Groupe de travail «Poids et motifs»

Université Paris 13, 2007-2008

———————

Complexe des poids II

par

F. Déglise

———-

On présente ici la construction du complexe des poids de Gillet-Soulé, dans la catégorie des motifs purs en caractéristique 0. Ce complexe de motifs purs se relève en un complexe de motifs de Chow.

On fixe un corps k de caractéristique 0. Tous les schémas sont des k-schémas séparé de type fini.

Par convention, tous les schémas simpliciaux sont des objets simpliciaux dont les morphismes de transitions sont propres.

Table des matières

1. Enoncé

1.1. — Rappelons les notations de l'exposé précédent :

- $\mathcal{V}$ désigne la catégorie des k-schémas projectifs lisses. $\mathbb{Z}.\mathcal{V}$ désigne la catégorie additive libre engendrée par $\mathcal{V}$.
- $\mathcal{P}$ désigne la catégorie des k-schémas projectifs.
- $\mathcal{C}$ désigne la catégorie des k-schémas projectifs lisses avec pour morphisme les correspondances de degré homologique 0 :

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \mathrm{CH}_{d_X}(X \times Y) \text{ pour } d_X = \dim(X).$$

  Le graphe d'un morphism induit un foncteur covariant

  $$\gamma : \mathcal{V} \to \mathcal{C}.$$

On choisit pour tout l'exposé une relation déquivalence adéquate sur les cycles — entre l'équivalence rationelle et l'équivalence numérique.

On note $\mathcal{M}$ la catégorie des motifs purs effectifs pour cette relation d'équivalence. Notons que l'on dispose d'un foncteur contravariant

$$\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{M}, X \mapsto M(X)$$

tel que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{CH}_{d_X}(X\times Y)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathrm{M}(Y),\mathrm{M}(X))=CH^{d_X}(X\times Y) \\ \alpha & \mapsto & {}^t(\alpha) \end{array}$$

Si $\mathcal{X}$ est un objet simplicial de $\mathcal{V}$, appliquant le foncteur $M\circ\gamma$ termes à termes, on obtient un motif cosimplicial. On note simplement $M(\mathcal{X})$ le complexe (de cochaines) associé. Cette construction est bien sûr contravariante par rapport à $\mathcal{X}$.

On obtient le corollaire suivant du théorème 1 de [**GS96**] vu dans l'exposé précédent ([**?**, 3.2]).

Corollary 1.2. — *Soit $\mathcal{Y}\xrightarrow{\tilde f}\mathcal{X}$ un morphisme de schémas simpliciaux dans $\mathcal{V}$ tel que pour tout schéma projectif lisse V, le morphisme induit*

$$C_*(V\times\mathcal{Y};K_*^M)\to C_*(V\times\mathcal{X};K_*^M)$$

est un isomorphisme.

Alors, le morphisme induit

$$\mathrm{M}(\mathcal{X})\xrightarrow{\tilde f^*}\mathrm{M}(\mathcal{Y})$$

est une équivalence d'homotopie.

Il suffit de considérer le mapping cone de $\tilde f$ et d'appliquer le théorème *loc. cit.*

1.3. — Soit X un schéma. D'après le théorème de Nagata (cf [**?**]), il existe un schéma propre X et une immersion ouverte $X\to\bar X$. On pose $X_\infty=\bar X-X$ et on note $i:X_\infty\to\bar X$ l'immersion fermée évidente.

D'après le lemme 2 de [**GS96**] (voir aussi lemme 1.5 de l'exposé précédent [**?**]), on peut trouver une enveloppe non singulière $\tilde f$ de i

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}' \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, "h'"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "h"] \\ X_\infty \arrow[r, "i"] & \bar X. \end{tikzcd}$$

On pose alors :

$$\mathrm{W}(X)=\mathrm{Cone}\left(\mathrm{M}(\mathcal{X})\xrightarrow{\tilde f^*}\mathrm{M}(\mathcal{X}')\right)$$

Cette construction vérifie les propriétés du théorème suivant :

Theorem 1 **(Gillet-Soulé)**. — *Considérons les notations précédentes.*
Le complexe $\mathrm{W}(X)\in\mathrm{K}(\mathcal{M})$ est à isomorphisme canonique près indépendant du choix de la compactification $\bar X$.

