Thèse d'habilitation à diriger des recherches

Frédéric Déglise

Mémoire de synthèse

Juin 2010

Table des matières

Introduction

J'ai consacré mon travail de recherche depuis ma thèse à la théorie des motifs de Voevodsky, tel qu'elle est insérée maintenant dans la théorie homotopique des schémas imaginée par Voevodsky et réalisée en collaboration avec Morel.

Il y a dans cette recherche deux grands thèmes qui se confrontent et s'enrichissent : la théorie des cycles algébriques et de leur intersection ; la théorie des cohomologies. Grothendieck a imaginé que ces deux concepts se rencontrent en géométrie algébrique dans une théorie commune, celle des motifs purs, incarnation des cycles algébriques en une théorie cohomologique universelle, ou mieux, première. Bien que la définition de cette théorie ait été parfaitement formulée par Grothendieck, son étude s'est trouvée arrêtée pratiquement dès le commencement par la formulation de conjectures dites *standard* qui sont restées — et semblent vouloir perdurer dans cet état à l'heure actuelle — inabordables.

La théorie des motifs a pourtant connu un renouveau il y a une vingtaine d'années qui s'est incarné sous forme d'un programme dans l'article fondamental de Beĭlinson [**Beĭ87**]. La théorie des motifs de Voevodsky a pour ambition originale de réaliser le programme de Beĭlinson.

Les motifs de Voevodsky sont mixtes : ce sont des extensions de motifs purs ; en tant que tels, ils forment une catégorie triangulée contenant la catégorie des motifs purs. Comme l'a remarqué Voevodsky dès le départ, leur nature triangulée les rends plus proches des théories cohomologiques. En topologie algébrique, on a pris l'habitude de voir les théories cohomologiques comme des objets d'une catégorie triangulée appelée la catégorie homotopique stable. La théorie de Morel et Voevodsky construit une telle catégorie en géométrie algébrique, de telle manière que la catégorie des motifs mixtes se réalise dans la catégorie homotopique stable.

Un nouveau champs d'investigation s'ouvre dès lors du fait que l'on peut espérer réaliser les constructions de la topologie algébrique dans la théorie de Morel et Voevodsky.

Dans ce mémoire, j'ai cherché à rendre compte de mon travail dans cette direction. J'ai groupé les travaux présentés en quatre parties, qui s'organisent par thèmes et révèlent l'évolution de ma recherche.

La première partie montre comment la théorie des cycles algébriques, et plus précisément celle des correspondances algébriques, se retrouve dans la théorie de l'orientation transportée en géométrie algébrique. Le concept clé est celui des transferts, que j'appelle dans le cadre motivique les *morphismes de Gysin*. Ces morphismes de Gysin existent à la fois dans la théorie des motifs géométriques de Voevodsky sur un corps (section 1), et aussi dans le cadre de la théorie homotopique stable (sections 2 et 3). On rencontre dans cette théorie à la fois la théorie de l'intersection avec certaines formules de projection faisant intervenir des multiplicités d'intersection (voir 2.3.6), mais aussi des phénomènes plus habituels en topologie algébrique tels que l'existence de classes de cobordisme (voir 2.4.4).

La deuxième partie a pour thème la filtration par coniveau et la résolution de Gersten. J'y introduit la catégorie des complexes motiviques stables $DM(k)$ que j'ai construite en collaboration avec D.C. Cisinski. Cette catégorie triangulée est naturellement munie d'une t-structure dite « homotopique » dont le coeur $HI_*(k)$ est formé de certains faisceaux qui admettent une résolution de Gersten. Suivant le théorème fondamental de ma thèse, j'en déduit une équivalence de catégorie entre $HI_*(k)$ et la catégorie des modules de cycles de Rost. L'intérêt de cette t-structure homotopique est double. D'une part elle s'étend au cas de la catégorie homotopique stable $SH(k)$: j'en déduit une conjecture de Morel qui permet d'identifier la catégorie $HI_*(k)$ avec les objets du coeur homotopique de $SH(k)$ qui sont orientables (section 5). D'autre part, je montre que la suite spectrale associée à la filtration par coniveau sur la cohomologie d'un objet M de $DM(k)$ s'identifie canoniquement à la suite spectrale associée à la tour des troncations de M pour la t-structure homotopique (section 6).

Dans la troisième partie, je décris un travail en commun avec D.C. Cisinski dont le but premier était de montrer que les cohomologies de Weil de la géométrie algébrique sont représentables par un objets de la catégorie homotopique stable. On introduit pour cela la notion de théorie (cohomologique) de Weil mixte. Les axiomes d'une telle théorie sont particulièrement simples, et très proches des axiomes d'Eilenberg-Steenrod en topologie. L'intérêt de notre approche pour la géométrie est qu'on peut dériver de nos axiomes des conséquences importantes : les propriétés fondamentales des cohomologies de Weil (dualité, finitude), ainsi qu'une version dérivée de la classe de cycles habituelle : une réalisation triangulée monoïdale des motifs mixtes (voir section 9).

Dans la quatrième et dernière partie, j'expose un autre travail en commun avec D.C. Cisinski qui vise à étendre la théorie de Voevodsky sur une base arbitraire, complétant ainsi la construction demandée dans le programme de Beĭlinson. À coefficients entiers, on expose l'extension de cette théorie dans les sections 10 et 11. Lorsque l'on travaille relativement à une base, il est déterminant de disposer du formalisme des six foncteurs de Grothendieck. On présente une axiomatisation de ce formalisme dans la section 12. La section 13 est consacrée au cas des coefficients rationnels, dans lequel on arrive à une théorie complète à l'aide de la théorie homotopique stable.

Conventions et notations

Sans précision, l'adjectif lisse signifie lisse de type fini. Les schémas de ce mémoire sont toujours supposés noethériens.

Les catégories et foncteurs monoïdaux que l'on considère dans ce mémoire sont toujours supposés monoïdaux symétriques. De même, les monoïdes dans une telle catégorie monoïdale sont supposés commutatifs.

Par convention, les adjonctions de catégories (F, G) où F est l'adjoint à gauche sont notées :

$$F : \mathscr{C} \leftrightarrows \mathscr{D} : G.$$

Les pro-objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ sont notés de manière suggestive : $"\varprojlim_{i \in \mathcal{I}}" X_i$.

Remerciements

Je remercie en premier lieu F. Morel pour m'avoir fait partagé ses idées et m'avoir lancé dans la recherche. Je remercie surtout D.-C. Cisinski pour avoir partagé cette recherche et m'avoir fait grandement avancé tout au long de notre fructueuse collaboration. Je n'oublie pas J. Wildeshaus pour son aide, son soutient, indéfectibles et précieux pendant ces années passées sur la théorie motivique.

Merci à Y. André et M. Levine d'avoir accepté d'être rapporteur et de s'être intéressé de si prêt à mon travail. Merci enfin à J.-B. Bost, G. Powell, M. Kapranov, S. Lichtenbaum et C. Soulé d'avoir pris part à mon jury.

Première PARTIE
AUTOUR DU TRIANGLE DE GYSIN

1. Motifs géométriques

Dans cette section, on fixe un corps de base k supposé parfait. Sauf mention explicite du contraire, les k-schémas sont supposés séparés de type fini.

1.1. Motifs géométriques effectifs. —

1.1.1. — Dans son article fondamental [**FSV00**, chap. 5], Voevodsky introduit la catégorie triangulée des motifs mixtes géométriques sur k. La définition est très proche de celle des motifs purs de Grothendieck.

On utilise pour cela la catégorie des correspondances finies Sm_k^{cor} : ses objets sont donnés par les schémas lisses X, notés $[X]$; les morphismes de X dans Y sont formés des cycles algébriques de $X \times_k Y$ dont le support est fini équidimensionnel sur X. [(1)] On les appelle simplement des *correspondances finies* et on note le groupe correspondant $c(X, Y)$. C'est un résultat de base que ces correspondances se composent par la formule usuelle. Tout morphisme de schémas $f : X \to Y$ définit un élément de $c(X, Y)$: on considère le cycle associé à son graphe. On en déduit un foncteur $\gamma : Sm_k \to Sm_k^{cor}$. La catégorie Sm_k^{cor} est monoïdale symétrique. [(2)]

La catégorie Sm_k^{cor} étant additive, on peut considérer la catégorie $K^b(Sm_k^{cor})$ des complexes bornés modulo équivalence d'homotopie. On note $\mathcal{V}$ la plus petite sous-catégorie épaisse de Sm_k^{cor} contenant les complexes suivants :

1. *(Homotopie)* Pour tout schéma lisse X, si $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ désigne la projection canonique,
$$\ldots 0 \to [\mathbb{A}^1_X] \xrightarrow{\gamma(p)} [X] \to 0 \ldots$$
2. *(Mayer-Vietoris)* Pour tout schéma lisse X et tout recouvrement ouvert $X = U \cup V$,
$$\ldots 0 \to [U \cap V] \xrightarrow{l_U - l_V} [U] \oplus [V] \xrightarrow{(j_U, j_V)} [X] \to 0 \ldots$$
où $j_?$ et $l_?$ désignent les graphes des immersions ouvertes évidentes.

La catégorie des motifs géométriques effectifs DM_{gm}^{eff} est l'enveloppe pseudo-abélienne du quotient de Verdier $K^b(Sm_k^{cor})/\mathcal{V}$.

Cette catégorie est triangulée monoïdale. [(3)] Tout schéma lisse X définit un objet $M(X)$ de $DM_{gm}^{eff}(k)$ – le complexe évident concentré en degré 0. On l'appelle le *motif de* X. [(4)] Notons que l'objet unité de la structure monoïdale est donné par : $\mathbb{1} = M(\mathrm{Spec}(k))$.

La projection $p : \mathbb{P}^1_k \to \mathrm{Spec}(k)$ induit un épimorphisme scindé $M(\mathbb{P}^1_k) \to \mathbb{1}$. Si on note K son noyau, on peut définir le motif de Tate : $\mathbb{1}(1) := K[-2]$; pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbb{1}(n)$ sa puissance tensorielle n-ème.

Au premier abord, les morphismes de la catégorie $DM_{gm}^{eff}(k)$ semblent difficiles à calculer. On dispose pourtant du calcul remarquable suivant dû à Voevodsky : pour tout entier $n \geq 0$ et tout schéma lisse X,

$$H_{\mathcal{M}}^{2n,n}(X) := \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M(X), \mathbb{1}(n)[2n]) \simeq CH^n(X) \qquad (1.1.1.a)$$

où $CH^n(X)$ désigne le groupe des cycles n-codimensionnels de X modulo équivalence rationnelle. On peut vérifier de plus que cet isomorphisme est naturel (pour la fonctorialité contravariante) et compatible au produit [(5)].

---

1. Dans notre cas, cela revient à demander que $Z^{(0)}$ soit envoyé dans $X^{(0)}$.
2. Le produit tensoriel est défini par le produit cartésien sur les schémas et par le produit extérieur sur les correspondances finies.
3. Le produit tensoriel se dérive trivialement du produit tensoriel de Sm_k^{cor}.
4. Contrairement aux motifs purs introduits par Grothendieck, les motifs de Voevodsky sont covariants : il faut y penser comme des objets d'homologie.
5. Voir [**1**, (1.5.a)] pour plus de détails.

Indiquons pour terminer que, suivant [**FSV00**, chap. 5, 3.5.1], on peut déduire de l'isomorphisme précédent le calcul du motif d'un fibré projectif P de rang n sur un schéma lisse X :

(1.1.1.b) $$M(P) \simeq \oplus_{i=0}^{n} M(X)(i)[2i].$$

On renvoie le lecteur à [**1**, 1.6] pour la définition précise de cet isomorphisme. Considérant l'inclusion évidente, on en déduit un monomorphisme scindé canonique :

(1.1.1.c) $$\mathfrak{l}_n(P) : M(X)(n)[2n] \to \oplus_{i=0}^{n} M(X)(i)[2i] \to M(P).$$

1.2. Paires fermées, triangle de localisation. —

1.2.1. — On appelle paire fermée (X, Z) tout couple de schémas tel que X est lisse et Z est un sous-schéma fermé de X. Considérant l'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$, on associe à (X, Z) le motif $M_Z(X)$, représenté dans $DM_{gm}^{eff}(k)$ par le complexe $[U] \to [X]$ où $[X]$ est placé en degré 0. Ce motif satisfait les propriétés de fonctorialité suivantes :

1. Pour toute paire fermée (X, Z) et tout morphisme $f : Y \to X$, on obtient un morphisme canonique : $f_* : M_{f^{-1}(T)}(Y) \to M_Z(X)$.
2. Considérons une immersion fermée $Z \xrightarrow{\nu} T$ de sous-schémas fermés d'un schéma lisse X. On lui associe un morphisme : $\nu^! : M_T(X) \to M_Z(X)$. (6)

Dans la situation du deuxième point, si ν est une nil-immersion, $\nu^!$ est un isomorphisme (et même une identité). On peut combiner ces deux types de fonctorialité comme suit :

Définition 1.2.2. — Un carré commutatif de schémas

(1.2.2.a) $$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est dit *topologiquement cartésien* si le morphisme induit $T \to Z \times_X Y$ est une nil-immersion.

Un *morphisme de paires fermées* $(Y, T) \to (X, Z)$ est un couple de morphismes (f, g) s'insérant dans un carré topologiquement cartésien comme ci-dessus. On dit que (f, g) est *cartésien* si le carré précédent est cartésien dans la catégorie des schémas. On dit enfin que (f, g) est *excisif* si f est étale et g est un isomorphisme.

On vérifie facilement que le motif $M_Z(X)$ est naturel par rapport aux morphismes de paires fermées. A toute immersion fermée $i : Z \to X$, on associe suivant ces définitions un *triangle de localisation* :

(1.2.2.b) $$M(U) \xrightarrow{j_*} M(X) \xrightarrow{i^!} M_Z(X) \to M(X - Z)[1]$$

qui est naturel par rapport aux morphismes de la paire fermée (X, Z).

1.2.3. — Notons que si il existe un ouvert V de X tel que $Z \subset V$, alors le morphisme induit $M_Z(V) \to M_Z(X)$ est un isomorphisme (d'après le choix de $\mathcal{V}$ dans le paragraphe 1.1.1). La propriété suivante est un résultat fondamental de la théorie de Voevodsky :

(Excision) Pour tout morphisme excisif $(f, g) : (Y, T) \to (X, Z)$ de paires fermées, le morphisme induit $f_* : M_T(Y) \to M_Z(X)$ est un isomorphisme.

