Groupe de travail «Poids et motifs»

DÉGÉNÉRESCENCES DE SUITES SPECTRALES ET THÉORÈMES DE LEFSCHETZ

F. DÉGLISE

Dans ce petit exposé de présentation, on présente la *question des poids* en suivant quelques lignes de l'article de Deligne "théorie de Hodge I". On a choisi comme fil conducteur le phénomène de dégénérescence des suites spectrales car il lie la théorie des poids aux théorèmes de Lefschetz. L'exposé se termine sur la preuve du théorème de Lefschetz difficile en cohomologie l-adique et caractéristique p d'après Deligne.

1. *Sujet* : Conjectures de Weil

Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p, $\bar{k}$ une cloture algébrique de k, $G = Gal(\bar{k}/k)$. Soit $F \in G$ le Frobenius arithmétique. On appellera simplement module galoisien tout $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel H de dimension finie munit d'une action de G.

Suivant Deligne ([Del71a]), on introduit la définition suivante :

Definition 1.1. Soit $n \geq 0$ un entier. Un module galoisien H est pur de poids n si les valeurs propres de F sur M sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $q^{n/2}$.

Remarquons tout de suite :

(1) Un quotient (resp. un sous-module) d'un module galoisien pur de poids n est pur de poids n.
(2) Un morphisme de modules galoisiens de poids différents est nécessairement nul.

Example 1.2. Soit μ le sous-groupe de $\bar{k}^*$ formé des racines de l'unité. Le module de Tate $\mathbb{Q}_l(1)$, défini par

$$\mathbb{Q}_l(1) = \mathrm{Hom}(\mu, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)_{\mathbb{Q}}$$

est pur de poids -2.

Selon cette définition, une refomulation de la plus difficile des conjectures de Weil est la suivante :

Pour tout k-schéma projectif lisse X, et pour tout entier i, $H^i(X_{\bar{k}}; \mathbb{Q}_l)$ est pur de poids i.

Thème.— Soit X un k-schéma projectif lisse, et $D = \sum_{i=1}^{n} D_i$ un diviseur globalement à croisements normaux dans X, somme de diviseurs lisses. On pose $U = X - D$ et on note $j : U \to X$ l'immersion ouverte correspondante. Pour $Q \subset [1, n]$, on pose $D_Q = \cap_{i \in Q} D_i$.

Date: Octobre 2007.

On obtient alors par pureté :

$$\mathrm{R}^q j_* \mathbb{Q}_l = \bigoplus_{\#Q=q} \mathbb{Q}_l(-q)_{D_Q},$$

et la suite spectrale de Leray pour j prend la forme

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{\#Q=q} H^p(D_Q, \mathbb{Q}_l) \otimes \mathbb{Q}_l(-q) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Q}_l).$$

D'après la conjecture de Weil, E_2^{pq} est pur de poids $p+2q$. Ainsi, E_3^{pq} est pur de poids $p+2q$. Or la différentielle d_r^{pq} de cette suite spectrale est G-équivariante ; elle est donc nulle et la suite spectrale de Leray dégénère.

La filtration induite par cette suite spectrale sur $H^n(U;\mathbb{Q}_l)$ est finie, G-équivariante et ses gradués sont purs ; c'est la filtration par le poids analogue mixte de la graduation par le poids sur $H^*(X;\mathbb{Q}_l)$.

2. *Contre-sujet* : Théorie de Hodge

Soit X une variété projective lisse complexe, Ω_X^* le complexe de De Rham (analytique) associé. La filtration bête sur le complexe de De Rham jointe avec l'isomorphisme de De Rham induit une suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow H^{p+q}(X;\mathbb{C}).$$

D'après la théorie de Hodge, cette suite spectrale dégénère de sorte que $E_1 = E_\infty$.

Par ailleurs, d'après la théorie de Hodge, on dispose d'une décomposition canonique pour tout entier n :

$$H^n(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X;\Omega_X^p)$$

selon le "type de Hodge"[1]. Ceci nous conduit à introduire suivant Deligne :

Definition 2.1. Soit n un entier. Une structure de Hodge pure de poids n est la donnée d 'un $\mathbb{Z}$-module de type fini H et d'une décomposition

$$H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

telle que $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$.

