \arrow[d] & T_i \arrow[r, "D_i(1)"] \arrow[d] & T_i \times_{S_i} T_i \arrow[d] \\ S \arrow[r, "D"] & T \arrow[r, "D(1)"] & T \times_S T \end{tikzcd}$$

où l'on a indiqué au-dessus de chaque immersion fermée l'enveloppe à puissances divisés correspondante (on remarquera que la formation de l'enveloppe à puissance divisée d'un idéal commute à la limite inductive filtrante d'anneaux).

Or T est formellement lisse sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Donc les cristaux E sur $\mathrm{Cris}(S/\Sigma_n)$ se décrivent comme les D-modules $M(E)$ munis d'un isomorphisme ϵ : $D(1) \otimes M(E) \to M(E) \otimes D(1)$ vérifiant une condition de cocycles, et la même description est valable pour T_i avec D_i et $D_i(1)$.

Comme les D-modules correspondant aux cristaux de Dieudonné $\mathbb{D}_S(G)$ et $\mathbb{D}_S(H)$ – restreint au site S/Σ_n – sont de présentation finie sur $\mathcal{O}_{S/\Sigma_n}$, les D-modules correspondants $M\mathbb{D}_S(G)$ et $M\mathbb{D}_S(H)$ sont de présentation finie.

Or on a : $M\mathbb{D}_S(G) = \varinjlim_{i\in I} M\mathbb{D}(G_i) \otimes_{D_i} D$. Dès lors, le morphisme induit $M\mathbb{D}_S(H) \to M\mathbb{D}_S(G)$ induit par v se relève pour un indice $i \in I$ en un morphisme $M\mathbb{D}_i(H_i) \to M\mathbb{D}_i(G_i)$ et on peut supposer que ce relèvement est compatible à l'isomorphisme de type ϵ, au Frobenius et au Veschiebung.

On obtient ainsi un morphisme $v_i : \mathbb{D}(H_i) \to \mathbb{D}(G_i)$ tel que $\tau_i^* v_i = v$, pour $\tau_i : S \to S_i$ le morphisme canonique. D'après (D_{S_i}), on conclut qu'il existe $u_i : G_i \to H_i$ tel que $\mathbb{D}(u_i) = v_i$. Ainsi, $u_i \times_{S_i} S$ répond à la question. □

Rappelons le théorème de Popescu (cf [6]) : þ Soient A et B deux anneaux noethériens et $\varphi : A \to B$ un morphisme régulier.

Alors, B est limite inductive filtrante de A-algèbres lisses de type fini.

On en déduit donc :

Proposition 3.8. *Soit S un schéma noethérien régulier de caractéristique p.*

Alors, (D_S) est vraie.

En effet, la conjecture est locale, donc on peut supposer $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une $\mathbb{F}_p$-algèbre noethérienne. Le fait que A est régulier équivaut au fait que le morphisme $\mathbb{F}_p \to A$ est formellement lisse (ie régulier). Le théorème de Popescu implique que l'on peut écrire

$$A = \varinjlim_{i \in I} A_i$$

où A_i est une $\mathbb{F}_p$-algèbre lisse de type fini.

Or la conjecture (D_S) est vraie pour S un $\mathbb{F}_p$-schéma lisse car un tel schéma admet localement (pour Zariski) une p-base, puisqu'il est localement le spectre d'extension étale d'une $\mathbb{F}_p$-algèbre de polynômes. On conclut par passage à la limite.

4. Extension de la conjecture par déformation

Dans cette section, on considère la conjecture (D_S) pour les groupes Barsotti-Tate et non la version plus générale pour les groupes finis localement libres.

Citons juste brièvement le résultat suivant, qui vient prolonger les diverses méthodes permettant de montrer la conjecture (D_S) :

Théorème 4.1 ([3], 4.3.1). *Soit S un schéma de caractéristique p admettant localement une p-base.*

On considère T un S-schéma syntomique et $T_0 \to T$ une immersion fermée dont l'idéal admet des puissances divisées nilpotentes (compatibles à celle de Σ).

Alors, $(D_{T_0}) \Rightarrow (D_T)$.

L'idée de ce théorème est de se ramener à la théorie de Messing qui classifie les déformations des groupes de Barsotti-Tate.

Tout d'abord, on montre que la restriction du cristal $\mathbb{D}_T(G)$ au site nilpotent cristallin (ie les nilimmersions des objets du site ont un idéal p.d.-nilpotent) est canoniquement isomorphisme au cristal de Dieudonné défini par Messing en terme de l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle. Cela passe par le relèvement de l'extension vectorielle universelle du groupe G en une extension dans le topos cristallin nilpotent de T/Σ.