6. C'est l'analogue du morphisme d'oubli (du support) en cohomologie à support.

1.3. Pureté et triangle de Gysin. —

1.3.1. — On dira qu'une paire fermée (X, Z) est lisse (resp. de codimension n) si Z est lisse (resp. de codimension pure n dans X). En exploitant la propriété *(Excision)* du paragraphe précédent, l'isomorphisme (1.1.1.a), et une méthode due à Morel et Voevodsky, j'ai obtenu le résultat suivant, auquel se rattache naturellement la définition qui le suit :

Proposition 1.3.2 **(**[**1**, 1.12]**).** — *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique famille d'isomorphismes :*

$$\mathfrak{p}_{X,Z} : M_Z(X) \to M(Z)(n)[2n] \tag{1.3.2.a}$$

indexée par les paires fermées lisses de codimension n telle que :

1. *$\mathfrak{p}_{X,Z}$ est naturel par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées lisses de codimension n.*
2. *Considérons la complétion projective P d'un fibré vectoriel E de rang n sur X. Soit $s : X \to P$ la section canonique et (P, X) la paire fermée correspondante. Alors, avec les notations de* (1.1.1.c)*, l'isomorphisme $\mathfrak{p}_{P,X}$ a pour inverse le composé suivant :*

$$M(X)(n)[2n] \xrightarrow{\mathfrak{l}_n(P)} M(P) \xrightarrow{s^!} M_X(P).$$

Définition 1.3.3 **(**[**1**, 1.14]**).** — Soit (X, Z) une paire fermée lisse de codimension n, i (resp. j) l'immersion fermée (resp. ouverte) correspondante.

Le morphisme $\mathfrak{p}_{X,Z}$ de la proposition précédente est appelé *l'isomorphisme de pureté* associé à (X, Z).

En utilisant cet isomorphisme, on déduit du triangle distingué (1.2.2.b) le *triangle de Gysin* :

$$M(X - Z) \xrightarrow{j_*} M(X) \xrightarrow{i^*} M(Z)(n)[2n] \xrightarrow{\partial_i} M(X - Z)[1]. \tag{1.3.3.a}$$

Le morphisme i^* (resp. $\partial_{X,Z}$) est appelé le *morphisme de Gysin* (resp. le *résidu*) associé à i.

Le triangle de Gysin avait déjà été obtenu par Voevodsky (*cf.* [**FSV00**, chap. 5, 3.5.4]). Toutefois, la proposition précédente donne des informations supplémentaires sur ce triangle. J'ai ainsi exploité la description de l'isomorphisme de pureté dans ma thèse pour étudier la fonctorialité du triangle de Gysin, ou plus précisément son défaut de fonctorialité dans un cas non transverse. Ces formules sont résumées dans [**1**, 1.19] (voir aussi le théorème 2.3.6 plus bas).

La question centrale que j'ai abordée dans [**1**] est de comprendre comment les triangles de Gysin de deux immersions fermées composables se comportent l'un envers l'autre. Cette question est directement liée à une formule d'associativité $i^*k^* = (ki)^*$ à laquelle on peut s'attendre évidemment. Malgré son évidence apparente, cette dernière formule se révèle être un point central de la théorie. [7]

Theorem 1.3.4 **(**[**1**, 1.34]**).** — *Considérons un carré topologiquement cartésien de schémas lisses*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & Y' \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

tel que i,j,k,l sont des immersions fermées respectivement de codimension pure n, m, s, t.

On pose $d = n + t = m + s$ et on considère les immersions fermées suivantes, respectivement induites par i et j :

$$i' : (Y - Z) \to (X - Y'), \;\; j' : (Y' - Z) \to (X - Y).$$

7. Ce genre de questions s'avère aussi centrale dans d'autres contextes, tels que la définition du pullback en théorie de Chow suivant [**Ful98**]. Mais en fait, ce dernier problème est directement lié à celui que l'on traite ici (voir le diagramme commutatif (1.4.6.b)).

Alors, le diagramme suivant de $DM_{gm}^{eff}(k)$ est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M(X) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "i^*"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & M(Y')((m)) \arrow[r, "\partial_j"] \arrow[d, "k^*"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & M(X-Y')[1] \arrow[d, "(i')^*"] \\
M(Y)((n)) \arrow[r, "l^*"'] & M(Z)((d)) \arrow[r, "\partial_l"] \arrow[d, "\partial_k"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & M(Y-Z)((n))[1] \arrow[d, "\partial_{i'}"] \\
& M(Y'-Z)((m))[1] \arrow[r, "-\partial_{j'}"'] & M(X-Y\cup Y')[2],
\end{tikzcd}$$

où l'on a posé pour tout motif $\mathcal{M}$ et tout entier $n \geq 0$, $\mathcal{M}((n)) = \mathcal{M}(n)[2n]$. [8]

Remarque 1.3.5. — Notons que la commutativité du carré (1) exprime simplement (en prenant $Y' = Z$) la formule d'associativité du morphisme de Gysin évoquée précédemment. La formule (2) sera utilisée de manière cruciale dans la preuve de la proposition 1.4.5. La formule (3) illustre la parenté du morphisme résidu avec la théorie classique des résidus des formes différentielles.

1.4. Motifs géométriques non effectifs, transferts et dualité. —

1.4.1. — Comme pour les motifs purs, on définit la catégorie des motifs géométriques non effectifs $DM_{gm}(k)$ en ajoutant formellement un $\otimes$-inverse au motif de Tate $\mathbb{1}(1)$.

On peut alors procéder à la définition du morphisme de Gysin d'un morphisme projectif $f : Y \to X$ entre schémas lisses : on considère une X-immersion i de Y dans un fibré projectif $p : P \to X$. Soit c la codimension de i et n le rang de P/X. Alors, utilisant à nouveau le morphisme (1.1.1.c), le morphisme composé

(1.4.1.a) $$M(X)(n)[2n] \xrightarrow{\mathfrak{l}_n(P)} M(P) \xrightarrow{i^*} M(Y)(c)[2c]$$

ne dépend pas du choix de la factorisation. [9]

Définition 1.4.2 **([1, 2.7]).** — Sous les hypothèses qui précèdent, si d désigne la dimension relative de f (supposée constante pour simplifier), le morphisme

$$f^* : M(X) \to M(Y)(-d)[-2d]$$

obtenu en tensorisant la composée (1.4.1.a) avec $\mathbb{1}(-n)[-2n]$ est appelé le *morphisme de Gysin* associé à f.

1.4.3. — Le morphisme de Gysin est souvent considéré comme un *transfert*. Dans la théorie de Voevodsky, les transferts sont induits par les correspondances finies. Pour un morphisme fini équidimensionnel $f : Y \to X$ entre schémas lisses, le graphe Γ de f est un sous-schéma fermé de $Y \times_k X \simeq X \times_k Y$ et sa projection sur X est finie équidimensionnelle. On en déduit donc une correspondance finie ${}^t f \in c(X, Y)$ qui induit un *transfert entre motifs géométriques* :

$$({}^t f)_* : M(X) \to M(Y).$$

La question naturelle est de comparer ce morphisme avec le morphisme de Gysin de f. J'ai ainsi obtenu le résultat suivant :

Theorem 1.4.4 **([3, 7.1]).** — *Sous les hypothèses qui précèdent, $({}^t f)_* = f^*$.*

---

8. Cette notation, introduite dans [**1**], vise principalement à réduire la taille des diagrammes. Elle est aussi justifiée par le fait que le twist $?(n)[2n]$ apparaît fréquemment dans la théorie du triangle de Gysin.

9. Cela résulte de la propriété de normalisation suivante : dans le cas où $X = Y$, $f = Id_X$, la composée précédente est l'identité (*cf.* [**1**, 2.2]). Si de plus P est de la forme $P = \mathbb{P}(E \oplus 1)$, et i est la section évidente de P/X, on reconnait déjà cette propriété dans la condition 2 de la proposition 1.3.2.

J'ai pu aussi vérifier les propriétés standards du morphisme de Gysin : associativité ([**1**, 2.9]), formule de projection dans le cas transverse ([**1**, 2.10]), formule d'excès d'intersection ([**1**, 2.12]). On peut s'attendre à ces propriétés du fait de l'analogie entre notre morphisme de Gysin et le pullback en théorie de Chow (voir paragraphe 1.4.6 pour plus de précision). La formule suivante, qui était la motivation originale de [**1**], est par contre propre aux motifs mixtes :

Proposition 1.4.5 ([**1**, 2.13]). — *Considérons un carré topologiquement cartésien de schémas lisses*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{j} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

tel que f (resp. g) est projectif de codimension relative p (resp. q) et i (resp. j) est une immersion fermée de codimension n (resp. m). On note h le morphisme induit par f sur les ouverts complémentaires.
Alors, le diagramme suivant, dont les lignes sont formées des triangles de Gysin évidents, est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} M(X-Z) & \longrightarrow & M(X) & \xrightarrow{i^*} & M(Z)((n)) & \xrightarrow{\partial_{X,Z}} & M(U)[1] \\ {\scriptstyle h^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle h^*} \\ M(Y-T)((p)) & \longrightarrow & M(Y)((p)) & \xrightarrow{j^*} & M(T)((m+p)) & \xrightarrow{\partial_{Y,T}} & M(V)((p))[1]. \end{array}$$

1.4.6. — Une application intéressante du morphisme de Gysin et de ses propriétés est le résultat de dualité suivant : pour tout schéma X projectif lisse connexe de dimension d, de morphisme structural (resp. diagonal) p (resp. δ), le motif $M(X)$ est fortement dualisable, avec pour dual fort $M(X)(-d)[-2d]$ et pour accouplements de dualité :

$$\text{(1.4.6.a)} \qquad \begin{cases} \eta : \mathbb{Z} \xrightarrow{p^*} M(X)(-d)[-2d] \xrightarrow{\delta_*} M(X)(-d)[-2d] \otimes M(X) \\ \mu : M(X) \otimes M(X)(-d)[-2d] \xrightarrow{\delta^*} M(X) \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Rappelons que le théorème de simplification de Voevodsky montre que le foncteur canonique :

$$DM_{gm}^{eff}(k) \to DM_{gm}(k)$$

est pleinement fidèle. Utilisant ce théorème ainsi que l'accouplement de dualité précédent, on obtient une nouvelle preuve du résultat suivant de Voevodsky ([**FSV00**, chap. 5, 2.1.4]) : pour tout schéma lisse Y,

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(Y), M(X)) = CH^d(X \times_k Y),$$

ce qui revient à dire que les motifs de Chow sur k se plongent (de manière contravariante) dans $DM_{gm}(k)$. (10)

On peut définir l'homologie motivique de X comme le groupe abélien bigradué :

$$H_{n,i}^{\mathcal{M}}(X) = \mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(\mathbb{1}(i)[n], M(X)).$$

Compte tenu de l'isomorphisme (1.1.1.a), du théorème de simplification de Voevodsky et de l'accouplement de dualité précédent, on obtient un isomorphisme canonique (11) :

$$CH^n(X) \xrightarrow{\mathcal{P}_X} H^{\mathcal{M}}_{2(d-n),d-n}(X).$$

10. La preuve de ce résultat dans *loc. cit.* utilise fondamentalement la théorie de Friedlander et Lawson (une version du « lemme de déplacement »). Notre méthode donne une preuve alternative qui n'utilise pas cette théorie.
11. On prendra garde au fait que cet isomorphisme ne correspond pas à un accouplement parfait car la cohomologie motivique ne satisfait pas la formule de Künneth en général.

On peut vérifier facilement maintenant grâce aux définition précédentes que pour tout morphisme $f : Y \to X$ de schémas projectifs lisses, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} CH^n(X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\mathcal{P}_X"'] & CH^n(Y) \arrow[d, "\mathcal{P}_Y"] \\ H^{\mathcal{M}}_{2(d-n),d-n}(X) \arrow[r, "f^*"] & H^{\mathcal{M}}_{2(d_Y-n),d_Y-n}(Y) \end{tikzcd} \tag{1.4.6.b}$$

où le morphisme vertical supérieur est le pullback usuel en théorie de Chow et le morphisme vertical inférieur est induit par notre morphisme de Gysin.

2. Catégories triangulées homotopiques orientables

2.1. Axiomatisation des motifs mixtes. —

2.1.1. — Dans [**2**], j'ai axiomatisé les propriétés des motifs géométriques utilisées dans la théorie du triangle de Gysin dans le but de généraliser les résultats décrits précédemment. Cette généralisation va dans deux directions : considérer un schéma de base S au lieu d'un corps ; considérer des théories cohomologiques plus générales, telles que la K-théorie algébrique ou le cobordisme algébrique.

Ce type d'axiomatisation avait déjà été considéré par différents auteurs. Notre point de vue est original pour deux raisons principales :

- Plutôt que de travailler avec une théorie cohomologique, on considère une catégorie triangulée monoïdale symétrique $\mathscr{T}$ – ses objets doivent être considérés comme des « motifs généralisés ». L'objet unité de $\mathscr{T}$ est noté $\mathbb{1}$.
- On ne considère pas seulement des motifs à supports dans un fermé : à tout carré cartésien de S-schémas lisses

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

  formé d'immersions, on suppose associé un objet de $\mathscr{T}$, noté $M(\Delta)$ ou encore $M\left(\frac{X/U}{V/W}\right)$ lorsque le carré est évident. On demande que M soit un foncteur : pour deux carrés cartésiens Δ, Δ', ainsi qu'un cube commutatif $\Delta \to \Delta'$, on dispose d'une flèche $M(\Delta) \to M(\Delta')$.

Concernant le deuxième point, la motivation vient de la preuve du théorème 1.3.4 dans laquelle ces objets apparaissent de manière centrale. Notons qu'on obtient comme cas particulier le motif $M(X)$ d'un schéma lisse. Intuitivement, $M\left(\frac{X/U}{V/W}\right)$ est la *colimite homotopique* du carré obtenu en appliquant M au carré Δ.

Concernant les propriétés qu'on suppose vérifiées par $\mathscr{T}$ et M, on renvoie le lecteur à [**2**, 2.1]. En un mot, ces propriétés sont les généralisations naturelles des propriétés que l'on vient de voir concernant les motifs géométriques non effectifs. Ainsi, on peut reprendre définitions de la section 1.2, en remplaçant k par S. Le motif relatif d'une paire fermée (X, Z) relativement à S correspond alors à l'objet :

$$M_Z(X) := M\left(\frac{X/X - Z}{\varnothing/\varnothing}\right).$$

La fonctorialité décrite en 1.2.1 se généralise aisément au cas général en utilisant la fonctorialité de M. Notons que l'existence d'un triangle du type (1.2.2.b) fait partie des axiomes.