On associe à cette donnée la filtration de Hodge sur $H_{\mathbb{C}}$ définie par

$$F^p H_{\mathbb{C}} = \oplus_{r\geq p} H^{r,n-r}.$$

Remarquons tout de suite :

(1) Les structures de Hodge pures de poids n forment une catégorie abélienne.
(2) Si H et H' sont deux structures de Hodge de poids différents, un morphisme $f: H \to H'$ tel que $f_{\mathbb{C}}$ respecte les filtrations de Hodge est nécessairement de torsion.

Example 2.2. La structure de Hodge de Tate $\mathbb{Z}(1)$ est la structure de Hodge de poids -2 (purement de type $(-1,-1)$) telle que $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}} = 2i\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$. On pose $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$.

Thème.— Soit X un variété projective lisse complexe et $D = \sum_{i=1}^n D_i$ un diviseur globalement à croisements normaux dans X, somme de diviseurs lisses. On pose $U = X - D$ et on note $j : U \to X$ l'immersion ouverte correspondante. Pour $Q \subset [1,n]$, on pose $D_Q = \cap_{i\in Q} D_i$.

[1] Une classe dans $H^q(X;\Omega_X^p)$ est dit de type de Hodge (p,q).

En cohomologie rationelle, on peut écrire la suite spectrale de Leray sous la forme[2]

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{\#Q=q} H^p(D_Q, \mathbb{Q}) \otimes \tilde{\mathbb{Q}}(-q) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Q}).$$

En interprétant d_2^{pq} comme un morphisme de Gysin, on montre qu'il est compatible aux filtrations de Hodge. Dès lors, on en déduit comme dans le cas étale que la suite dégénère en E_3.

Comme dans le cas étale, la filtration induite sur $H^*(U, \mathbb{Q})$ est appelée la filtration par le poids - elle ne forme qu'une partie de la structure de Hodge mixte qu'on définit sur $H^*(U, \mathbb{Q})$ (cf [Del71b]).

On voit que le dénominateur entre la théorie de Hodge et la cohomologie l-adique est la notion de poids. La théorie des motifs vise à étendre ce dénominateur au niveau des catégories abéliennes mises en jeu. De même que la graduation par le poids sur H^* résulte de résultats profonds, il en sera de même sur la catégorie des motifs. Le passage de la théorie pure à la théorie mixte sera tout à fait analogue à celui décrit ici - plus exactement à l'extension qu'en a fait Deligne dans [Del74].

3. *Divertissements* : Théorèmes de Lefschetz

Dans cette partie, on se place sur un corps k cloture séparable d'un corps fini. Tous les schémas sont des k-schémas. On note $H^* := H^*_{et}(.; \mathbb{Q}_l)$ le foncteur cohomologie étale l-adique rationelle, l inversible dans k. On pose $K = \mathbb{Q}_l$.

Certains arguments exposés dans ce texte sont valables plus généralement pour une théorie cohomologique de Weil[3]. Nous laissons au lecteur le soin de se faire une idée sur cette extension.

3.1. *Théorème de Lefschetz faible.* — Le point de départ de ce numéro est le résultat suivant, dû à M. Artin (cf SGA4, XIV, 3.2) :

Theorem 3.2. *Soit X/k un schéma affine de type fini de dimension d.*
Alors, $H^n(X) = 0$ si $n > d$.

Considérons un schéma projectif lisse X de dimension d, muni d'un plongement $X \to \mathbb{P}^r_k$. Une section hyperplane de X est un sous-schéma fermé de la forme $Y = H \cap X$, pour un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^r_k$.

Le théorème de Bertini nous assure que Y est lisse partout de codimension 1 dans X pour H *en position générale*[4].

Considérons donc une telle section hyperplane Y de X, $U = X - Y$, et notons $i : Y \to X$, $j : U \to X$ les immersions canoniques. Par pureté, on obtient la suite exacte longue de localisation

$$...H^{n-1}(U) \xrightarrow{\partial} H^{n-2}(Y)(-1) \xrightarrow{i_*} H^n(X) \xrightarrow{j^*} H^n(U)...$$

Or U est affine. On déduit du théorème précédent :

$$(1) \qquad i_* : H^{n-2}(Y)(-1) \to H^n(X) \text{ est un } \begin{cases} \text{isomorphisme pour } n \geq d+2, \\ \text{épimorphisme pour } n = d+1. \end{cases}$$

La dualité de Poincaré fournit un isomorphisme $H^n(X)^\vee \xrightarrow{\pi_X} H^{2d-n}(X)(d)$, où $?^\vee$ désigne le dual au sens des K-espaces vectoriels. La pureté cohomologique fournit

[2]Toutefois, on prendra garde que $\tilde{\mathbb{Q}}(-q)$ est une forme tordue de la structure de Hodge de Tate de poids $2q$.