(i) $\mathrm{W}(X)$ *est isomorphe à un complexe borné de la forme*

$$M(X_0)\xrightarrow{\alpha_1^*}\dots\xrightarrow{\alpha_k^*}M(X_k)$$

où $k\le\dim(X)$, X_i est un schéma projectif lisse et $\dim(X_i)\le\dim(X)-i$, α_i est une correspondance.

(ii) $\mathrm{W}(X)$ *est contravariant (resp. covariant) en X par rapport aux morphismes propres (resp. immersion ouvertes).*

(iii) *Soit X un schéma et $Z \subset X$ un fermé. Posons $U = X - Z$ et considérons les immersions canoniques $i : Z \to X$, $j : U \to X$. Il existe un triangle distingué canonique dans* $\mathrm{K}(\mathcal{M})$ *:*

$$\mathrm{W}(U) \xrightarrow{j_*} \mathrm{W}(X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{W}(Z) \to \mathrm{W}(U)[1].$$

Ce triangle est naturel de manière contravariante (resp. covariante) par rapport aux morphismes propres $f : X' \to X$ (resp. immersions ouvertes $l : X' \to X$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}(U') \arrow[r, "j'_*"] \arrow[d, shift left] & \mathrm{W}(X') \arrow[r, "i'^*"] \arrow[d, shift left, "l_*"] & \mathrm{W}(Z') \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \mathrm{W}(U')[1] \arrow[d, shift left] \\
\mathrm{W}(U) \arrow[r, "j_*"] \arrow[u, shift left] & \mathrm{W}(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[u, shift left, "f^*"] & \mathrm{W}(Z) \arrow[r] \arrow[u, shift left] & \mathrm{W}(U)[1] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

où l'on a posé $Z' = f^{-1}(Z)$.

(iv) *Pour une recouvrement fermé $X = A \cup B$, il existe un triangle distingué du type Mayer-Vietoris*

$$\mathrm{W}(X) \to \mathrm{W}(A) \oplus \mathrm{W}(B) \to \mathrm{W}(A \cap B) \to \mathrm{W}(X)[1].$$

induit par les immersions fermées évidentes.

Pour un recouvrement ouvert $X = U \cup V$, il existe un triangle distingué du type Mayer-Vietoris

$$\mathrm{W}(U \cap V) \to \mathrm{W}(U) \oplus \mathrm{W}(V) \to \mathrm{W}(X) \to \mathrm{W}(U \cap V)[1].$$

induit par les immersions ouvertes évidentes.

(v) $\mathrm{W}(X \times Y) = \mathrm{W}(X) \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{W}(Y)$.

Remarquons que, par définition, $\mathrm{W}(X) = \mathrm{W}(X_{red})$.
Utilisant (iii), on obtient :

$$\mathrm{W}(\mathbb{A}^1) = \mathrm{W}(\mathbb{P}^1)/\mathbb{1} = \mathbb{L}.$$

Le foncteur W est donc un foncteur de type «cohomologie à support compact».

2. Preuve du théorème: construction

2.1. Partie «résolution des singularités». — On considère la catégorie $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$ des flèches de $\mathcal{P}$, avec pour morphismes les diagrammes commutatifs. Notons que cette catégorie admet des produits fibrés, en considérant le produit fibré sur la source et le but, ainsi que la flèche induite.

2.1. — On va construire un foncteur contravariant

$$T : \mathcal{A}r(\mathcal{P})^{op} \to K(\mathcal{M})$$

tel que $W(X) = T(i)$.

Si $Y \xrightarrow{f} X$ est une flèche de $\mathcal{P}$, on sait qu'on peut trouver une hyper-enveloppe non singulière

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

que l'on note simplement $\tilde{f} \xrightarrow{\Delta} f$.

On pose

$$T(\Delta_f) = \mathrm{Cone}\left(\tilde{f}^* : \mathrm{M}(Y) \to \mathrm{M}(X)\right)[-1] \in \mathrm{K}(\mathcal{M})$$

et on cherche à montrer que cette construction est indépendante à isomorphisme canonique près du choix de Δ.