Exemple 2.1.2. — Le premier exemple est donné par la catégorie $DM_{gm}(S)$ des motifs géométriques (stables) sur un schéma régulier S considéré dans [**2**, par. 2.3.1]. On verra aussi l'exemple de la catégorie des complexes motiviques stables $DM(S)$ sur un schéma noethérien arbitraire (par. 11.2.4 de ce mémoire).

Un autre exemple qu'il faut avoir en tête est donné par la catégorie des modules sur le spectre en anneaux $\mathbf{MGL}_S$. Cet exemple central sera développé dans la section 3 ce qui nous permettra de traduire les résultats de [**2**] en termes de théories cohomologiques.

2.2. Orientation et classes de Chern. —

2.2.1. — Les axiomes évoqués dans la section précédente sont inspirés à la fois par la théorie des motifs et par la catégorie des spectres en topologie algébrique. Ainsi, tout objet $\mathbb{E}$ de $\mathscr{T}$ définit respectivement des groupes de cohomologie et d'homologie indexés par un couple $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$:

$$(2.2.1.a) \qquad \begin{aligned} \mathbb{E}^{n,p}(X) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}\big(M(X), \mathbb{E}(p)[n]\big), \\ \text{resp. } \mathbb{E}_{n,p}(X) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}\big(\mathbb{1}(p)[n], \mathbb{E} \otimes M(X)\big), \end{aligned}$$

le twist étant défini comme dans le cas des motifs géométriques par la formule : $M(\mathbb{P}^1_S) = \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(1)[2]$. [12]

Dans le cas où $\mathbb{E} = \mathbb{1}$, on obtient ainsi des théorie bigraduées, cohomologique H^{**} et homologique H_{**}. Il résulte des axiomes que $H^{**}(X)$ est munie d'une structure d'algèbre sur l'anneau $H^{**}(S)$. On pose $A^{**} = H^{**}(S)$ et on l'appelle l'*anneau des coefficients.* [13]

Le lien avec la théorie des motifs est donné par l'axiome d'« orientation », à comparer avec (1.1.1.a), qui demande la donnée d'une application :

$$(2.2.1.b) \qquad c_1 : \mathrm{Pic}(X) \to H^{2,1}(X)$$

pour tout S-schéma lisse, fonctorielle en X. Signalons aussi une propriété de normalisation de cette application : dans le cas où $X = \mathbb{P}^1_S$ et λ_1 est le fibré en droites tautologique sur $\mathbb{P}^1_S$, $c_1(\lambda_1)$ correspond au morphisme de projection canonique : $M(\mathbb{P}^1_S) \to \mathbb{1}(1)[2]$.

On déduit de cet axiome une classe canonique $(c_{1,n})_{n>0}$ dans

$$H^{2,1}(\mathbb{P}^\infty_S) = \varprojlim_{n>0} H^{**}(\mathbb{P}^n_S)$$

qui possède les propriétés d'une *classe d'orientation* au sens de la topologie algébrique – en particulier grâce à la propriété de normalisation. Suivant une idée originale de Morel, on en déduit comme en topologie la formule du fibré projectif (1.1.1.b) – *cf.* [**2**, 3.2] pour la définition de l'isomorphisme et la preuve.

Notons que la formule (1.1.1.b) dans notre contexte généralisé induit la formule usuelle du fibré projectif pour la cohomologie H^{**}. La construction classique de Grothendieck permet d'en déduire la théorie des classes de Chern pour H^{**} et de montrer leurs propriétés usuelles (*cf.* [**2**, 3.3]). À la différence près que, d'après nos axiomes, l'application (2.2.1.b) n'est pas nécessairement un morphisme de groupes. Comme en topologie, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 2.2.2 **([2**, 3.8**])**. — *Considérons les notations et axiomes précédents.*

Il existe une loi de groupe formelle canonique

$$F(x,y) = x + y + \sum_{i,j>0} a_{ij}.x^i y^j \in A^{**}[[x,y]]$$

telle que pour tout S-schéma lisse X admettant une famille ample de fibrés en droites, et tous fibrés vectoriels L, L' de rang 1 sur X,

$$c_1(L \otimes L') = F(c_1(L), c_1(L')).$$

Notons que dans le cas des motifs géométriques, F est la loi de groupe formelle additive : $F(x,y) = x + y$. Du point de vue de la théorie de l'orientation, le sujet de [**2**] est de montrer comment les formules classiques concernant la cohomologie motivique (ou encore les groupes de Chow) se généralisent en tenant compte de la relation précédente.

On va illustrer cela par deux exemples. On aura besoin pour cela de la définition classique suivante : étant donné un entier $n > 0$, on définit par récurrence une série formelle $[n]_F.x$ en x à coefficients dans A^{**} :

$$(2.2.2.a) \qquad \begin{cases} [1]_F.x = x \\ [n]_F.x = F([n-1]_F.x, x) \quad \text{si } n > 1. \end{cases}$$

12. Le fait que l'objet $\mathbb{1}(1)$ soit $\otimes$-inversible fait partie des axiomes.

13. Il existe une riche structure algébrique sur les groupes de cohomologie et d'homologie, bien connue en topologie mais rarement considérée dans son intégralité en géométrie algébrique. On l'a explicité dans [**2**, §2.2].

2.3. Pureté et ramification. —

2.3.1. — Reprenons les axiomes et notations des paragraphes 2.1.1 et 2.2.1. Le point clé de la proposition 1.3.2 est la formule du fibré projectif (1.1.1.b). Ainsi, dans le cadre généralisé considéré ici, on obtient facilement un isomorphisme de pureté de la forme (1.3.2.a) satisfaisant aux mêmes propriétés. On en déduit comme dans la définition 1.3.3 un triangle de Gysin (1.3.3.a) associé à toute paire fermée (X, Z) lisse (relativement à S) de codimension n (voir [**2**, §4.1]).

Remarque 2.3.2. — L'isomorphisme de pureté pour une paire fermée lisse de codimension c se traduit par un isomorphisme :

$$\pi_{X,Z} : H^{n-2c,p-c}(Z) \to H^{n,p}_Z(X),$$

où $H^{n,p}_Z(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(M_Z(X), \mathbb{1}(p)[n])$. Considérant l'image de l'élément unité de l'anneau $H^{**}(Z)$ par cet isomorphisme, on obtient la *classe fondamentale localisée* :

$$\bar{\eta}_Z(X) \in H^{2c,c}_Z(X).$$

2.3.3. — Comme dans le cas des motifs géométriques, on peut s'intéresser à la fonctorialité du triangle de Gysin. Rappelons que le triangle de localisation (1.2.2.b) est naturel par rapport à tout morphisme $(f, g) : (Y, T) \to (X, Z)$ de paires fermées. Par définition du triangle de Gysin, on obtient donc un unique morphisme $(f, g)_!$ s'insérant dans le diagramme commutatif suivant :

(2.3.3.a)
$$\begin{tikzcd} M(Y-T) \arrow[r, "l_*"] \arrow[d, "h_*"'] & M(Y) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & M(T)(m)[2m] \arrow[r, "\partial_{Y,T}"] \arrow[d, "(f,g)_!"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & M(Y-T)[1] \arrow[d, "h_*[1]"] \\ M(X-Z) \arrow[r, "j_*"'] & M(X) \arrow[r, "i^*"'] & M(Z)(n)[2n] \arrow[r, "\partial_{X,Z}"'] & M(X-Z)[1] \end{tikzcd}$$

où i, j, k, l désignent les immersions évidentes, h la restriction évidente de f et n, m les codimensions respectives de i, k.

On a montré dans [**2**, §4.2] comment calculer le morphisme $(f, g)_!$. De manière classique, si $n = m$ et (f, g) est cartésien (le cas dit « transverse »), on obtient $(f, g)_! = g_*$. Des résultats plus intéressants apparaissent lorsque $m < n$ (*formules d'excès*, voir [**2**, §4.2.2]) ou lorsque le carré correspondant à (f, g) est seulement topologiquement cartésien.

2.3.4. — On expose ici un des résultats mentionnés dans le paragraphe précédent : considérons un carré topologiquement cartésien :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

où i et k sont des immersions fermées de même codimension n, et T admet un fibré ample.
Pour clarifier les formules, on va supposer que S est intègre et que $n = 1$ (voir [**2**, §4.2.3] pour le cas général). On pose $T' = Z \times_X Y$. Par hypothèse, $T = T'_{red}$. Soit $(T'_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de T. On pose $T_i = T'_{i,red}$, et on note $g_i : T_i \to Z$ la restriction de g. D'après la remarque 2.3.2, on obtient pour tout $i \in I$ une classe $\bar{\eta}_Y(T_i) \in H^{2,1}_{T_i}(Y)$.

On note r_i la multiplicité géométrique de T'_i et on l'appelle l'*indice de ramification* de f en T_i (suivant l'usage classique).

Définition 2.3.5 **([2, 4.24, 4.25]).** — Avec les notations précédentes, on définit la *F-multiplicité d'intersection* de T_i dans $f^{-1}(Z)$ comme la classe de $H^{0,0}(T_i)$ suivante :

$$r(T_i; f, g) = \pi^{-1}_{Y,T_i}\Big([r_i]_F.\bar{\eta}_Y(T_i)\Big).$$

où π_{Y,T_i} désigne l'isomorphisme de pureté de la remarque 2.3.2 et $[r_i]_F.x$ désigne la série formelle (2.2.2.a).[14]

14. L'hypothèse que T admet un fibré ample implique que la classe $\bar{\eta}_Y(T_i)$ est nilpotente.

Avec cette définition, j'ai obtenu le théorème suivant :

Theorem 2.3.6 ([**2**, 4.26]). — *Avec les hypothèses et notations qui précèdent, on obtient :*

$$(f,g)_! = \sum_{i \in I} \big(r(T_i; f, g) \otimes g_{i*}\big) \circ \delta_{i*}$$

où $\delta_i : T_i \to T_i \times_S T_i$ désigne l'immersion diagonale.

En cohomologie à coefficients dans un objet $\mathbb{E}$ de $\mathscr{T}$, le diagramme (2.3.3.a) joint à ce théorème donne donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^{n,p}(Y) & \oplus_{i \in I} \mathbb{E}^{n-2,p-1}(T_i) \arrow[l, "k_*"'] & \mathbb{E}^{n-1,p}(Y - T) \arrow[l, "\partial_{Y,T}"'] \\
\mathbb{E}^{n,p}(X) \arrow[u, "f^*"] & \mathbb{E}^{n-2,p-1}(Z) \arrow[l, "i_*"'] \arrow[u, "\sum_i \rho_i . g_i^*"] & \mathbb{E}^{n-1,p}(X - Z) \arrow[l, "\partial_{X,Z}"'] \arrow[u, "h^*"']
\end{tikzcd}$$

où l'on a posé $\rho_i = r(T_i; f, g)$ et on a utilisé la structure de $H^{**}(T_i)$-module gradué de $\mathbb{E}^{**}(T_i)$. Notons que dans le cas où $F(x,y) = x+y$, la classe ρ_i est simplement l'entier r_i. Dans le cas général, $\rho_i = r_i + \epsilon$ où ϵ est un terme correcteur qui s'exprime comme un polynôme en les coefficients a_{ij} de la série formelle F.

2.4. Dualité et classes de cobordisme. —

2.4.1. — Contrairement au cas du morphisme de Gysin d'une immersion fermée, la définition du morphisme de Gysin dans le contexte généralisé considéré précédemment est plus délicate.

Le cas crucial est celui de la projection $p : \mathbb{P}^n_S \to S$ du fibré projectif trivial de rang $n > 0$ arbitraire. En effet, la formule $p^* = \mathfrak{l}_n(\mathbb{P}^n_S)$ utilisée dans la définition 1.4.2 n'est la bonne que si F est la loi additive.

Pour traiter le cas général, je me suis appuyé sur l'idée suivante : si l'on considère que la situation du paragraphe 1.4.6 se généralise, pour tout morphisme projectif lisse $f : X \to S$, le motif (généralisé) $M(X)$ est fortement dualisable. Une étude attentive de l'accouplement de dualité (1.4.6.a) révèle alors que le morphisme de Gysin f^* n'est rien d'autre que le transposé de f_* à travers cet accouplement de dualité.

Pour tout entier $n > 0$,

$$M(\mathbb{P}^n_S) = \oplus_{i=0}^n \mathbb{1}(i)[2i] \tag{2.4.1.a}$$

d'après la formule du fibré projectif. D'après nos axiomes, $\mathbb{1}(i)$ est inversible : il en résulte que $M(\mathbb{P}^n_S)$ est fortement dualisable. De plus, dans un accouplement de dualité de la forme (1.4.6.a) pour $X = \mathbb{P}^n_S$, l'un des deux morphismes η, μ est déterminé par l'autre. Ainsi, le morphisme de Gysin p^* est déterminé par le morphisme composé :

$$\mu_n (= \mu) : M(\mathbb{P}^n_S) \otimes M(\mathbb{P}^n_S)(-n)[-2n] \xrightarrow{\delta^*} M(\mathbb{P}^n_S) \xrightarrow{p_*} \mathbb{1} \tag{2.4.1.b}$$

où p_* est le morphisme induit par la projection canonique et δ^* est le morphisme de Gysin associé à l'immersion fermée diagonale de $\mathbb{P}^n_S/S$.

On exploite ce principe dans [**2**, §5] pour définir le morphisme de Gysin

$$p^* : \mathbb{1} \to M(\mathbb{P}^n_S)(-n)[-2n].$$

Plus précisément, on montre ([**2**, lem. 5.5]) que le morphisme obtenu par adjonction à partir de μ_n :

$$\varphi_n : M(\mathbb{P}^n_S)(-n)[-2n] \to \underline{\mathrm{Hom}}(M(\mathbb{P}^n_S), \mathbb{1})$$

où le deuxième membre est défini a priori car $M(\mathbb{P}^n_S)$ est *fortement dualisable*, est un isomorphisme. Le morphisme p^* est alors défini ([**2**, déf. 5.6]) par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "\sim"'] & M(\mathbb{P}^n_S)(-n)[-2n] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \arrow[r, "\underline{\mathrm{Hom}}(p_*, \mathbb{1})"] & \underline{\mathrm{Hom}}(M(\mathbb{P}^n_S), \mathbb{1}). \arrow[u, "\varphi_n^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

On peut ensuite définir le morphisme de Gysin de n'importe quel morphisme projectif [(15)] ([**2**, déf. 5.12]) et en déduire plusieurs propriétés naturelles concernant sa fonctorialité (voir [**2**, §5.3.3]).