[3]Il est même plus judicieux de se placer dans le cadre d'une théorie de Weil mixte comme introduite dans [CD07]

[4]On peut paramétrer la condition $H \cap X$ est lisse partout de codimension 1 par un sous-espace de $\mathbb{P}^r_k$; le théorème de Bertini affirme que c'est un ouvert (dense).

par ailleurs la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H^n(X)^\vee \arrow[r, "i_*^\vee"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \big(H^{n-2}(Y)(-1)\big)^\vee \arrow[d, "\pi_Y"] \\ H^{2d-n}(X)(d) \arrow[r, "i^*"] & H^{2d-n}(Y)(d). \end{tikzcd}$$

En posant $m = 2d - n$ dans le diagramme précédent, on en déduit donc l'assertion duale de (1) :

$$(2) \qquad i^* : H^m(X) \to H^m(Y) \text{ est un } \begin{cases} \text{isomorphisme pour } m \leq d-2, \\ \text{monomorphisme pour } m \leq d-1. \end{cases}$$

C'est en général cette deuxième propriété qu'on appelle le *théorème de Lefschetz faible* – évidemment, le procédé qu'on vient de voir montre que (1) $\Leftrightarrow$ (2), ces propriétés étant équivalentes au fait que $H^n(X - Y) = 0$ pour $n > d$.

Rappelons que $i_*(1) = \eta_X(Y)$ est appelé la *classe fondamentale de Y dans X*.

3.3. *Théorème de Lefschetz difficile.* — Le point d'orgue de l'exposé est le théorème suivant :

Theorem 3.4. *Soit X un schéma projectif lisse de dimension d. Soit $\mathcal{L}$ un fibré ample sur X, $\xi = c_1(\mathcal{L})$ la première classe de Chern de $\mathcal{L}$.*

Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$L_X^n : H^{d-n}(X)(-n) \to H^{d+n}(X), x \mapsto \xi^n.x$$

est un isomorphisme.

Réduction au théorème de semi-simplicité de Deligne

Quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par une de ses puissances tensorielles arbitraires, on peut supposer que $\mathcal{L}$ est très ample. Il correspond donc à un plongement $X \to \mathbb{P}_k^r$.

Considérons une section hyperplane $Y = X \cap H$ de X. Comme expliqué plus haut, on peut toujours supposer que l'hyperplan H est transverse à X. Autrement dit, H correspondant à une section σ de $\mathcal{L}/X$, σ est transverse à la section nulle s_0 de $\mathcal{L}/X$. Le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\sigma"] \\ X \arrow[r, "s_0"] & \mathbb{V}(\mathcal{L}) \end{tikzcd}$$

donne la formule $i_*i^*(1) = \sigma^* s_{0*}(1)$. Le membre de gauche est égal à $\eta_X(Y)$ alors que le membre de droite est égal à $s_0^* s_{0*}(1) = c_1(\mathcal{L}) = \xi$ (par invariance par homotopie de la cohomologie). Ainsi, le morphisme L_X^m n'est rien d'autre que la multiplication par une puissance de la classe fondamentale d'une section hyperplane lisse – c'est sous cette forme qu'on énonce généralement le théorème de Lefschetz difficile.

Notons par extension, L_X^n (resp. L_Y^n) l'endomorphisme de $H^*(X)$ (resp. $H^*(Y)$) donné par la multiplication par ξ^n (resp. $\xi|_Y^n$). Avec ces notations, on peut maintenant considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{d-n}(X)(-n) \arrow[r, "L_X^{n-1}"] \arrow[d, "i^*"'] & H^{d+n-2}(X)(-1) \arrow[r, "L_X"] \arrow[d, "i^*"] & H^{d+n}(X) \\ H^{d-n}(Y)(-n) \arrow[r, "L_Y^{n-1}"] & H^{d+n-2}(Y)(-1). \arrow[ur, "i_*"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, $i_*i^*(x) = i_*(1.i^*(x)) = i_*(1).x = L_X(x)$ d'après la formule de projection.