Pour celà, on va définir T sur les flèches de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$. Soit $\Theta : f_1 \to f_2$ une telle flèche. Considérons des hyper-enveloppes non singulières $\Delta_i : \tilde{f}_i \to f_i$ pour $i = 1, 2$. Notons que $\tilde{f}_1 \times_{f_2} \tilde{f}_2$ est bien une hyper-enveloppe de $\tilde{f}_1$, mais elle n'est pas non singulière. On choisit donc une hyper-enveloppe non singulière

$$\Delta : \tilde{f} \to \tilde{f}_1 \times_{f_2} \tilde{f}_2$$

pour obtenir un diagramme commutatif :

(1)
$$\begin{tikzcd} \tilde{f} \arrow[r, "B"] \arrow[d, "A"'] & \tilde{f}_2 \arrow[dd, "\Delta_2"] \\ \tilde{f}_1 \arrow[d, "\Delta_1"'] & \\ f_1 \arrow[r, "\Theta"] & f_2. \end{tikzcd}$$

Le morphisme A est une hyper-enveloppe. Il résulte du corollaire 1.2 que le morphisme induit :

$$\mathrm{Cone}(\tilde{f}_1^*)[-1] \xrightarrow{A^*} \mathrm{Cone}(\tilde{f}^*)[-1]$$

est un isomorphisme dans $\mathrm{K}(\mathcal{M})$.

On pose : $T(\Theta) = (A^*)^{-1} \circ B^* : T(\Delta_2) \to T(\Delta_1)$.

On vérifie aisément que $T(\Theta)$ est indépendant du choix de Δ — si l'on se donne deux choix $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$, il suffit de considérer une hyper-enveloppe non singulière du produit fibré $\tilde{f} \times_{\tilde{f}_1 \times_{f_2} \tilde{f}_2} \tilde{f}'$.

2.2. — Vérifions que $T(\Theta)$ est compatible à la composition. Considérons $f_1 \xrightarrow{\Theta} f_2 \xrightarrow{\Theta'} f_3$. Reprenant la construction de (1), on trouve un diagramme commutatif de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{f}'' \arrow[r, "B''"] \arrow[d, "A''"'] & \tilde{f} \arrow[r, "B"] \arrow[d, "A"'] & \tilde{f}_3 \arrow[dddd, "\Delta_3"] \\ \tilde{f}' \arrow[r, "B'"] \arrow[d, "A'"'] & \tilde{f}_2 \arrow[ddd, "\Delta_2"] & \\ \tilde{f}_1 \arrow[d, "\Delta_1"'] & & \\ f_1 \arrow[r, "\Theta"] & f_2 \arrow[r, "\Theta'"] & f_3. \end{tikzcd}$$

Dès lors,

$$T(\Theta'\Theta) = (A''^* A'^*)^{-1}(B''^* B^*) = A'^* B'^* (A^*)^{-1} B^* = T(\Theta)T(\Theta').$$

2.3. — Pour conclure, on voit que si l'on fixe un choix $h = (\Delta_f : \tilde{f} \to f)_f$ d'hyper-enveloppes non singulières des flèches de $\mathcal{P}$, on obtient un foncteur

$$T_h : \mathcal{A}r(\mathcal{P})^{op} \to \mathrm{K}(\mathcal{M}), f \mapsto T(\Delta_f).$$

Si l'on se donne un autre choix, $h' = (\Delta'_f : \tilde{f}' \to f)_f$, on obtient un isomorphisme de foncteur

$$T_h \to T_{h'}, T(\Delta_f) \xrightarrow{T(1_f)} T(\Delta'_f).$$

Avant de passer à l'étape suivante, considérons quelques propriétés du foncteur T.

2.4. — Afin d'énoncer les deux propriétés qui vont suivre, effectuons quelques rappels d'algèbres homologique.