Remarque 2.4.2. — Notons aussi que pour tout S-schéma projectif lisse connexe X de dimension d, on peut définir avec les formules de (1.4.6.a) un accouplement de dualité qui fait de $M(X)$ un objet fortement dualisable avec pour dual fort l'objet $M(X)(-d)[-2d]$.

2.4.3. — Pour terminer cette présentation, j'aimerais expliciter comment la loi de groupe formelle $F(x,y) = x + y + \sum_{i,j>0} a_{i,j}.x^i y^j$ intervient dans la théorie du morphisme de Gysin. [(16)] Ainsi, dans le cas de la projection $p : \mathbb{P}^n_S \to S$, le morphisme p^* induit en cohomologie :

$$p_* : H^{s,t}(\mathbb{P}^n_S) \to H^{s-2n,t-n}(S).$$

On définit la *classe de cobordisme* de $\mathbb{P}^n_S/S$ comme l'élément : $p_*(1) \in H^{-2n,-n}(S)$. On note cette classe $[\mathbb{P}^n]$. Comme on l'a vu dans le paragraphe 2.4.1, le morphisme p^* est déterminé via (2.4.1.b) par le morphisme de Gysin de l'immersion fermée diagonale

$$\delta : \mathbb{P}^n_S \to \mathbb{P}^n_S \times_S \mathbb{P}^n_S.$$

Dans [**2**, prop. 5.30], on calcule la classe fondamentale de δ et on en déduit la formule suivante pour $[\mathbb{P}^n]$:

Proposition 2.4.4 **([2**, cor. 5.31]**).** — *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$[\mathbb{P}^n] = (-1)^n.\det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{1,1} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & a_{1,2} \\ 0 & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & a_{1,n} \end{pmatrix}.$$

Cette expression de $[\mathbb{P}^n]$ est, à ma connaissance, nouvelle. On vérifie facilement qu'elle coïncide avec la formule de Mychenko classique en topologie algébrique – on obtient en fait une nouvelle preuve de ce résultat.

3. Lien avec la théorie de l'orientation

3.1. Spectres orientés. —

3.1.1. — Fixons un schéma noethérien de dimension finie S.

Morel et Voevodsky ont introduit la catégorie homotopique stable des S-schémas comme un prolongement naturel de la théorie des complexes motiviques de Voevodsky que nous avons vue dans la section 1.

Cette catégorie nous a fourni le modèle pour les axiomes des catégories triangulées homotopiques orientables, présentées dans la section précédente et formant le cadre de l'article [**2**].

Notons Sm_S le site des S-schémas lisses de type fini muni de la topologie de Nisnevich et rappelons brièvement les points essentiels de sa construction :

15. Ici, projectif signifie admettant une factorisation $Y \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n_X \xrightarrow{p} X$ où i est une immersion fermée et p la projection canonique.

16. Rappelons que l'élément $a_{i,j}$ appartient à $A^{-2(i+j),-(i+j)}$.

- Elle est formée à partir de la catégorie des faisceaux d'ensembles simpliciaux pointés sur Sm_S, munie de sa structure de catégorie de modèles due à Joyal-Jardine. Cette catégorie est munie d'une structure monoïdale symétrique. (17)
- En utilisant la théorie des localisations de Bousfield, on localise cette catégorie de modèles de manière à inverser les morphismes $\mathbb{A}^1_X \to X$ donnés par la projection canonique de la droite affine sur un S-schéma lisse X. La structure monoïdale s'étend à cette localisation.
- En utilisant la théorie des spectres symétriques dans une catégorie de modèles abstraite (due à Hovey), on considère la catégorie de modèles universelle engendrée par la précédente et telle que le smash produit par $\mathbb{P}^1$ pointé par l'infini est inversible. La catégorie homotopique associée est appelée la *catégorie homotopique stable* sur S, notée $SH(S)$.

  Elle est triangulée monoïdale symétrique fermée. Ses objets sont appelés des *spectres.* L'unité pour la structure monoïdale est notée S^0 et son produit tensoriel est noté $\wedge$, encore appelé le smash produit.

Pour tout S-schéma lisse pointé X, on note $\Sigma^\infty X$ l'objet de $SH(S)$ obtenu à partir du faisceau représenté par X. Par définition, $\Sigma^\infty \mathbb{P}^1$ est inversible pour le smash produit sur $SH(S)$. Il en résulte que tout objet $\mathbb{E}$ de $SH(S)$ représente une théorie cohomologie bigraduée :

$$\mathbb{E}^{n,m}(X) = \mathrm{Hom}_{SH(S)}(\Sigma^\infty X_+, (\Sigma^\infty \mathbb{P}^1)^{\wedge m} \wedge \mathbb{E}[n-2m]).$$

Notons que l'on retrouve les conventions de (2.2.1.a) en posant :

(3.1.1.a) $$\mathbb{E}(m) = (\Sigma^\infty \mathbb{P}^1)^{\wedge m} \wedge \mathbb{E}[-2m].$$

3.1.2. — Les définitions de la topologie algébrique se transportent dès lors au cadre de la géométrie algébrique. On dit qu'un objet $\mathbb{E}$ de $SH(S)$ est muni d'une structure de *spectre en anneaux* (commutatif) si c'est un monoïde dans $SH(S)$. On dit qu'il est *orienté* si la cohomologie de $\mathbb{P}^\infty_S$ est engendrée comme algèbre de séries formelles sur $\mathbb{E}^{**}(S)$ par une classe $c \in \mathbb{E}^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$ dont la restriction à $\mathbb{P}^1$ correspond à l'élément unité de l'algèbre $E^{**}(S)$. Une telle classe est appelée une *orientation* de $\mathbb{E}$.

Le spectre en anneaux orienté universel est le spectre de cobordisme algébrique introduit par Voevodsky. On le note $\mathbf{MGL}_S$. Il est muni d'une orientation canonique notée $c_{\mathbf{MGL}}$. Sa propriété universelle s'énonce comme suit :

Proposition 3.1.3 **(Vezzosi, [Vez01**, th. 4.3]). — *Soit $\mathbb{E}$ un spectre en anneaux sur S.*

1. *Pour tout morphisme de spectres en anneaux*
$$\varphi : \mathbf{MGL}_S \to \mathbb{E}$$
la classe
$$c_\varphi = \varphi_*(c_{\mathbf{MGL}}) \in \mathbb{E}^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$$
est une orientation de $\mathbb{E}$.
2. *L'application $\varphi \mapsto c_\varphi$ ainsi définie est une bijection de l'ensemble des morphismes d'anneaux de $\mathbf{MGL}_S$ dans $\mathbb{E}$ et l'ensemble des orientations de $\mathbb{E}$.*

Il est donc naturel de généraliser la définition précédente comme suit :

Définition 3.1.4. — Soit $\mathbb{E}$ un spectre sur S.

Une *orientation* de $\mathbb{E}$ est un morphisme $\gamma : \mathbf{MGL}_S \wedge \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ qui fait de $\mathbb{E}$ un module sur le monoïde $\mathbf{MGL}_S$. On dit alors simplement que $\mathbb{E}$ est *orienté*.

3.1.5. — On note $\mathbf{MGL}_S$*–mod*^{w} la catégorie des $\mathbf{MGL}_S$-modules. Malheureusement, cette catégorie a peu de structures. On ne peut pas démontrer par exemple qu'elle est monoïdale, ou même triangulée. C'est ce qui motive les définitions de la section suivante.

17. Au sens des catégories de modèles : le produit tensoriel est dérivable à gauche.

3.2. Modules stricts sur $\mathbf{MGL}_S$. —

3.2.1. — Notons $Sp^{\Sigma}(S)$ la catégorie de modèles sous-jacente à $SH(S)$ vue dans le paragraphe 3.1.1. Cette catégorie possède la propriété essentielle d'être une catégorie de modèles monoïdale symétrique. (18) On peut alors dégager la définition suivante :

Définition 3.2.2. — Soit $\mathbf{R}$, $\mathbb{E}$ des spectres sur S.

1. Une structure de *spectre en anneaux strict* sur $\mathbf{R}$ est une structure de monoïde comutatif sur $\mathbf{R}$ dans la catégorie de modèles sous-jacente à $SH(S)$.
2. Si $\mathbf{R}$ est un spectre en anneaux strict, une structure de $\mathbf{R}$-module strict sur $\mathbb{E}$ est une action du monoïde $\mathbf{R}$ sur $\mathbb{E}$ dans la catégorie de modèles sous-jacente à $SH(S)$.

3.2.3. — Etant donné un spectre en anneaux strict $\mathbf{R}$, la catégorie des $\mathbf{R}$-modules stricts permet de résoudre les problèmes soulevés dans le paragraphe 3.1.5. Notons $\mathbf{R}-mod^{Sp}$ cette catégorie. On dispose d'une paire de foncteurs adjoints :

$$L_{\mathbf{R}} : Sp^{\Sigma}(S) \leftrightarrows \mathbf{R}-mod^{Sp} : \mathcal{O}_{\mathbf{R}}$$

telle que $\mathcal{O}_{\mathbf{R}}$ est le foncteur oubliant la structure de $\mathbf{R}$-module et $L_{\mathbf{R}}$ est le foncteur $\mathbf{R}$-module libre. Or, la catégorie source de cette adjonction est une catégorie de modèles : Schwede et Shipley ont montré comment définir une catégorie de modèles monoïdale sur $\mathbf{R}-mod^{Sp}$ de telle manière que l'adjonction précédente se dérive. (19)

Définition 3.2.4 **([4, 2.2.3]).** — Etant données les notations précédentes, on note $\mathbf{R}-mod$ la catégorie homotopique associée à la catégorie de modèles de Schwede et Shipley.

L'adjonction dérivée de l'adjonction qui précède est simplement notée (par abus) :

$$L_{\mathbf{R}} : SH(S) \leftrightarrows \mathbf{R}-mod : \mathcal{O}_{\mathbf{R}}. \tag{3.2.4.a}$$

Si X est un S-schéma lisse, on pose :

$$\underline{\mathbf{R}}(X) = L_{\mathbf{R}}(\Sigma^{\infty} X_+).$$

Il résulte de cette définition que la catégorie $\mathbf{R}-mod$ est triangulée monoïdale symétrique fermée, et que le foncteur $L_{\mathbf{R}}$ est monoïdal symétrique.

3.2.5. — Il est facile de voir que $\mathbf{MGL}_S$ admet une structure de spectre en anneaux strict. La définition précédente lui est donc appliquable et on obtient une catégorie triangulée monoïdale $\mathbf{MGL}_S-mod$ des $\mathbf{MGL}_S$-modules stricts.

On peut alors voir aisément que la catégorie $\mathbf{MGL}_S$–mod satisfait tous les axiomes décrits dans le paragraphe 2.1.1 : l'adjoint à gauche de l'adjonction (3.2.4.a) fournit le foncteur M ; l'orientation canonique de $\mathbf{MGL}$ fournit la première classe de Chern (2.2.1.b).

On obtient ainsi l'exemple principal, pour ne pas dire universel, de catégorie triangulée monoïdale dans laquelle les résultats de [2] sont applicables. (20)

3.3. Théories cohomologiques orientées. —

3.3.1. — Il est facile de voir que l'image essentielle du foncteur $\mathcal{O}_{\mathbf{MGL}_S}$ s'envoie dans la catégorie des $\mathbf{MGL}_S$-module (au sens faible). Il induit ainsi un foncteur canonique :

$$\mathcal{O}' : \mathbf{MGL}_S-mod \to \mathbf{MGL}_S-mod^w$$

tel que pour tout spectre $\mathbb{E}$ sur S, $\mathcal{O}' \circ L_{\mathbb{E}}(\mathbf{MGL}_S)$ est le $\mathbf{MGL}_S$-module libre engendré par $\mathbb{E}$ dans la catégorie monoïdale $SH(S)$. Il en résulte que pour tout spectre orienté $\mathbb{E}$ sur S, le préfaisceau représenté par $\mathbb{E}$ sur $\mathbf{MGL}_S-mod^w$ induit un foncteur :

$$\phi_{\mathbb{E}} : (\mathbf{MGL}_S-mod)^{op} \to \mathscr{A}b.$$

---

18. C'est vraiment grâce à la construction des *spectres symétriques* (due à Hovey dans notre cadre) qu'on obtient une telle structure. Rappelons qu'en topologie algébrique, un tel modèle de la catégorie homotopique stable a mis plusieurs dizaines d'années à arriver à maturité, débouchant entre autre sur cette notion de spectres symétriques.
19. Dans la théorie des catégories de modèles, on dit que $(L_{\mathbf{R}}, \mathcal{O}_{\mathbf{R}})$ est une adjonction de Quillen.
20. Cet exemple est considéré dans [2, 2.12(2)].

ayant la propriété que pour tout S-schéma lisse X, et tout couple $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\phi_{\mathbb{E}}(\underline{\mathbf{MGL}}_S(X)(-m)[-n]) = \mathbb{E}^{n,m}(X).$$

Ainsi, les résultats de [**2**] appliqués à la catégorie $\mathbf{MGL}_S{-}mod$ comme indiqué dans le paragraphe 3.2.5 donnent le théorème suivant :

Theorem 3.3.2. — *Soit $\mathbb{E}$ un spectre orienté sur S (au sens de la définition 3.1.4).*

(i) *Pour tous S-schémas lisses X et Y, et tout S-morphisme projectif $f : Y \to X$ de dimension relative d, il existe un morphisme de Gysin*

$$f_* : \mathbb{E}^{*,*}(Y) \to \mathbb{E}^{*-2d,*-d}(X).$$

(ii) *Pour toute paire fermée (X,Z) lisse de codimension n, il existe une suite exacte longue*

$$\ldots \to \mathbb{E}^{*-1,*}(X-Z) \xrightarrow{\partial_{X,Z}} \mathbb{E}^{*-2n,*-n}(Z) \xrightarrow{i_*} \mathbb{E}^{*,*}(X) \xrightarrow{j^*} \mathbb{E}^{*,*}(X-Z) \to \ldots$$

où i et j sont les immersions évidentes.