Or pour $n \geq 2$, d'après le théorème de Lefschetz faible, $i^* : H^{d-n}(X) \to H^{d-n}(Y)$ (cf (2)) et $i_* : H^{d+n-2}(Y)(-1) \to H^{d+n}(X)$ (cf (1)) sont des isomorphismes.

Ainsi, en raisonnant par récurrence sur d, on est ramené au cas $m = 1$ de la conjecture.

Rappelons qu'il existe sur $H^*(X)$ un crochet de dualité de Poincaré :

$$H^r(X) \otimes H^{2d-r}(X) \to K(-d) \simeq K, (a,b) \mapsto < a, b >_X = p_*(a.b)$$

où $p : X \to \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme structural. Cet accouplement est parfait. Dès lors, montrer que L_X est un isomorphisme revient à montrer que l'accouplement

$$H^{d-1}(X) \otimes H^{d-1}(X) \to K, (a,b) \mapsto < \xi.a, b >_X$$

est parfait.

Rappelons que d'après le théorème de Lefschetz faible, $i^* : H^{d-1}(X) \to H^{d-1}(Y)$ est un monomorphisme. Or $< \xi.a, b >_X = < i_*i^*(a), b >_X = < i^*a, i^*b >_Y$. Dès lors, le théorème est équivalent à montrer que :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{La restriction du crochet de dualité } < .,. >_Y \\ \qquad\qquad \text{à l'image de } i^* \text{ en degré } d-1 \text{ est non dégénéré.} \end{array} \right.$$

Le point clé pour terminer la démonstration est d'interpréter l'image de $H^{d-1}(X)$ comme les cycles invariants sous l'action de la monodromie induite par un pinceau de Lefschetz de X.

Rappelons qu'un pinceau de Lefschetz est une famille (*i.e.* un $\mathbb{P}^1_k$-schéma) $(Y_t)_{t \in \mathbb{P}^1_k}$ de sections hyperplanes de X telle que :

(i) Il existe un fermé $S \subset \mathbb{P}^1_k$ tel que pour tout point $t \in \mathbb{P}^1_k - S$, Y_t soit lisse (de codimension 1).

(ii) Pour tout point $t \in S$, Y_t n'a pas plus d'un point singulier qui est une singularité quadratique ordinaire.

On définit l'axe du pinceau par la formule $\Delta = Y_0 \cap Y_\infty$. Soit $\tilde{X}$ l'éclatement de X en Δ. Par définition de l'éclatement, $\tilde{X}$ est un sous-schéma de $X \times \mathbb{P}^1_k$, et l'on obtient donc un morphisme projectif canonique $\bar{f} : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1_k$.

On fixe un point $t_0 \in \mathbb{P}^1_k$ qui n'appartienne pas à $S \cup \{0, \infty\}$, et l'on pose $Y = Y_{t_0}$. Comme c'est une section hyperplane lisse, on est libre de considérer que c'est le Y qui apparait dans l'assertion (3). On obtient ainsi la situation géométrique suivante :

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[d, "i"] \\ \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \\ \mathbb{P}^1_k & \end{tikzcd}$$

On a ainsi remplacé X par le schéma $\tilde{X}$ "fibré" sur $\mathbb{P}^1_k$.

Soit f le pullback de $\bar{f}$ au-dessus de l'ouvert $U = \mathbb{P}^1_k - S$. Le morphisme f est projectif lisse. Dès lors, le faisceau $\mathrm{R}^{d-1}f_*(K)$ sur U est non seulement constructible mais même localement constant (tordu) (cf SGA4). Autrement dit, notant $\pi = \pi_1(U, t_0)$ le groupe fondamental de U, $\mathrm{R}^{d-1}f_*(K)$ correspond à une représentation de π dans $H^{d-1}(Y)$ – qui n'est rien d'autre que la fibre de $\mathrm{R}^{d-1}f_*(K)$ en t_0.