Lemma 2.5. — *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive (resp. abélienne). Considérons un carré commutatif de complexes de A :*

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{v} & L' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Delta & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K & \xrightarrow{u} & L \end{array}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Il existe un triangle distingué dans* $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ *(resp.* $\mathrm{D}(\mathcal{A})$)

$$K' \xrightarrow{\binom{g}{-v}} K \oplus L' \xrightarrow{(u,f)} L \to K'[1]$$

(ii) *La flèche canonique* $\psi : \mathrm{Cone}(v) \to \mathrm{Cone}(u)$ *est un isomorphisme dans* $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ *(resp. $D(\mathcal{A})$).*

(iii) *Le complexe* $L \oplus K[1] \oplus L'[1] \oplus K'[2]$ *muni de la différentielle*[(1)]

$$\begin{pmatrix} d_L & u & f & 0 \\ 0 & -d_K & 0 & g \\ 0 & 0 & -d_{L'} & -v \\ 0 & 0 & 0 & d_{K'} \end{pmatrix}$$

est nul dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ *(resp.* $\mathrm{D}(\mathcal{A})$*).*

Démonstration. — Notre convention concernant les cônes est la suivante :

$$\mathrm{Cone}(u) = L \oplus K[1]$$

avec pour différentielle $\begin{pmatrix} d_L & u \\ 0 & -d_C \end{pmatrix}$.

Le premier point est équivalent à montrer que la flèche canonique

$$\varphi : \mathrm{Cone}\binom{g}{-v} \to L$$

(1) On n'indique pas les shift dans les morphismes pour alléger la notation

induite par (u, f) est un isomorphisme dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathrm{D}(\mathcal{A})$).

Or le cône de cette flèche est exactement le complexe considéré dans (iii). L'équivalence de (i) et (iii) en résulte.

Rappelons que la matrice de ψ est $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. Un nouveau calcul montre que le cône de ce morphisme est *égal* au complexe de (iii) ce qui conclut. □

Definition 2.6. — Considérons les notations du lemme précédent. On dit que Δ est homotopiquement cartésien dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathrm{D}(\mathcal{A})$) lorsque les conditions (i), (ii), (iii) sont vérifiées.

Revenons aux considérations qui précèdent ces rappels.

Definition 2.7. — Soit $\Delta : f_1 \to f_2$ un morphisme dans $\mathcal{A}r(\mathcal{P})(\mathcal{P})$. Nous dirons que Δ est une Gersten-équivalence si pour tout schéma projectif lisse V, le carré $C^*(V \times \Delta; K_*^M)$ est homotopiquement cartésien dans $\mathrm{D}(\mathcal{A}b)$.

L'intérêt de cette notion réside dans le fait que si Δ est une Gersten équivalence, le morphisme $T(\Delta) : T(f_2) \to T(f_1)$ est une Gersten équivalence. En effet, la propriété d'être homotopiquement cartésien est préservé si l'on prend des hyper-enveloppes non singulières de f_1 et f_2 s'inscrivant dans un diagramme du type (1) par application du corollaire 1.2. La condition (ii) du lemme précédent permet de conclure.

2.8. — Pour en finir avec les rappels, parlons d'octaèdre.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive.

Considérons une suite $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ de complexes de $\mathcal{A}$. On lui associe le triangle suivant :

$$(2) \qquad B \oplus A[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} C \oplus A[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}} C \oplus B[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} B[1] \oplus A[2]$$

Lemma 2.9. — *Considérons les notations fixée ci-dessus.*

Alors, le triangle correspondant à (2)

$$\mathrm{Cone}(u) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Cone}(vu) \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Cone}(v) \to \mathrm{Cone}(u)[1]$$

est distingué dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Démonstration. — Le cone de $\bar{v}$ n'est rien d'autre que le complexe $C \oplus A[1] \oplus B[1] \oplus A[2]$. On peut donc définir un morphisme $\mathrm{Cone}(u) \to \mathrm{Cone}(\bar{v})$ avec pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On peut vérifier directement que ce dernier est une équivalence d'homotopie (cf [?]) ce qui conclut. □

Remark 2.10. — Ce lemme est bien sûr l'axiome de l'ocatèdre dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Considérons deux flèches composables $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ de $\mathcal{P}$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, equal] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "gf"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

correspodn à une suite $f \xrightarrow{\Delta} gf \xrightarrow{\Theta} g$ de morphismes de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$. On déduit du lemme précédent un triangle distingué canonique dans $\mathrm{K}(\mathcal{M})$

$$T(g) \xrightarrow{\Theta^*} T(gf) \xrightarrow{\Delta^*} T(f) \to T(g)[1]. \tag{3}$$