Rappelons rapidement la théorie de Messing. Soit G_0 un groupe de Barsotti-Tate sur T_0. Une déformation de G_0 suivant $T_0 \to T$ est un groupe de Barsotti-Tate G sur T munie d'un isomorphisme $G \times_T T_0 \simeq G_0$.

La théorie de Messing montre que la catégorie des déformations de G_0 est équivalente à la catégorie des facteurs directs Fil^1 du faisceau fppf $\mathbb{D}_{T_0}(G_0)_{(T_0,T)}$ sur T. Le foncteur en question associe à une déformation G le faisceau ω_G.

Dès lors, considérons G et H deux groupes de Barsotti-Tate sur T. On les considère comme des déformations des groupes $G_0 = G \times_T T_0$ et $H_0 = H \times_T T_0$. Soit $v : \mathbb{D}(H) \to \mathbb{D}(G)$ un morphisme. Alors, $v_0 : \mathbb{D}(H_0) \to \mathbb{D}(G_0)$ se relève de façon unique en $u_0 : G_0 \to H_0$.

Pour vérifier que ce morphisme se déforme de façon unique en un $u : G \to H$, il suffit de vérifier que le morphisme induit $\mu : \mathbb{D}(H_0)_{(T_0,T)} \to \mathbb{D}(G_0)_{(T_0,T)}$ est compatible à la filtration canonique : $\mu(\omega_H) \subset \omega_G$.

Pour vérifier que $\mathbb{D}(u) = v$, on montre que cette égalité à lieu sur l'image de Frobenius (car celui-ci se factorise par T_0). Donc a fortiori, l'égalité a lieu mod p. Il suffit alors d'exploiter le fait que les cristaux $\mathbb{D}(G)$ et $\mathbb{D}(H)$ sont localement libres.

5. Prolongements et commentaires

5.1. **Equivalence de catégorie ?** Une fois que l'on sait que le foncteur de Dieudonné est pleinement fidèle, le problème est encore de caractériser son image essentielle.

La catégorie des groupes de Barsotti-Tate forme un champ pour la topologie fppf. (ce qui signifie intuitivement que la donnée d'un groupe de Barsotti-Tate sur S est équivalente à la donnée d'un groupe de Barsotti-Tate sur un recouvrement fppf de S muni d'une donnée de recollement).

Le foncteur de Dieudonné est compatible au changement de base. Donc l'image essentielle de ce foncteur est encore un champ pour la topologie fppf.

Ceci étant dit, les réductions dans le cas de la pleine fidélité restent valable pour la construction d'un quasi-inverse de $\mathbb{D}_S$, ou simplement son caractère essentiellement surjectif lorsqu'on a trouvé un candidat non trivial pour son image essentielle.

Ainsi, on doit pouvoir dériver le résultat suivant :

Soit S_0 une courbe régulière intègre sur $\mathbb{F}_p$ de corps des fonctions K, L la cloture parfaite de K et S la normalisation de S_0 dans L. Alors, le foncteur $\mathbb{D}_S$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des groupes de Barsotti-Tate sur S et la catégorie des cristaux de Dieudonné sur $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$ *qui sont localement libres et de rang fini sur $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$.*

En effet, localement, S est le spectre d'un anneau vérifiant les conditions du théorème 3.2 et on procède par recollement.

5.2. **Contre-exemples et conjecture.** Tous les schémas en groupes considérés sont au-dessus de S, on ne le précise pas dans la notation. Considérons le S-schéma en groupes définit par la suite exacte

$$0 \to \alpha_p \to \mathbb{G}_a \xrightarrow{F} \mathbb{G}_a \to 0.$$

On peut calculer facilement le cristal de Dieudonné de α_p. Notons tout d'abord que, comme S est de caractéristique p, on défini un morphisme canonique dans $(S/\Sigma_1)_{\mathrm{cris}}$

$$\Phi : i_{S/\Sigma_1 *}(\mathcal{O}_S) \to \mathcal{O}_{S/\Sigma_1}.$$

[En effet, pour tout (U, T, δ) dans $\mathrm{Cris}(S/\Sigma_1)$, il existe un unique morphisme $\Phi : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_T$ qui factorise le Frobenius sur $\mathcal{O}_U$.] Suivant Berthelot, pour tout faisceau fppf $\mathcal{M}$ en modules quasi-cohérent sur $\mathcal{O}_S$, on pose

$$\Phi^*\mathcal{M} = i_{S/\Sigma_1 *}(\mathcal{M}) \otimes_{i_{S/\Sigma_1 *}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_{S/\Sigma_1}.$$

Dès lors, comme α_p est annulé var V, on obtient

$$\mathbb{D}(\alpha_p) = \Phi^*(\mathcal{L}ie(\alpha_p)).$$

5.2.1. *Fidélité.* Si S est le spectre de l'anneau

$$k[x_1, ..., x_6]/(x_1^p, ...x_6^p, x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6),$$

il existe un endomorphisme non nul de α_p dont l'image par $\Phi^*\mathcal{L}ie$ est nulle.