Ces structures vérifient toutes les propriétés habituelles : plus précisément, à toute formule obtenue dans le cadre de [**2**] *correspond une formule (duale) en $\mathbb{E}$-cohomologie et une formule en $\mathbb{E}$-homologie.*

Remarque 3.3.3. — 1. Il est important de noter que, dans ce théorème, on n'a pas besoin de structure d'anneaux sur $\mathbb{E}$. On utilise comme substitut la structure de $\mathbf{MGL}^{**}(X)$-algèbre bigraduée sur $\mathbb{E}^{**}(X)$. Ainsi, les classes de Chern d'un fibré vectoriel sur X ne sont pas définies dans $\mathbb{E}^{**}(X)$, mais elles agissent sur ce groupe gradué.

2. Ce théorème n'est pas énoncé dans [**2**] alors qu'il ne s'agit que d'un corollaire formel de cet article. Je profite donc de ce mémoire pour réparer cette lacune.

Deuxième PARTIE
FILTRATION PAR CONIVEAU ET RÉSOLUTION DE GERSTEN

Dans toute cette partie, on fixe un corps de base k supposé parfait. Sauf mention explicite du contraire, les schémas sont supposés être définis sur k, séparés de type fini sur k.

4. Thèse (rappels)

4.1. Modules homotopiques avec transferts. —

4.1.1. — Les résultats importants de la théorie des motifs géométriques de Voevodsky utilisent de manière essentielle la théorie des faisceaux avec transferts que l'on rappelle brièvement : un *faisceau avec transferts* F (sur k) est un préfaisceau additif sur Sm_k^{cor} dont la restriction à Sm_k est un faisceau pour la topologie Nisnevich. On dit que F est invariant par homotopie si pour tout schéma lisse X, l'application naturelle $F(X) \to F(\mathbb{A}^1_X)$ est un isomorphisme. On dira encore que F est un *faisceau homotopique avec transferts.* Ces faisceaux forment une catégorie $HI(k)$ qui a de bonnes propriétés : elle est abélienne de Grothendieck et monoïdale fermée (voir [**3**, 1.1] pour plus de détails).

Le théorème fondamental de Voevodsky concernant ces faisceaux stipule que leur cohomologie Nisnevich est invariante par homotopie. Dans la preuve de ce résultat, Voevodsky utilise la construction suivante : à tout faisceau F dans $HI(k)$, on associe un faisceau F_{-1} dans $HI(k)$ par la formule :

(4.1.1.a) $$F_{-1}(X) = \mathrm{coKer}\big(F(\mathbb{A}^1_X) \to F(\mathbb{G}_{m,X})\big).$$

Utilisant cette construction, j'ai introduit une nouvelle catégorie afin de formuler le résultat central de ma thèse :

Définition 4.1.2. — ([**3**, 1.15]) Un module homotopique avec transferts est un couple (F_*, ϵ_*) où F_* est un objet $\mathbb{Z}$-gradué de $HI(k)$ et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_n : F_n \to (F_{n+1})_{-1}$ est un isomorphisme.

Un morphisme de modules homotopiques avec transferts est une transformation naturelle homogène de degré 0 compatible à l'isomorphisme structural ϵ_*. On note $HI_*(k)$ la catégorie des modules homotopiques avec transferts.

Notons que $HI_*(k)$ est, tout comme $HI(k)$, une catégorie abélienne de Grothendieck munie d'une structure monoïdale fermée.

4.1.3. — Rappelons que les points du site Nisnevich Sm_k correspondent aux anneaux locaux henséliens associés à un point d'un schéma lisse X. Parmi ces points, on trouve donc les extensions de corps E/k de degré de transcendance finie qui correspondent au cas où x est un point générique. On dira simplement « corps de fonctions » pour une telle extension. Si F est un faisceau dans $HI(k)$, on note $\hat{F}(E)$ la fibre de F au point correspondant.

Si on note $\mathscr{E}_k$ la catégorie des corps de fonctions, étant donné un module homotopique avec transferts F_*, $\hat{F}_*$ est un préfaisceau sur $\mathscr{E}_k^{op}$. Un résultat remarquable de la théorie de Voevodsky est que le foncteur $F_* \to \hat{F}_*$ est conservatif.

Dans ma thèse, j'ai renforcé considérablement ce résultat grâce à la théorie des *modules de cycles* de Rost. Avant d'énoncer le résultat (théorème 4.3.4), je rappelle rapidement la théorie de Rost dans la section suivante.

4.2. Modules de cycles. —

4.2.1. — Suivant Rost, un *pré-module de cycles* est la donnée pour tout corps de fonction E/k d'un groupe abélien $\mathbb{Z}$-gradué $\phi(E)$ et des morphismes structuraux suivants (homogènes, dont le degré est indiqué s'il y a lieu en indice) :

(D1) Pour toute extension E/L, un morphisme $\phi(L) \to \phi(E)$.

(D2) Pour toute extension finie E/L, un morphisme $N_{E/L} : \phi(E) \to \phi(L)$.

(D3) Pour tout corps de fonctions, $\phi(E)$ est un module gradué sur l'anneau de K-théorie de Milnor $K_*^M(E)$ de E.

(D4) Pour tout anneau de valuation $\mathcal{O}$ essentiellement de type fini sur k, de corps des fonctions E et de corps résiduel κ, un morphisme $\phi(E) \to \phi_{-1}(\kappa)$. Si v désigne la valuation discrète sur E correspondant à $\mathcal{O}$, on note ce morphisme ∂_v.

Ces morphismes structuraux doivent vérifier des relations qu'on n'explicitera pas ici (*cf.* [**Ros96**, (1.1)]).

Étant donné un k-schéma essentiellement de type fini X, x un point de X d'adhérence réduite Z et y une spécialisation immédiate de x (*i.e.* $y \in Z^{(1)}$). Rost introduit un morphisme résidu comme suit : on note $p : \tilde{Z} \to Z$ le schéma normalisé de Z ; la fibre $p^{-1}(y)$ est finie, formée de points $z \in \tilde{Z}$ tels que :

- L'extension résiduelle κ_z/κ_y est finie.
- L'anneau local de z est un anneau de valuation essentiellement de type fini sur k correspondant à une valuation v_z sur κ_x.

On définit alors un morphisme de degré -1 :

$$\partial_y^x : \phi(\kappa_x) \xrightarrow{\sum_z \partial_{v_z}} \bigoplus_{z \in p^{-1}(y)} \phi_{-1}(\kappa_z) \xrightarrow{\sum_z N_{\kappa_z/\kappa_y}} \phi_{-1}(\kappa_y).$$

Si $y \in X$ n'est pas une spécialisation immédiate de x, on pose conventionnellement $\partial_y^x = 0$.

Définition 4.2.2 **(Rost)**. — Avec les notations qui précèdent, on dit que ϕ est un module de cycles si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout k-schéma X essentiellement de type fini, tout point $x \in X$ et toute section $\rho \in \phi(E)$, l'ensemble $\{y \in X \mid \partial_y^x(\rho) \neq 0\}$ est fini.

2. Pour tout k-schéma X essentiellement de type fini, la suite suivante de morphismes indexée par un entier $p \geq 0$:

$$\dots \to \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \phi(\kappa_x) \xrightarrow{\sum_{x,y} \partial_y^x} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} \phi(\kappa_y) \to \dots$$

est un complexe. On note ce complexe $C^*(X;\phi)$ et $A^*(X;\phi)$ ses groupes de cohomologie.

On note $\mathscr{M}Cycl(k)$ la catégorie des modules de cycles sur k avec pour morphismes les transformations naturelles compatibles aux morphismes structuraux (D*) précédents.

L'exemple canonique de modules de cycles est donné par le foncteur de K-théorie de Milnor K_*^M. Une des constructions fondamentales de l'article de Rost est de définir une fonctorialité contravariante sur $A^*(X;\phi)$ par rapport aux morphismes de but lisses (*cf.* [**Ros96**, §12]).

4.3. Motifs génériques et équivalence. —

4.3.1. — Afin de relier les faisceaux avec transferts et les modules de cycles, l'idée naturelle est de mettre une structure de module de cycles sur le foncteur $\hat{F}_*$ du paragraphe 4.1.3.

Pour cela, j'ai interprété les données (D1) à (D4) comme des *morphismes de spécialisation* au sens des topos entre les foncteurs fibres associés à un corps de fonctions.

Plus précisément, le foncteur fibre $F_* \mapsto \hat{F}_*(E)$ est pro-représenté par un pro-schéma lisse canonique : on considère l'ensemble filtrant $\mathcal{M}^{lis}(E/k)$ des sous-k-algèbres A de E telles que Spec(A) est lisse de type fini. Alors,

$$\hat{F}_*(E) = \varinjlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(E/k)} F_*(\mathrm{Spec}(A)). \tag{4.3.1.a}$$

Ce foncteur fibre est pro-représenté par le pro-schéma : $(E) := \text{"}\varprojlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(E/k)}\text{"} \ \mathrm{Spec}(A)$.

Un morphisme de spécialisation au sens des topos est une transformation naturelle de foncteurs fibres, ou, ce qui revient au même, un morphisme des pro-objets qui les représente. L'idée clef pour obtenir suffisamment de morphismes de spécialisation dans le cas d'un faisceau F_* de $HI_*(k)$ est de considérer des pro-objets dans la catégorie des motifs :

Définition 4.3.2 **(**[**Dég08**, 3.3.1]**).** — On définit le motif générique associé à un corps de fonction E et à un entier $n \in \mathbb{Z}$ comme le pro-objet de $DM_{gm}(k)$ suivant :

$$M(E)\{n\} = \text{"}\varprojlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(E/k)^{op}}\text{"} \ M\big(\mathrm{Spec}(A)\big)(n)[n].$$

On note $DM_{gm}^{(0)}(k)$ la sous-catégorie pleine des pro-objets de $DM_{gm}(k)$ formée de ces motifs génériques.

4.3.3. — Le préfaisceau F_* induit de manière canonique un foncteur $\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$, qui s'étend évidemment en un foncteur $\hat{\varphi}$ sur les pro-motifs (*cf.* [**3**, §1.3]). Tautologiquement :

$$\hat{\varphi}(M(E)\{n\}) = \hat{F}_{-n}(E).$$

D'après le théorème fondamental de [**Dég08**, 5.1.1], on peut construire les données (D1) à (D4) d'une structure de modules de cycles sur $\hat{F}_*$ comme des morphismes entre motifs génériques.

J'explicite ici le cas du morphisme (D4) : sous les hypothèses de (D4), on cherche un morphisme de pro-objets :

$$M(\kappa(v)(1)[1]) \xrightarrow{\partial_v} M(E).$$

Pour le définir, on considère un schéma lisse X de corps des fonctions E tel que la valuation v correspond à un point $x \in X^{(1)}$ dont l'adhérence réduite Z dans X est lisse sur k. Soit U un voisinage ouvert de x dans X ; le morphisme résidu associé à la paire $(U, Z \cap U)$ suivant la définition 1.3.3 donne un morphisme :

$$M(Z \cap U)(1)[1] \to M(U - Z \cap U)$$

qui induit le morphisme de pro-objets attendu lorsqu'on le considère comme un morphisme de pro-objets indexés par les voisinages U.

Le point délicat est de vérifier toutes les relations qui font partie de la définition d'un pré-module de cycles. Mais ces relations sont déjà vraies dans $DM^{(0)}_{gm}(k)$. J'obtiens alors le théorème suivant, développé à partir de ma thèse dans la série d'article [**Dég06**], [**Dég08**], [**3**] :

Theorem 4.3.4 ([**3**, 3.4, 3.6]). — 1. *Pour tout module homotopique avec transferts F_*, le foncteur $\hat{F}_*$, muni de la structure de pré-module de cycles décrite ci-dessus, est un module de cycles.*

2. *Pour tout module de cycles ϕ, le foncteur $F^{\phi}_* : X \mapsto A^0(X;\phi)$ admet une structure canonique, fonctorielle, de module homotopique avec transferts.*
3. *Les foncteurs*
$$\begin{array}{ccc} HI_*(k) & \leftrightarrows & \mathscr{M}Cycl(k) \\ F_* & \mapsto & \hat{F}_* \\ F^{\phi}_* & \leftarrow\!\shortmid & \phi \end{array}$$
sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.
4. *Pour tout module homotopique F_*, tout k-schéma lisse X et tout entier $n \geq 0$, il existe un isomorphisme canonique :*
$$H^n_{\mathrm{Nis}}(X;F_*) \to A^n(X;\hat{F}_*)$$
naturel en X (par rapport aux transferts).

Exemple 4.3.5. — Considérons le module de cycles évident défini par la K-théorie de Milnor K^M_*. On définit la *K-théorie de Milnor non ramifiée* comme le faisceau $\underline{K}^M_* = A^0(.;K^M_*)$, muni de sa structure de module homotopique avec transferts. Par construction, il est immédiat que $\underline{K}^M_*$ est l'objet unité de la catégorie $HI_*(k)$. Il résulte donc de l'équivalence de catégories ci-dessus que la catégorie des modules de cycles est une catégorie monoïdale fermée dont K^M_* est l'objet unité.

5. Modules homotopiques orientés

5.1. Groupes d'homotopie. —

5.1.1. — Inspiré par la théorie des faisceaux homotopiques avec transferts, F. Morel a introduit leur analogue dans la catégorie homotopique stable $SH(k)$ – cette dernière catégorie est déjà apparue dans le paragraphe 3.1.1 du présent mémoire. Cette analogie passe par l'introduction de la notion suivante de groupe d'homotopie, due à Morel et adaptée à la géométrie algébrique :

Définition 5.1.2 ([**Mor04**, th. 5.1.12]). — Soit $\mathbb{E}$ un spectre sur k et $n \in \mathbb{Z}$ un entier.
Pour tout schéma lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose :
$$\underline{\hat{\pi}}_n(\mathbb{E})_r(X) = \mathrm{Hom}_{SH(k)}(\Sigma^\infty X_+, \mathbb{E}(r)[r-n]).$$
On obtient ainsi un préfaisceau de groupes abéliens gradués $\underline{\hat{\pi}}_n(\mathbb{E})_*$ sur Sm_k. On définit le *n-ème groupe d'homotopie* de $\mathbb{E}$ comme le faisceau Nisnevich associé à ce préfaisceau. On le note $\underline{\pi}_n(\mathbb{E})_*$.