2.2. Partie «compactification». —

2.11. — Considérons un morphisme propre de schémas $f : X_1 \to X_2$, et une compactification $X_\lambda \to \bar{X}_\lambda$ pour $\lambda = 1, 2$. On note $i_\lambda : Y_\lambda \to \bar{X}_\lambda$ l'immersion du complémentaire de X_λ. Soit $X_f \subset X_1 \times X_2$ le graphe de f, $\bar{X}_f$ son adhérence dans $\bar{X}_1 \times \bar{X}_2$. Notons $i_f : Y_f \to \bar{X}_f$ l'immersion du complémentaire de X_f dans $\bar{X}_f$. Notons que les carrés

$$\begin{tikzcd} X_1 & X_f \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\ \bar{X}_1 \arrow[from=u] & \bar{X}_f \arrow[l] \arrow[r] & \bar{X}_2 \end{tikzcd}$$

sont cartésiens. Cela résulte de ce que X_f est fermé dans $X_1 \times \bar{X}_2$ (car $X_f \to X_1$ est un isomorphisme) et dans $\bar{X}_1 \times X_2$ (car $X_f \to X_2$, étant isomorphe à f, est propre).

On dispose des morphismes de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$ suivants :

$$i_1 \xleftarrow{\Delta_1} i_f \xrightarrow{\Delta_2} i_2.$$

Or, Δ_1 est une Gersten équivalence, comme on le voit en considérant le morphisme de suites exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_*(V \times Y_f; K_*^M) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Delta_1 *"] & C_*(V \times \bar{X}_f; K_*^M) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(V \times X_f; K_*^M) \arrow[r] \arrow[d, "(*)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_*(V \times Y_1; K_*^M) \arrow[r] & C_*(V \times \bar{X}_1; K_*^M) \arrow[r] & C_*(V \times X_1; K_*^M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

V est un schéma projectif lisses arbitraire. Les lignes sont les suites de localisations évidentes. Les flèches verticales sont des pushouts obtenu par les projections canoniques. Ainsi, le morphisme (*) est un isomorphisme et le carré Δ_{1*} est homotopiquement cartésien d'après le point (ii) du lemme 2.5.

Ainsi, le morphisme $T(\Delta_1)$ est un isomorphisme et on peut définir le morphisme suivant :

$$W(f) : T(i_2) \xrightarrow{T(\Delta_2)} T(i_f) \xrightarrow{T(\Delta_1)^{-1}} T(i_1).$$

Comme à l'étape 2.2, on vérifie que W est compatible à la composition. Ainsi, quitte à faire un choix $k = (\bar{X} \xrightarrow{j_X} X)_X$ de compactifications pour tout X, on peut définir le foncteur $W_k(X) = T(j_X)$ et un autre choix mêne à un foncteur canoniquement isomorphe.

2.12. — La covariance, dans le cas d'une immersion fermée $i : Z \to X$, s'exprime facilement. Soit $\bar{X}$ une compactification de X et $\bar{Z}$ l'adhérence de Z dans X. Alors, $\bar{X} - X = \bar{Z} - Z$. On en déduit un morphisme de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$:

$$\begin{tikzcd} Z_\infty \arrow[r, equal] \arrow[d, "j_Z"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta_i"] & X_\infty \arrow[d, "j_X"] \\ \bar{Z} \arrow[r] & \bar{X} \end{tikzcd}$$

Par construction, $i_* = T(\Delta_i)$.

Par ailleurs, W est covariant par rapport aux immersions ouvertes. Soit $j : U \to X$ une telle immersion. Fixons une compactification $\bar{X}$ de X. Soit X_∞ (resp U_∞) le complémentaire de X (resp. U) dans $\bar{X}$. On en déduit un morphisme de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$:

$$\begin{tikzcd} X_\infty \arrow[r] \arrow[d, "j_X"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta_j"] & U_\infty \arrow[d, "j_U"] \\ \bar{X} \arrow[r, equal] & \bar{X} \end{tikzcd}$$

et on pose :

$$j^* = T(\Delta_j) : W(X) \to W(U).$$

Lorsqu'on aura besoin d'indiquer qu'un morphisme de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$ est de l'une des deux formes précédentes, on utilisera :

– Le symbole $\xrightarrow{(*)}$ pour un morphisme du type Δ_i.
– Le symbole $\xrightarrow{(**)}$ pour un morphisme du type Δ_j.