Donc la fidélité est mise en défaut sans hypothèse sur S.

5.2.2. *Pleine fidélité.* Considérons le cas $S = \mathrm{Spec}(k[t]/(t^p))$.

Alors, les Frobenius et Verschiebung sur $\mathbb{D}(\alpha_p)$ sont nuls. Un endomorphisme de $\mathbb{D}(\alpha_p)$ correspond donc à une section de $\mathcal{O}_{S/\Sigma_1}$, autrement dit à un élément $P(t)$ de l'enveloppe à puissance divisée $D_{k[t]}(t^p)$ tel que $d(P(t)) = 0$.

Si u est un endomorphisme de α_p, $\mathbb{D}(u) = \Phi^*\mathcal{L}ie(u)$. Ce dernier morphisme est donc nécessairement défini par une puissance p-ième de $k[t]$. Ainsi, l'endomorphisme de $\mathbb{D}(\alpha_p)$ défini par la section $\gamma_n(t^p)$ pour $n \geq p$ n'est pas atteint par le foncteur $\mathbb{D}$.

5.2.3. *Conjecture de Berthelot-Messing.* La conjecture la plus optimiste que j'ai pu relever est la suivante :

Soit S un schéma admettant localement une p-base et T un S-schéma syntomique, le foncteur de Dieudonné $\mathbb{D}_T$ est-il pleinement fidèle sur les groupes de Barsotti-Tate ?

5.3. **Illustration de la théorie.** Soit k un corps parfait de caractéristique p, $W = \mathbb{W}(k)$, $K = \mathrm{Frac}(W)$ et $\bar{K}$ une cloture algébrique de K.

Théorème 5.1 ([3], 4.5.2)**.** *Soit X un k-schéma propre et lisse à fibres géométriquement connexes.*

On suppose qu'il existe une extension finie K'/K, d'anneau des entiers V' et de corps résiduel k', et un schéma $\mathcal{X}$ propre et lisse sur V' de fibre spéciale $X_{k'}$ tel que $\pi_1(\mathcal{X}_{\bar{K}}) = 0$.

Soit G un groupe de Barsotti-Tate sur X. Le cristal de Dieudonné $\mathbb{D}_X(G)$ peut être vu comme un cristal sur le site $\mathrm{Cris}(X/W)$*. Les sections globales $\Gamma(X/W; \mathbb{D}_X(G))$ de ce cristal forment un module de Dieudonné sur k au sens classique. Soit H le groupe de Barsotti-Tate qui lui est attachée par l'équivalence classique.*

Alors G est isogène à $H \times_k X$.

Autrement dit, si X admet un modèle propre et lisse simplement connexe (et ceci à extension finie des scalaires près), le système local correspondant à un groupe de Barsotti-Tate est «simple» ie déduit d'un système local analogue sur le point.

Ce type de résultat est trivial dans une théorie où les systèmes locaux correspondent aux représentations du π_1 ; c'est pourquoi dans ce contexte il est si frappant !

Indication de preuve : On se ramène à prouver le résultat pour les isocristaux.

On doit montrer que tout isocristal sur X est constant, c'est-à-dire caractérisé par ses sections globales.

On se ramène au cas de K'. Comme X'/K' admet un modèle projectif lisse, tout isocristal correspond à un fibré algébrique à connexion sur la fibre générique $\mathcal{X}_{K'}$. Il suffit alors de considérer un sous-corps de K' admettant un plongement complexe et d'appliquer d'une part la théorie GAGA et d'autre part le théorème de Grothendieck sur le groupe fondamental au-dessus de $\mathbb{C}$ pour se ramener à montrer qu'un système local sur un espace analytique complexe simplement connexe est constant (ie simple).

Références

[1] Pierre Berthelot. Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :225–268, 1980.

[2] Pierre Berthelot, Lawrence Breen, and William Messing. *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, volume 930 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[3] Pierre Berthelot and William Messing. Théorie de Dieudonné cristalline. III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 173–247. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[4] Jean-Marc Fontaine. *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Astérisque, No. 47-48.

[5] Alexandre Grothendieck. *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*. Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1974. Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 45 (Été, 1970).

[6] Dorin Popescu. General Néron desingularization. *Nagoya Math. J.*, 100 :97–126, 1985.