5.1.3. — La famille de foncteurs $\mathbb{E} \mapsto \underline{\pi}_n(\mathbb{E})_*$ indexée par les entiers $n \in \mathbb{Z}$ est conservative. De plus, d'après un théorème dû à Morel, cette famille définit une t-structure sur $SH(k)$: étant donné un spectre $\mathbb{E}$ sur k,

1. on dit que $\mathbb{E}$ est *(homologiquement) positif* (resp. *(homologiquement) strictement négatif*) si pour tout $n < 0$ (resp. $n \geq 0$), $\underline{\pi}_n(\mathbb{E})_* = 0$;
2. il existe un unique triangle distingué dans $SH(k)$:

(5.1.3.a) $$\mathbb{E}_{\geq 0} \to \mathbb{E} \to \mathbb{E}_{<0} \to \mathbb{E}_{\geq 0}[1]$$

tel que $\mathbb{E}_{\geq 0}$ (resp. $\mathbb{E}_{<0}$) est positif (resp. strictement négatif).

Définition 5.1.4 ([**Mor04**, th. 5.2.3]). — La t-structure sur $SH(k)$ décrite ci-dessus est appelée la *t-structure homotopique*.

5.1.5. — Si F est un faisceau abélien sur Sm_k, on dit que F est $\mathbb{A}^1$-*local* si ses préfaisceaux de cohomologie $H^*(.;F)$ sont invariants par homotopie. D'après le théorème fondamental de Voevodsky, les faisceaux homotopiques avec transferts sont $\mathbb{A}^1$-locaux.

Notons qu'on peut appliquer la définition (4.1.1.a) à tout faisceau de groupes abéliens sur Sm_k. De même, la définition suivante généralise la définition 4.1.2 :

Définition 5.1.6. — (Morel, [**3**, 1.15]) Un *module homotopique* est un couple (F_*, ϵ_*) tel que :

(a) F_* est un faisceau abélien $\mathbb{Z}$-gradué et $\mathbb{A}^1$-local.

(b) pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_n : F_n \to (F_{n+1})_{-1}$ est un isomorphisme.

On note $\Pi_*(k)$ la catégorie des modules homotopiques avec pour morphismes les transformations naturelles graduées compatibles à l'isomorphisme structural ϵ_*.

Le théorème suivant est dû à Morel :

***Theorem 5.1.7* (Morel).** — 1. *Pour tout spectre $\mathbb{E}$, le faisceau $\underline{\pi}_0(\mathbb{E})_*$ admet une structure canonique de module homotopique.*

2. *Le foncteur $SH(k) \to \Pi_*(k), \mathbb{E} \mapsto \underline{\pi}_0(\mathbb{E})_*$ induit une équivalence de catégories entre le coeur de la t-structure homotopique sur $SH(k)$ et $\Pi_*(k)$.*

Il résulte de ce théorème que la catégorie $\Pi_*(k)$ est abélienne de Grothendieck. De plus, la structure monoïdale sur $SH(k)$ induit une unique structure monoïdale (symétrique fermée) sur $\Pi_*(k)$. Dans ce qui suit, on fera l'abus de considérer un module homotopique comme un objet du coeur de $SH(k)$.

5.2. L'application de Hopf. —

5.2.1. — Reprenons les considérations du paragraphe 3.1.2 pour un spectre en anneaux $\mathbb{E}$ sur k. Soit u l'unité du spectre en anneaux $\mathbb{E}$, vue comme une classe dans la cohomologie réduite $\tilde{E}^{2,1}(\mathbb{P}^1_k)$ de l'espace pointé $(\mathbb{P}^1_k, \infty)$
Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'inclusion $i_n : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^{n+1}_k, [x_i] \mapsto [x_i : 0]$. Tautologiquement, la donnée d'une orientation c sur $\mathbb{E}$ revient à la donnée d'une famille de relèvement de la classe tautologique $u \in \tilde{E}^{2,1}(\mathbb{P}^1_k)$ le long des morphismes :

$$\tilde{E}^{2,1}(\mathbb{P}^1_k) \xleftarrow{\iota_1^*} \tilde{E}^{2,1}(\mathbb{P}^2_k) \xleftarrow{\iota_2^*} \tilde{E}^{2,1}(\mathbb{P}^3_k) \leftarrow \dots$$

Suivant Morel, on définit l'application de Hopf comme le morphisme évident :

$$\eta : (\mathbb{A}^2 - \{0\}) \mapsto \mathbb{P}^1, (x,y) \mapsto [x : y].$$

C'est un morphisme de schémas pointés. Dans la catégorie homotopique stable, il induit un triangle distingué canonique :

$$\Sigma^\infty(\mathbb{A}^2 - \{0\}) \xrightarrow{\eta} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\iota_1} \mathbb{P}^2 \xrightarrow{+1}$$

Ainsi, l'application η est la première obstruction à l'existence d'une orientation de $\mathbb{E}$.

Définition 5.2.2. — On dit qu'un spectre $\mathbb{E}$ sur k est *faiblement orientable* si le morphisme $\eta \wedge 1_{\mathbb{E}}$ est égal à zéro dans $SH(k)$.

On dit qu'un module homotopique est *orientable* si le spectre du coeur de $SH(k)$ qui lui correspond par le théorème 5.1.7 est faiblement orientable.

Évidemment, un spectre orientable est faiblement orientable, mais la réciproque n'est pas vraie. Comme on va le voir dans la section suivante, ce n'est pas le cas pour les modules homotopiques.

5.3. La conjecture de Morel. —

5.3.1. — De manière évidente, on dispose d'un foncteur d'oubli des transferts :

(5.3.1.a) $$\gamma_* : \Pi_*^{tr}(k) := HI_*(k) \to \Pi_*(k).$$

On a pu démontrer le théorème suivant, dont le premier point était conjecturé par Morel :

Theorem 5.3.2. — 1. *(*[**4**, 1.3.4]*) Le foncteur γ_* est pleinement fidèle et son image essentielle est formée des modules homotopiques orientables.*

2. *(*[**4**, 4.1.5]*) Le foncteur γ_* respecte le produit tensoriel*(21) *et son image essentielle est formée des modules homotopiques qui admettent une action du faisceau de K-théorie de Milnor non ramifié $\underline{K}_*^M$ (exemple 4.3.5 de ce mémoire).*

Ainsi, sur les modules homotopiques, les transferts sont une propriété et non une structure. De plus, l'application de Hopf η est l'obstruction à l'existence de transferts – et de manière équivalente, à l'existence d'une orientation sur le spectre associé.

Remarque 5.3.3. — La preuve de ce théorème utilise non seulement le théorème 4.3.4 mais aussi les résultats de l'article [**2**]. C'était d'ailleurs une des motivations de [**2**].

6. Filtration par coniveau et t-structure homotopique

6.1. Complexes motiviques stables. —

6.1.1. — La théorie homotopique stable de Morel et Voevodsky est intimement liée à la théorie des complexes motiviques de Voevodsky. Rappelons les grandes étapes de sa construction :

- *(section 4.2 de* [**3**]*)* On note $Sh^{tr}(k)$ la catégorie des faisceaux avec transferts sur k (*cf.* 4.1.1). On définit suivant Voevodsky un *complexe motivique* comme un complexe de $Sh^{tr}(k)$ dont les faisceaux de cohomologie sont invariants par homotopie. La sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ formée des complexes motiviques est notée $DM^{eff}(k)$.
  Il résulte d'un théorème de Voevodsky que la catégorie $DM^{eff}(k)$ est la localisation de $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ par rapport aux morphismes représentés par les projections canoniques $\mathbb{A}^1_X \to X$ pour X un schéma lisse. On en déduit une catégorie de modèles sous-jacente à $DM^{eff}(k)$ qui a l'avantage d'être monoïdale et de définir le produit tensoriel et le Hom interne dérivés dans $DM^{eff}(k)$ (*cf.* [**5**, ex. 4.12]).
  Tout schéma lisse X représente un objet de $DM^{eff}(k)$ noté $M(X)$. Le foncteur covariant $M : Sm_k^{cor} \to DM^{eff}(k)$ induit un foncteur pleinement fidèle :
  $$DM_{gm}^{eff}(k) \to DM^{eff}(k).$$
- *(section 5.1 de* [**3**]*)* Le point à l'infini de $\mathbb{P}^1_k$ définit un monomorphisme scindé $\mathbb{Z} = M(k) \to M(\mathbb{P}^1_k)$ dont le conoyau est noté $\mathbb{Z}(1)[2]$. Le motif $\mathbb{Z}(1)$ est appelé le *motif de Tate.*
  Comme dans le cas de la catégorie homotopique stable, on peut à partir de la catégorie de modèles monoïdale sous-jacente à $DM^{eff}(k)$ considérer la catégorie de modèle universelle telle que le produit tensoriel par $\mathbb{Z}(1)$ soit inversible. La catégorie homotopique associée est notée $DM(k)$, et appelée la catégorie des *complexes motiviques stables.* (22) De par sa propriété universelle, elle est munie d'un foncteur monoïdal :
  $$\Sigma^\infty : DM^{eff}(k) \to DM(k)$$
  qui fait de $DM(k)$ l'objet initial parmi les catégories homotopiques munies d'un tel foncteur. On déduit alors un foncteur qui est pleinement fidèle d'après la théorie de Voevodsky :
  $$DM_{gm}(k) \to DM(k).$$

---

21. Mais on fera attention qu'il n'est pas monoïdal car il ne préserve pas les objets unités.
22. ou encore spectres motiviques.

Remarque 6.1.2. — La catégorie $DM(k)$ n'avait pas été considérée par Voevodsky. Avec Denis-Charles Cisinski, nous l'avons introduite comme ci-dessus (équipée de sa structure de catégorie de modèles) dans [**5**]. Elle a aussi été indépendamment considérée par Spitzweck dans sa thèse (non publiée) et par Röndigs et Østvaer dans [**RØ08**].

6.1.3. — De par sa définition, la catégorie $DM^{eff}(k)$ porte naturellement une t-structure dont le coeur est formé des faisceaux homotopiques avec transferts $HI(k)$. Dans [**3**, §5.2], j'ai étendu cette t-structure à la catégorie des complexes motiviques stables suivant le modèle établi par Morel pour la théorie homotopique stable. Pour un complexe motivique stable $\mathbb{E}$ dans $DM(k)$ et un couple d'entiers (n, r), on note $\underline{H}^n_r(\mathbb{E})$ le faisceau avec transferts associé au préfaisceau avec transferts :

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{DM(k)}(\Sigma^\infty M(X), \mathbb{E}(r)[r+n]).$$

On peut vérifier que $\underline{H}^n_*(\mathbb{E})$ est alors un module homotopique avec transferts (*cf.* [**3**, par. 5.12]).

La famille de foncteurs $(\underline{H}^n_*)_{n\in\mathbb{Z}}$ est alors conservative sur $DM(k)$. On dit que $\mathbb{E}$ est positif (resp. strictement négatif) si pour tout $n < 0$ (resp. $n \geq 0$), $\underline{H}^n_*(\mathbb{E}) = 0$. On peut vérifier (*cf.* [**3**, cor. 5.14]) que ces notions définissent une t-structure sur $DM(k)$. [23]

Définition 6.1.4. — La t-structure sur $DM(k)$ définie ci-dessus est appelée la t-structure homotopique.

Quasiment par définition, le coeur homotopique de $DM(k)$ est formé des modules homotopiques avec transferts.

6.1.5. — La parenté entre les catégories $SH(k)$ et $DM(k)$ s'explique par la correspondance de Dold-Kan. [24] Celle-ci s'écrit pour nous comme un foncteur canonique :

$$\tilde{\gamma}^* : SH(k) \to DM(k).$$

A partir d'un faisceau simplicial pointé $\mathcal{X}$ sur Sm_k, ce foncteur peut être décrit en trois temps :
- on associe à $\mathcal{X}$ le groupe abélien simplicial $\mathbb{Z}(\mathcal{X})$ engendré par $\mathcal{X}$ modulo la relation identifiant le point base à 0 ;
- on associe au groupe abélien simplicial $\mathbb{Z}(\mathcal{X})$ son complexe normalisé $N(\mathcal{X})$;
- on considère finalement le complexe $\tilde{\gamma}^*(\mathcal{X})$ de faisceaux avec transferts engendré par $N(\mathcal{X})$.

Il est ensuite facile de voir que ce foncteur est compatible aux étapes servant dans la construction des catégories en jeu ($\mathbb{A}^1$-localisation, $\mathbb{P}^1$-stabilisation).

Notons que $\tilde{\gamma}^*$ est en fait l'adjoint à gauche d'une adjonction canonique :

$$\tilde{\gamma}^* : SH(k) \leftrightarrows DM(k) : \tilde{\gamma}_*. \tag{6.1.5.a}$$

Le foncteur $\tilde{\gamma}^*$ est monoïdal et pour tout schéma lisse X, tout couple d'entier $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\tilde{\gamma}^*(\Sigma^\infty X_+(n)[m]) = M(X)(n)[m]$.

On déduit maintenant formellement des définitions 5.1.4 et 6.1.4 que le foncteur $\tilde{\gamma}_*$ est t-exact pour les t-structures homotopiques. Le foncteur induit sur les coeurs n'est rien d'autre que le foncteur (5.3.1.a).

Remarque 6.1.6. — L'adjoint à droite $\tilde{\gamma}_*$ de (6.1.5.a) est très loin d'être plein ou monoïdal, contrairement au foncteur qu'il induit sur le coeur. [25]

6.2. Comparaison de suites spectrales. —

6.2.1. — Considérons un objet $\mathbb{E}$ de $DM(k)$ et un schéma lisse X. Pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$, considérons le module homotopique avec transferts $\underline{H}^q_*(\mathbb{E})$ défini dans le paragraphe 6.1.3. On note $\underline{\hat{H}}^q_*(\mathbb{E})$ le module de cycles qui lui est associé d'après le théorème 4.3.4.

Il existe deux suites spectrales canoniques aboutissant aux groupes de cohomologie

$$H^*(X, \mathbb{E}_0) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), \mathbb{E}[*]) :$$

23. La possibilité d'une telle construction avait été évoquée dans ma thèse ([**Dég02**, §7.3]).

24. Rappelons que, classiquement, celle-ci donne une équivalence de catégories entre groupes abéliens simpliciaux et complexes de groupes abéliens en degrés positifs.