3. Preuve du théorème: propriétés

3.1. Triangle de localisation. — Commençons par la propriété (iii) du théorème. En reprenant les notations de 2.12, dans le cas où $U = X - Z$, on en déduit une suite de morphismes de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$:

$$\begin{tikzcd} Z_\infty \arrow[r, equal] \arrow[d, "j_Z"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta_i"] & X_\infty \arrow[r] \arrow[d, "j_X"] \arrow[dr, phantom, "\Delta_j"] & U_\infty \arrow[d, "j_U"] \\ \bar{Z} \arrow[r] & \bar{X} \arrow[r, equal] & \bar{X} \end{tikzcd}$$

Le triangle de (3) dans le cas de (Δ_i, Δ_j) donne exactement le triangle de localisation.

3.1.1. Naturalité covariante. — Considérons à nouveau les notations de la propriété (iii) et fixons une immersion ouverte $j : V \to X$. On pose $T = V \cap Z$ et $W = U \cap V$.

Soit $\bar{X}$ une compactification de X. C'est aussi une compactification de U, de V et de W. De même, l'adhérence $\bar{Z}$ de Z dans $\bar{X}$ est une compactification de Z et de T.

Dès lors, adoptant la notation i_A pour l'immersion du complémentaire de A dans sa compactification, avec $A = X, U, V, W$, $\bar{A} = \bar{X}$ ou $A = Z, T$, $\bar{A} = \bar{Z}$, on obtient le diagramme de $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$ suivant :

$$\begin{tikzcd} i_Z \arrow[r, "(*)"] \arrow[d, "(**)"] & i_X \arrow[r, "(**)"] \arrow[d, "(**)"] & i_U \arrow[d, "(**)"] \\ i_T \arrow[r, "(*)"] & i_V \arrow[r, "(**)"] & i_W \end{tikzcd}$$

où le type les symboles correspondent à la convention de 2.12. Après application du foncteur T, on obtient le diagramme commutatif exprimant la fonctorialité du triangle de localisation par rapport au morphisme j.

3.1.2. Naturalité contravariante. — Considérons un morphisme propre $f : X' \to X$ et posons $Z' = Z \times_X X'$, $U' = U \times_X X'$.

Supposons tout d'abord que f soit un isomorphisme. Dans ce cas, on voit facilement que $f^* = f_*^{-1}$. Dès lors, d'après le cas précédent, le triangle de localisation est naturel par rapport à f^*. Pour établir que $f^* = f_*^{-1}$, on considère une compactification $\bar{X}$ de X. C'est encore une compactification de X'. Par ailleurs, le complémentaire de l'image de X dans $\bar{X}$ est égal au complémentaire de l'image de X' dans $\bar{X}$. On en déduit que $i_X = i_{X'}$ avec ce choix de compactifications. Les morphismes identités définissent un diagramme de flèche

$$i_X \xrightarrow{(*)} i_{X'} \xrightarrow{(**)} i_X$$

dont la composée est l'identité. Par application de T à ce diagramme, on obtient la relation attendue.

Revenons au cas général du morphisme propre $f : X' \to X$. Soit $\bar{X}$ une compactification de X. Soit X'' le graphe de f et $\bar{X}''$ son adhérence dans $X' \to \bar{X}$. Alors, $\pi : X'' \to X'$ est un isomorphisme. Le triangle de localisation est naturel par rapport à l'isomorphisme π^* d'après ce qui précède ce qui permet de se réduire au cas de X''.