D'après l'hypothèse de récurence (et la formule de Picard-Lefschetz rappelée ci-dessous), la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^1_k, \mathrm{R}^q \bar{f}_* K) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X})$$

dégénère (cf SGA7, XVIII (5.6.8) et (5.6.10)). Notons que la fibre générique de $\mathrm{R}^{d-1}f_*K$ s'identifie a la fibre en t_0, soit $H^{d-1}(Y)$. On déduit de la dégénérescence ci-dessus :

$$H^{d-1}(Y)^{\pi} = \iota^* H^{d-1}(\tilde{X}).$$

D'après la formule de l'éclatement, le membre de droite s'identifie encore canoniquement à $i^* H^{d-1}(X)$.

Rappelons la formule de Picard-Lefschetz (valable sous l'hypothèse de récurrence) :

Theorem 3.5. *Pour tout $s \in S$, il existe un cycle $\delta_s \in H^{d-1}(Y)$ tel que, si $\sigma_s \in \pi$ est un lacet qui tourne (une fois) autour de s, pour tout $x \in H^{d-1}(Y)$,*

$$\sigma_s.x = x \pm < x, \delta_s >_Y .\delta_s$$

On appelle δ_s le *cycle evanescent* autour de s. Le sous-espace E de $H^{d-1}(Y)$ engendré par les δ_s est l'espace des cycles évanescents. L'action de δ_s est la *monodromie* en s.

On obtient donc finalement l'interprétation de $i^* H^{d-1}(X)$ en termes de la monodromie :

$$i^* H^{d-1}(X) = H^{d-1}(Y)^{\pi} = E^{\perp},$$

soit "l'espace des cycles invariants" sous la monodromie suivant la terminologie de Lefschetz.

L'assertion (3) est donc équivalente à $E \cap E^{\perp} = 0$ ou encore :

"l'espace des cycles invariants ne rencontre pas l'espace des cycles évanescents" (suivant toujours Lefschetz).

Pour terminer, on a besoin d'un corollaire de la conjecture de Weil prouvée par Deligne (cf [Del80, 3.4.13]) :

Theorem 3.6. *Soit S un schéma normal de type fini sur $\bar{k}$, $f : X \to S$ un morphisme propre et lisse. Alors, les faisceaux $\mathrm{R}^i f_* K$ sont semi-simples.*

On traduit ce corollaire par le fait que l'action de π sur $H^{d-1}(Y)$ est semi-simple.

Pour conclure, il nous suffit du petit lemme suivant d'algèbre linéaire :

Lemma 3.7. *Soit V une représentation linéaire semi-simple d'un groupe π et Φ une forme bilinéaire non dégénérée sur V invariante par π.*

Alors, la restriction de Φ à V^{π} est non dégénérée.

Démonstration. En effet, par semi-simplicité, $V = V^{\pi} \oplus W$ où W est une représentation ne contenant par de quotient de la représentation triviale. Ceci implique que $\Phi(V^{\pi}, W) = 0$. Ainsi, $\Phi = \Phi|_{V^{\pi}} \oplus \Phi|_W$, ce qui implique le résultat. □

Thème.— Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif lisse de schémas sur k, et $\mathcal{L}$ fibré relativement ample de X/S.

La première classe de Chern de $\mathcal{L}$ correspond à un morphisme $\xi : K_X \to K_X(1)[2]$ dans la catégorie dérivée des faisceaux l-adiques, d'où pour tout entier $n \geq 0$, un morphisme $\xi^n : K_X \to K_X(n)[2n]$ qui induit à son tour un morphisme

$$L^n_{X/S} : \mathrm{R}^{d-n} f_* K_X \to \mathrm{R}^{d+n} f_* K_X(r).$$

Le théorème de Lefschetz difficile implique que ce morphisme est un isomorphisme (il suffit de le vérifier sur les fibres).

Dès lors, d'après [Del68] la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathrm{R}^q f_* K_X) \Rightarrow H^{p+q}(X)$$

dégénère. On obtient même une décomposition :

$$\mathrm{R} f_*(K_X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{R}^i f_*(K_X).$$

Références

[CD07] D.-C. Cisinski and F. Déglise. Mixed weil cohomologies. preprint, 2007.

[Del68] P. Deligne. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (35) :259–278, 1968.

[Del71a] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. I. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, pages 425–430. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[Del71b] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (40) :5–57, 1971.

[Del74] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (44) :5–77, 1974.

[Del80] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (52) :137–252, 1980.