25. La raison essentielle pour cela est l'existence des opérations de Steenrod motiviques construites par Voevodsky.

- ([**3**], *6.3, suite spectrale n° 1)* En considérant la suite des troncations positives pour la t-structure homotopique sur $DM(k)$:
$$\dots \to \tau_{>p-1}(\mathbb{E}) \to \tau_{>p}(\mathbb{E}) \to \dots$$
on obtient une suite spectrale, dite d'*hyper-cohomologie* de la forme :
$$E_{2,t}^{p,q} = H^p(X, \underline{H}_0^q(\mathbb{E})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{E}_0).$$
- ([**3**], *6.3, suite spectrale n° 2)* La filtration par coniveau [26] sur la cohomologie de X est définie pour tout entier $r \geq 0$ par la formule :

$$N^r H^*(X, \mathbb{E}_0) = \bigcup_{Z \subset \mathcal{P}_f^{\geq p}(X)} \operatorname{Ker}\big(H^*(X, \mathbb{E}_0) \to H^*(X - Z, \mathbb{E}_0)\big) \tag{6.2.1.a}$$

où $\mathcal{P}_f^{\geq p}(X)$ désigne l'ensemble des parties fermées de X de codimension supérieure à p. Cette filtration est l'aboutissement d'une suite spectrale :
$$E_{1,c}^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \hat{\underline{H}}^q_{-p}(\mathbb{E})(\kappa_x) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{E}_0)$$
avec les notations de (4.3.1.a). Grâce à la théorie du morphisme de Gysin de [**1**], on peut même calculer explicitement les différentielles de cette suite spectrale [27] :

Theorem 6.2.2 (**[1**, 3.13]**)**. — *Avec les notations précédentes, pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$ le morphisme évident de groupes abéliens gradués :*
$$E_{1,c}^{*,q} \to C^*\big(X, \hat{\underline{H}}^q_{-p}(\mathbb{E})\big)_0$$
est un isomorphisme de complexes.

On déduit donc de ce théorème et du point 4 du théorème 4.3.4 un isomorphisme canonique pour tout couple d'entiers (p, q) :
$$\varphi_2^{p,q} : E_{2,t}^{p,q} \to E_{2,c}^{p,q}.$$

Theorem 6.2.3 (**[3**, 6.4]**)**. — *La famille d'isomorphismes $\varphi_2^{p,q}$ est compatible aux différentielles des deux suites spectrales définies ci-dessus.*

De plus, elle se prolonge en un isomorphisme de suites spectrales :
$$\varphi_*^{p,q} : E_{*,t}^{p,q} \to E_{*,c}^{p,q}.$$

Ce théorème est une version « motivique » de résultats apparaissant dans la littérature auparavant ([**BO74**, 6.4], [**Par96**, 4.4]). Du fait que la suite spectrale $E_{*,t}^{p,q}$ et sa filtration associée sont fonctorielles par rapport au motif $M(X)$. Un corollaire important est la fonctorialité de la filtration par coniveau (6.2.1.a) par rapport à $M(X)$ (*cf.* [**3**, par. 6.5] pour plus de précisions).

Remarque 6.2.4. — Une comparaison de suites spectrales tout à fait analogue à la nôtre à aussi été obtenue dans [**GS99**], à valeur dans la K-théorie. La K-théorie n'est pas représentable par un complexe motivique stable [28] et ce résultat échappe donc au théorème précédent. Toutefois, j'ai obtenu dans [**4**, 4.3.1] la généralisation du calcul du terme E_1 de la filtration par coniveau à coefficients dans un spectre faiblement orientable (définition 5.2.2). En reprenant la construction de la « filtration décalée » de Deligne dans le cadre simplicial, introduite dans [**GS99**], la preuve du théorème précédent se généralise au cas où on remplace le complexe motivique stable $\mathbb{E}$ par un spectre faiblement orienté. On généralise ainsi le théorème de Gillet-Soulé, qui s'applique maintenant, par exemple, au cobordisme algébrique.

26. Rappelons que cette filtration et la suite spectrale dont elle est l'aboutissement ont été introduites pour la première fois par Grothendieck dans [**Gro66**]. Bloch et Ogus ont formalisé ces considérations en travaillant dans une théorie cohomologique abstraite (appelée maintenant « de Bloch-Ogus ») dans [**BO74**]. On leur doit la terminologie « filtration par coniveau ».

27. C'est d'ailleurs la motivation principale de [**1**].

28. En effet, la loi de groupe formel qui lui est associée (voir proposition 2.2.2) est multiplicative ; alors que tout complexe motivique muni d'une structure de monoïde définit un spectre orienté (dans le sens de 3.1.2) dont la loi de groupe formel associée est additive.

Troisième PARTIE
COHOMOLOGIES DE WEIL MIXTES

7. Catégorie $\mathbb{A}^1$-dérivée

7.0.5. — Fixons un schéma noethérien de dimension finie S et un anneau R. On note $\mathcal{V}$ le site Nisnevich des S-schémas affines lisses de type fini.

Suivant Morel, on peut encore faire intervenir une autre catégorie intermédiaire dans l'adjonction (6.1.5.a) : la catégorie d'$\mathbb{A}^1$-homologie. La définition suit fidèlement les étapes qu'on a déjà observées dans le cas de l'homotopie stable et des complexes motiviques stables :

– *(Morel,* [**6**, 1.1.14, 1.2.2]*)* On note $Sh(\mathcal{V}, R)$ la catégorie des faisceaux de R-modules sur $\mathcal{V}$. Si X est un S-schéma lisse, on note $R(X)$ le faisceau de $Sh(\mathcal{V}, R)$ représenté par X.
  On note $\mathrm{D}^{\mathit{eff}}_{\mathbb{A}^1}(S, R)$ la localisation de la catégorie dérivée $\mathrm{D}(Sh(\mathcal{V}, R))$ par rapport aux morphismes $R(\mathbb{A}^1_X) \to R(X)$ induits par la projection canonique, pour X/S lisse. Comme dans les cas précédents, c'est la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles monoïdale (stable) : elle est donc triangulée monoïdale fermée.
– *(Morel,* [**6**, §1.4]*)* On note $R(1)$ le conoyau dans la catégorie des complexes de $Sh(\mathcal{V}, R)$ du monomorphisme scindé $R(S)[-2] \to R(\mathbb{P}^1_S)[-2]$ induit par le point à l'infini. On considère alors la catégorie de modèle monoïdale universelle engendrée par la catégorie de modèles du premier point et telle que $R(1)$ soit inversible. Sa catégorie homotopique est notée $\mathrm{D}^{\mathit{eff}}_{\mathbb{A}^1}(S, R)$: c'est une catégorie triangulée monoïdale fermée munie d'un foncteur dérivé monoïdal canonique [29] :
$$\Sigma^\infty : \mathrm{D}^{\mathit{eff}}_{\mathbb{A}^1}(S, R) \to \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, R)$$
  qui admet un adjoint à droite noté $\mathbf{R}\Omega^\infty$.
  La terminologie n'est pas complètement fixée concernant cette catégorie. Il existe trois solutions : motifs réels (Morel), catégorie $\mathbb{A}^1$-dérivée stable, catégorie homologique stable. J'opte dans ces notes pour la deuxième solution qui me semble la plus économique, outre l'avantage de s'accorder avec « catégorie homotopique stable ».

Remarque 7.0.6. — Les éléments de catégorie de modèles nécessaires à cette définition ont été regroupés dans l'article [**5**] écrit avec D.C. Cisinski.

La rédaction de [**5**] nous permet de traiter de manière universelle les exemples de $\mathbb{A}^1$-*localisation* (premier point ci-dessus) et de $\mathbb{P}^1$-*stabilisation* (deuxième point ci-dessus) d'une catégorie dérivée de Grothendieck équipée d'une structure additionnelle dont la vocation est de jouer le rôle de la catégorie des hyper-recouvrements d'un site. Cette généralité est dictée par le cas des faisceaux avec transferts.

7.0.7. — Considérons les notations du paragraphe ci-dessus.

Le foncteur qui à un R-module M associe le faisceau constant sur Sm_S de valeur R admet pour adjoint à droite le foncteur sections globales Γ. D'après [**6**, 1.2.5], ces foncteurs se dérivent [30] et induisent une adjonction de catégories triangulées :
$$c : \mathrm{D}(R) \leftrightarrows \mathrm{D}(Sh(\mathcal{V}, R)) : \mathbf{R}\Gamma.$$
Notons de plus que c est monoïdal.

On déduit des constructions du paragraphe précédent une adjonction de catégories triangulées :
$$\sigma^* : \mathrm{D}(R) \leftrightarrows \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, R) : \sigma_* \tag{7.0.7.a}$$
où l'on a noté σ^* pour la composée de foncteurs monoïdaux :
$$\mathrm{D}(R) \xrightarrow{c} \mathrm{D}(Sh(\mathcal{V}, R)) \to \mathrm{D}^{\mathit{eff}}_{\mathbb{A}^1}(S, R) \xrightarrow{\Sigma^\infty} \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, R).$$

29. Rappelons que la propriété universelle de la catégorie but est d'être la catégorie homotopique initiale munie d'un foncteur dérivé monoïdal Σ^∞ tel que $\Sigma^\infty R(1)$ est inversible.
30. C'est trivial pour c qui est exact.

Remarque 7.0.8. — On déduit de l'adjonction précédente que $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S,R)$ admet un Hom enrichi : étant donnés deux objets E et F de $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S,R)$, on pose :

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E,F)=\sigma_*\big(\mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)\big), \tag{7.0.8.a}$$

où $\mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ désigne le Hom interne de la catégorie $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S,R)$. [31] On déduit facilement de cette définition que pour tout entier $n\in\mathbb{Z}$, $H^n\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E,F)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S,R)}(E,F[n])$.

Enfin, du fait que ces foncteurs sont définis au niveau des catégories de modèles, on voit qu'on a obtenu un « DG-enrichissement » de $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S,R)$: on peut définir une DG-catégorie dont la catégorie homotopique associée est $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S,R)$.

7.0.9. — Reprenons les notations du paragraphe précédent dans le cas où S est le spectre d'un corps parfait et $R=\mathbb{Z}$. Alors, la catégorie homologique stable s'insère dans le diagramme suivant, où les flèches sont induites par des adjonctions de Quillen :

$$SH(k)\underset{K}{\overset{N}{\rightleftarrows}}\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k,\mathbb{Z})\underset{\gamma_*}{\overset{\gamma^*}{\rightleftarrows}}DM(k). \tag{7.0.9.a}$$

On notera en particulier que ce diagramme factorise le diagramme (6.1.5.a).

8. Théories de Weil mixte

8.1. Définition. —

8.1.1. — Fixons deux corps k et $\mathbf{K}$ l'un supposé parfait et l'autre de caractéristique 0. Comme ci-dessus, on note $\mathcal{V}$ la catégorie des k-schémas affines lisses.

Considérons un complexe E de préfaisceaux sur $\mathcal{V}$ en $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une paire fermée (X,Z) sur k (1.2.1) sera dite affine si X et $X-Z$ sont affines. On associe alors à (X,Z) des groupes de cohomologies, fonctoriels en (X,Z) :

$$H^n_Z(X,E)=H^{n-1}\big(Cone(E(X)\to E(X-Z))\big),n\in\mathbb{Z}.$$

Supposons que E est de plus un préfaisceau de $\mathbf{K}$-algèbres différentielles graduées commutatives (autrement dit, il est muni d'une structure de monoïde commutatif dans la catégorie des complexes de préfaisceaux). Alors, pour tout couple de schémas affines lisses X et Y et tout entier $n\in\mathbb{Z}$, on définit suivant la formule usuelle un produit extérieur :

$$\bigoplus_{p+q=n}H^p(X,E)\otimes_{\mathbf{K}}H^q(Y,E)\to H^n(X\times_k Y,E). \tag{8.1.1.a}$$

Considérant $H^*(.,E)$ comme une théorie cohomologique, on peut introduire l'analogue des axiomes d'Eilenberg-Steenrod en géométrie algébrique :

Définition 8.1.2 **([6, 2.1.4]).** — Considérons les notations ci-dessus. On dit que E est une *théorie de Weil mixte* sur k à coefficients dans $\mathbf{K}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

(W1) *Dimension.*— $\dim_{\mathbf{K}}H^i(k,E)=\begin{cases}1 & \text{si } i=0,\\ 0 & \text{sinon};\end{cases}$

(W1') *Homotopie.*— $\dim_{\mathbf{K}}H^i(\mathbb{A}^1_k,E)=\begin{cases}1 & \text{si } i=0,\\ 0 & \text{sinon};\end{cases}$

(W2) *Stabilité.*— $\dim_{\mathbf{K}}H^i(\mathbb{G}_m,E)=\begin{cases}1 & \text{si } i=0 \text{ ou } i=1,\\ 0 & \text{sinon};\end{cases}$

(W2') *Excision.*— Pour tout morphisme excisif $(f,g):(Y,T)\to(X,Z)$ de paires fermées affines, le morphisme induit $(f,g)^*:H^*_Z(X,E)\to H^*_T(Y,E)$.

(W3) *Formule de Künneth.*— Pour tous schémas affines lisses X et Y et tout entier $n\in\mathbb{Z}$, le morphisme (8.1.1.a) est un isomorphisme.

---

31. C'est la formule de [**6**, (1.4.10.3)] où l'on a noté ici σ_* le foncteur $\mathbf{R}\Gamma\circ\mathbf{R}\Omega^\infty$ de *loc. cit.*

Exemple 8.1.3. — On a pu montrer dans [**6**] que chacune des théories cohomologiques de Weil classiques s'étend naturellement en une théorie de Weil mixte : cohomologie de De Rham en caractéristique 0, cohomologie étale géométrique l-adique, cohomologie cristalline en caractéristique p. Dans le cas de la cohomologie cristalline, l'extension est la cohomologie rigide définie par P. Berthelot.

8.2. Représentabilité de Brown. —

8.2.1. — Considérons une théorie de Weil mixte E comme dans la définition précédente. Les axiomes (W1') et (W2') impliquent que le complexe de faisceaux E_{Nis} associé à E définit un objet de $\mathrm{D}^{\mathit{eff}}_{\mathbb{A}^1}(k,\mathbf{K})$ tel que pour tout schéma affine lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathit{eff}}_{\mathbb{A}^1}(k,\mathbf{K})}(\mathbf{K}(X), E_{\mathrm{Nis}}[n]) = H^n(X,E).$$

La théorie cohomologique $H^*(.,E)$ est ainsi prolongée de manière canonique aux schémas lisses non nécessairement affines.