On peut donc supposer que le morphisme $f : X' \to X$ admet une compactification $\bar{f} : \bar{X}' \to \bar{X}$ induisant un morphisme $i_{X'} \to i_X$ sur les immersions complémentaires. Comme dans le cas précédent, on en déduit un diagramme commutatif dans $\mathcal{A}r(\mathcal{P})$ qui permet de conclure :

$$\begin{tikzcd}
i_{Z'} \arrow[r, "(*)"] \arrow[d] & i_{X'} \arrow[r, "(**)"] \arrow[d] & i_{U'} \arrow[d] \\
i_Z \arrow[r, "(*)"] & i_X \arrow[r, "(**)"] & i_U
\end{tikzcd}$$

3.2. Preuve de (iv). — Considérons le cas d'un recouvrement fermé $X = A \cup B$. La fonctorialité du triangle de localisation induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
W(X-A) \arrow[r] \arrow[d] & W(X) \arrow[r, "(**)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & W(A) \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
W(B - A\cap B) \arrow[r] & W(B) \arrow[r] & W(A\cap B) \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

Or, $X - A = B - A \cap B$. Donc le carré Δ est homotopiquement cartésien ce qui conclut.

Le cas d'un recouvrement ouvert se prouve de manière analogue.

3.3. Preuve de (i). — On fait une induction sur la dimension de Krull de X.

Considérons un ouvert affine dense U de X, $Z = X - U$. Par hypothèse d'induction, le résultat est vrai pour $W(Z)$. D'après la suite exacte de localisation pour (X, U, Z), le résultat pour $W(U)$ est équivalent au résultat pour $W(X)$.

On peut donc supposer que X est quasi-projectif. Soit $\bar{X}$ une compactification projective lisse de X. Soit $X_\infty = \bar{X} - X$. On peut de plus choisir $\bar{X}$ de manière à ce que $\dim(X_\infty) < \dim(X)$. La suite de localisation pour $(\bar{X}, X, X_\infty)$ et l'hypothèse d'induction permettent donc de conclure.

3.4. Preuve de (v). — Supposons que X et Y sont propres. Soit $\mathcal{Y} \to Y$ et $\mathcal{X} \to X$ deux enveloppes non singulières. Alors, $\mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to X\times Y$ est une enveloppe non singulière. D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber, $\mathrm{Tot}\,(\mathrm{M}(\mathcal{X}) \otimes \mathrm{M}(Y)) \to \mathrm{M}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ est une équivalence d'homotopie, ce qui conclut.

Le cas général est laissé au lecteur — qui peut se référer à la preuve de [**GS96**], 2.7 !

3.5. Compléments. —

3.1. — Considérons un morphisme propre birationnel $f : Y \to X$ qui est un isomorphisme au-dessus du complémentaire de d'un fermé $Z \subset X$. Soit $T = Y \times_X Z$.

Alors, comme dans la preuve de (iv), la fonctorialité du triangle de localisation par rapport aux morphismes propres (en l'occurence f) montre qu'il existe un triangle distingué de la forme

$$\mathrm{W}(T) \to \mathrm{W}(Z) \oplus \mathrm{W}(Y) \to \mathrm{W}(X) \to W(T)[1].$$

Par contre, on ne peut pas montrer à priori que ce triangle est scindé. Ce point doit être vrai dans le cas où f est localement d'intersection complète ou plat.

3.2. — En effet, il y a lieu de généraliser la contravariance de W aux morphismes f ou bien localement d'intersection complète, ou bien plat. Toutefois, la dimension relative d de f doit intervenir sous la forme d'un twist par $\mathcal{L}^d$.

On aimerait bien trouver une propriété des morphismes de schémas qui permette de faire la construction de f^*, et qui unifie les bonnes propriétés de lci et plat. Il me semble que «être de Tor dimension finie» est un bon candidat. De même, syntomique est un autre bon candidat.

4. Illustrations

4.1. Weights. — Considérons un foncteur covariant $\Gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne quelconque.

Pour tout schama X et tout entier i, on note $R^i\Gamma(X)$ le i-ème groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(W(X))$ obtenu en appliquant Γ termes à termes.

Remarquons que $R^i\Gamma(X) = 0$ si $i \notin [0, \dim(X)]$ d'après la propriété (i) du théorème 1. Si de plus X est plrojectif lisse, $R^i\Gamma(X) = \Gamma(X)$ pour $i = 0$, et nul pour $i \neq 0$.

Par ailleurs, on dispose des suites de localisation, de Mayer-Vietoris pour un recouvrement ouvert ou bien fermé, du triangle d'un éclatement formel...

4.1. — Fixons un entier $n \geq 0$ et un anneau A. Considérons par exemple le cas où Γ est (une partie de) la réalisation de Betti

$$\Gamma^n(X, p) = p_* H^n(X(\mathbb{C}), A).$$

Pour une compactification $\bar{X}$ de X et une hyper-enveloppe non singulière $\tilde{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ de $X_\infty \to X$, on obtient

$$R^i\Gamma^n(X) = H^i\Gamma^n(\mathrm{Cone}(\mathrm{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{M}(\mathcal{Y}))[-1]).$$

Or, les hyper-enveloppes sont des morphismes de descente cohomologique universelle. Donc l'hypercohomologie des points complexes du schéma simplicial $\mathrm{Cone}(\mathcal{X} \to \mathcal{Y})[-1]$ est le groupe de cohomologie $H^*((\bar{X}, \bar{Y}), A) = H_c^*(X(\mathbb{C}), A)$. De plus $R^i\Gamma^n(X)$ coincide avec le terme E_2 de la suite spectrale de descente correspondante.

Ainsi,

***Theorem 2* (Gillet-Soulé).** — *La suite spectrale de descente cohomologique construite ci-dessus*

$$E_2^{i,n} \mapsto H_c^{i+n}(X(\mathbb{C}), A)$$

est indépendante des choix effectués.

Elle définit une filtration croissante $F_n^W H_c^k(X(\mathbb{C}), A)$ sur la cohomologie à supports compacts $H_c^*(X(\mathbb{C}), A)$.

Cette filtration est de longueur au plus $\dim(X)+1$. *Elle est compatible aux produits, naturelle contravariante (resp. covariante) par rapport au morphismes propres (resp. immersions ouvertes).*

Lorsque $A = \mathbb{Q}$, la filtration coincide avec la filtration par le poids définie par Deligne et

$$R^iH^n(X) \otimes \mathbb{Q} = gr_n^W H_c^{i+n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}).$$

Lorsque X est projectif et $k > 0$, $F_{k-1}^W H_c^k(X(\mathbb{C}), A)$ est égal au noyau du morphisme

$$\pi^* : H_c^k(X(\mathbb{C}), A) \to H_c^k(X'(\mathbb{C}), A)$$

pour une résolution des singularités $\pi : X' \to X$. Le fait que ce noyau est indépendant du choix de π' a été observé pour la première fois par Grothendieck.

4.2. Groupe de Grothendieck des motifs. — Notons $K_0(\mathcal{M})$ l'anneau de Grothendieck de la catégorie additive monoidale $\mathcal{M}$.

Theorem 3. — *Tout schéma quasi-projectif X a une classe $[X] \in K_0(\mathcal{M})$ caractérisée de manière unique par les propriétés*

(i) *Lorsque X est projectif lisse, $[X]$ est la classe de $M(X)$.*
(ii) *Lorsque $Z \subset X$ est un sous-schéma fermé, $[X] = [Z] + [X - Z]$.*

Pour la construction, il suffit de poser $[X] = [W(X)]$ compte tenu de l'identification $K_0(\mathcal{M}) \simeq K_0(K^b(\mathcal{M}))$. L'unicité résulte de la résolution des singularités. Ce théorème était conjecturé par Serre.

Grâce au théorème 1, on peut vérifier les propriétés suivantes :

1. Considérons un recouvrement $X = U \cup V$ par des parties localement fermée. Alors, $[X] = [U] + [V] - [U \cap V]$.
2. Si $f : X \to B$ est une fibration de fibre F localement triviale pour la topologie de Zariski sur B, $[X] = [F].[B]$.

Remarquons que l'on peut faire la même construction dansd $K_0(DM_{gm}^{eff}(k))$ en remplaçant W par le motif à supports compacts M^c. Lorsque l'équivalence choisie est l'équivalence rationelle, on a un foncteur canonique (contravariant)

$$K_0(\mathcal{M}) \to K_0(DM_{gm}^{eff}(k))$$

Le théorème de Bondarko affirme que ce morphisme est un isomorphisme qui envoie $[X]$ sur $[M^c(X)]$.

Références

[GS96] H. Gillet and C. Soulé. Descent, motives and K-theory. *J. Reine Angew. Math.*, 478:127–176, 1996.

Décembre 2007

F. Déglise