D'après l'axiome (W2), le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $H^1(\mathbb{G}_m,E)$ est inversible. Pour tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel V et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$V(n) = V \otimes_{\mathbf{K}} H^1(\mathbb{G}_m,E)^{\otimes_{\mathbf{K}},-n}.$$

L'intérêt des axiomes précédents est de fournir un analogue du théorème de représentabilité de Brown en géométrie algébrique. Appliquant la terminologie de la définition 3.2.2 à la catégorie $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k,\mathrm{K})$ et à sa catégorie de modèles monoïdale sous-jacente, on obtient le théorème suivant :

Proposition 8.2.2 **([6, 2.1.6]).** — *Il existe un spectre en anneaux strict $\mathcal{E}$ dans $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k,\mathbf{K})$ tel que pour tout schéma lisse X et tout couple d'entiers (n,m),*

$$H^n(X,E)(m) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k,\mathbf{K})}\big(\Sigma^\infty\mathbf{K}(X), \mathcal{E}(m)[n]\big). \tag{8.2.2.a}$$

Remarque 8.2.3. —
1. Le foncteur K du diagramme (7.0.9.a) permet de voir $\mathcal{E}$ comme un spectre en anneaux stricts dans $SH(k)\otimes\mathbf{K}$; il représente la théorie cohomologique $H^*(.,E)$.
2. L'identification (8.2.2.a) n'apparaît pas dans la formulation de [**6**, 2.1.6]. Elle résulte toutefois de l'identification qui est donnée dans *loc. cit.* jointe à (W3). Notons par ailleurs que la proposition *loc. cit.* est plus générale que celle qu'on présente ici : elle montre comment se passer de (W3).

8.2.4. — Comme dans le paragraphe 3.2.3, on peut considérer les modules au sens strict sur le spectre en anneaux stricts $\mathcal{E}$ – la catégorie de modèles monoïdale sous-jacente à $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k,\mathbf{K})$ joue ici le rôle de celle de $SH(k)$. On note $\mathcal{E}-mod$ la catégorie homotopique correspondante, qui est triangulée monoïdale. (32) On dispose d'une adjonction de catégories triangulées

$$L_{\mathcal{E}} : \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k,\mathbf{K}) \leftrightarrows \mathcal{E}-mod : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \tag{8.2.4.a}$$

telle que $L_{\mathcal{E}}$ est monoïdal. Pour tout schéma lisse X, on pose $\mathcal{E}(X) = L_{\mathcal{E}}(\mathbf{K}(X))$.

8.3. Orientation et dualité. —

8.3.1. — Reprenons les notations du paragraphe 8.2.4.

Un des points clés de la théorie (voir [**6**, 2.2.6]) est que le spectre en anneaux $\mathcal{E}$ est alors muni d'une orientation canonique (au sens de 3.1.2). Il en résulte que la catégorie $\mathcal{E}$*–mod* des $\mathcal{E}$-modules (stricts) vérifie les axiomes de [**2**, 2.1] décrits dans le paragraphe 2.1.1 de ce mémoire.

On en déduit ainsi que la théorie cohomologique $H^*(.,E)$ est munie de classes de Chern et des structures du théorème 3.3.2.

Par ailleurs, pour tout schéma projectif lisse X, $\mathcal{E}(X)$ admet un dual fort (*cf.* remarque 2.4.2). On obtient de plus le résultat suivant :

Proposition 8.3.2 **([6, 2.7.11]).** — *Soit M un $\mathcal{E}$-module (strict). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

32. Pour la construction de cette catégorie, on peut se référer au procédé général de 3.2.3, ou plus directement dans notre cas à [**6**, 1.5.2].

(i) *M est compact.* [33]

(ii) *M appartient à $\langle \mathcal{E}(X), X/k$ lisse$\rangle$.*

(ii') *M appartient à $\langle \mathcal{E}(X), X/k$ projectif lisse$\rangle$.*

(iii) *M est fortement dualisable.*

Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de $\mathcal{E}-mod$, on a noté $\langle M_i, i \in I\rangle$ la plus petite sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathcal{E}-mod$ contenant les objets M_i.

Remarque 8.3.3. — Par un argument classique (*cf.* [**Rio05**], preuve du théorème 1.4), ce théorème résulte des faits suivants :
- La famille $(\mathcal{E}(X), X/k$ lisse$)$ forme un système de générateurs compacts de $\mathcal{E}-mod$.
- Pour X projectif lisse, $\mathcal{E}(X)$ est fortement dualisable.
- La catégorie $\mathcal{E}-mod$ est $\mathbb{Q}$-linéaire. [34]

9. Réalisation

9.1. Théorème de basculement. —

9.1.1. — Reprenons les notations du paragraphe 8.2.4. En composant l'adjonction (7.0.7.a) et l'adjontion (8.2.4.a), on obtient l'adjonction :

(9.1.1.a) $$\sigma^*_{\mathcal{E}} : \mathrm{D}(\mathbf{K}) \leftrightarrows \mathcal{E}-mod : \sigma^{\mathcal{E}}_*.$$

On en déduit comme dans la remarque 7.0.8 un Hom enrichi en complexes pour la catégorie $\mathcal{E}-mod$: pour deux $\mathcal{E}$-modules M et N :

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(M,N) = \sigma^{\mathcal{E}}_*\big(\mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{E}}(M,N)\big).$$

Notons qu'à l'aide de cette définition, on peut exprimer le foncteur $\sigma^{\mathcal{E}}_*$ évalué en un $\mathcal{E}$-module M :

(9.1.1.b) $$\sigma^{\mathcal{E}}_*(M) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M).$$

On appelle ce foncteur la *réalisation homologique* associée à la théorie de Weil mixte E. En effet, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}[n], M)$$

est l'homologie de M en degré n. Le théorème suivant est fondamental :

***Theorem 9.1.2* (*basculement*, [6, 2.6.2]).** — *Le foncteur de réalisation homologique défini par la formule* (9.1.1.b) *(et donc aussi l'adjoint à gauche de* (9.1.1.a)*) est une équivalence de catégories triangulées monoïdales.*

Remarque 9.1.3. — Dans l'énoncé ci-dessus, on a utilisé la proposition 8.3.2 pour simplifier la formulation de *loc. cit.*

Il résulte du théorème précédent que si M est un $\mathcal{E}$-module fortement dualisable, le complexe de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(M,\mathcal{E}) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M^\vee)$ est parfait. La proposition 8.3.2 implique donc :

***Corollaire 9.1.4* (*finitude*, [6, §2.6.3]).** — *Pour tout schéma lisse X, le $\mathbf{K}$-espace vectoriel gradué $H^*(X,E)$ est de type fini.*

9.1.5. — Soit X un schéma lisse séparé de dimension d. D'après la proposition 8.3.2, $\mathcal{E}(X)$ est fortement dualisable. On pose $\mathcal{E}(X)^\vee = \mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}(X), \mathcal{E})$.

Appliquant le théorème précédent à l'accouplement de dualité $\mathcal{E}(X) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(X)^\vee \to \mathcal{E}$ et le fait que $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(M,\mathcal{E}) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M^\vee)$, on en déduit un accouplement parfait de complexes de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels :

(9.1.5.a) $$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}(X)^\vee, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}(X), \mathcal{E}) \to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \mathbf{K}.$$

On en déduit formellement le théorème suivant :

---

33. *i.e.* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, .)$ commute aux sommes infinies.

34. Ce fait est inutile si on utilise la résolution des singularités au lieu du théorème de De Jong.

Theorem 9.1.6 (**dualité**, [**6**, 2.7.11]). — *Considérons un schéma lisse séparé de dimension d.*

1. *Si X est projectif, l'accouplement* (9.1.5.a) *induit pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$ un accouplement parfait :*
$$H^q(X,E) \otimes_{\mathbf{K}} H^{2d-q}(X,E)(d) \longrightarrow \mathbf{K}.$$
2. *Soit $q \in \mathbb{Z}$ un entier. On pose : $H^q_c(X,E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}(X)^\vee(d)[2d], \mathcal{E}[q])$.*
Alors, l'accouplement (9.1.5.a) *induit un accouplement parfait :*
$$H^q_c(X,E) \otimes_{\mathbf{K}} H^{2d-q}(X,E)(d) \longrightarrow \mathbf{K}.$$

Remarque 9.1.7. — L'accouplement de dualité du premier point peut-être décrit par la formule classique : si $p : X \to k$ désigne la projection canonique, le morphisme de Gysin associé à p induit un *morphisme trace* :
$$p_* : H^{2d}(X,E)(d) \to H^0(X,E) = \mathbf{K}.$$
L'accouplement du point 1 s'écrit : $\langle x, y\rangle = p_*(x.y)$.

Notons que le théorème 8.3.2 montre un résultat très fort concernant la catégorie $\mathcal{E}-mod$: elle est engendrée par son objet unité, $\mathcal{E}$. C'est essentiellement la raison du théorème d'unicité suivant :

Theorem 9.1.8 (**comparaison**, [**6**, 2.6.5]). — *Soit E (resp. E') deux théories de Weil mixte, $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) le spectre en anneau associé. Pour tout morphisme de préfaisceaux $\phi : E \to E'$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *ϕ est un quasi-isomorphisme localement pour la topologie de Nisnevich.*

(ii) *Le morphisme induit $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k, \mathbf{K})$.*

(ii') *Le foncteur induit $\mathcal{E}-mod \to \mathcal{E}'-mod$ est une équivalence de catégories.*

(iii) *L'application induite $H^1(\mathbb{G}_m, E) \to H^1(\mathbb{G}_m, E')$ est non nulle.*

9.2. Réalisation triangulée des motifs. —

9.2.1. — Reprenons les notations du paragraphe 8.2.4.

L'adjonction (7.0.9.a) donne en particulier un foncteur monoïdal canonique
$$\gamma^* : \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k, \mathbf{K}) \to DM(k, \mathbf{K})$$
où la catégorie cible est la catégorie des complexes motiviques instables $\mathbf{K}$-rationnelle.

Par ailleurs, le théorème de basculement 9.1.2 permet de définir un foncteur triangulé monoïdal :
$$R'_{\mathcal{E}} : \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k, \mathbf{K}) \xrightarrow{L_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}-mod \xrightarrow{\sigma^{\mathcal{E}}_*} D(\mathbf{K}).$$
C'est la réalisation (covariante) de la catégorie homologique stable.

Principalement du fait que $\mathcal{E}$ est un spectre en anneaux orientable $\mathbf{K}$-linéaire, on peut déduire la réalisation plus intéressante suivante :

Theorem 9.2.2 (**réalisation**, [**6**, 2.7.14]). — *Le foncteur de réalisation $R'_{\mathcal{E}}$ introduit ci-dessus se factorise via γ en un foncteur triangulé monoïdal $R_{\mathcal{E}}$ suivant le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k, \mathbf{K}) \arrow[rr, "R'_{\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "\gamma^*"'] & & D(\mathbf{K}). \\
& DM(k, \mathbf{K}) \arrow[ur, "R_{\mathcal{E}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $R_{\mathcal{E}}$ induit un unique foncteur triangulé monoïdal :
$$DM_{gm}(k) \otimes \mathbf{K} \to D^b(\mathbf{K})$$
où $DM_{gm}(k)$ est la catégorie des motifs géométriques (voir 1.4.1) tel que pour tout schéma lisse X,
$$R_{\mathcal{E}}(M(X))^\vee = E(X).$$

Ce théorème donne en particulier des classes de cycles en cohomologie et un même un régulateur. Autrement dit, pour tout schéma lisse X et tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, on obtient un morphisme

$$H^{n,m}_{\mathcal{M}}(X) \to H^n(X, E)(m)$$

compatible à l'image inverse, aux produits et à l'image directe.

Remarque 9.2.3. — La formulation que l'on a choisie ici diffère un peu de celle de l'article cité, où l'on définit le foncteur $R_{\mathcal{E}}$ directement. Il n'est pas difficile de voir que le foncteur de *loc. cit.* satisfait effectivement la propriété énoncée ci-dessus.

On expose deux méthodes pour la preuve du théorème 2.7.14. La première consiste à voir que le spectre en anneaux $\mathcal{E}$ est de manière unique une algèbre sur le spectre en anneaux représentant la cohomologie motivique. La deuxième ([**6**, §2.7.16]) utilise le théorème de Morel qui identifie la catégorie $DM(k, \mathbf{K})$ comme la « partie + » de la catégorie $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k, \mathbf{K})$ (celle sur laquelle l'application de Hopf η agit trivialement) – voir à ce propos le théorème 13.4.2.

Quatrième PARTIE
FORMALISME DES SIX FONCTEURS ET MOTIFS MIXTES

10. Cycles relatifs

On fixe un anneau de coefficients $\Lambda \subset \mathbb{Q}$.

La théorie présentée dans cette section est une interprétation et une réécriture des idées de Suslin et Voevodsky dans [**FSV00**, chap. 2]. Nous ne prétendons pas à beaucoup d'originalité mais donnons de la souplesse à la théorie ainsi que quelques compléments.

10.1. Catégorie des cycles. — Les notions qui suivent ont été introduites dans [**7**, §7.1].

Définition 10.1.1. —
1. Un Λ-*cycle* est un couple (X, α) où X est un schéma et α est une combinaison R-linéaire de points de X.
   Un point générique de (X, α) est un point de X apparaissant avec un coefficient non nul dans α. Le *support* de (X, α) est l'adhérence réduite de ses points génériques.
   Par abus, on note α le cycle (X, α) et on appelle X le *domaine* de α.
2. Un morphisme de Λ-cycles $\phi : (Y, \beta) \to (X, \alpha)$ est un morphisme de schémas $f : Y \to X$ tel que $f(\mathrm{Supp}(\beta)) \subset \mathrm{Supp}(\alpha)$.
   On dit encore que f est le *domaine* de ϕ. Si $\mathcal{P}$ est une propriété des morphismes de schémas, on dit que ϕ vérifie $\mathcal{P}$ si le morphisme $\mathrm{Supp}(\beta) \to \mathrm{Supp}(\alpha)$ induit par f vérifie $\mathcal{P}$.

On a ainsi défini une catégorie dont les objets sont les Λ-cycles. Dans la suite de cette section, les cycles considérés sans précision sont supposés à coefficients dans Λ.

Remarque 10.1.2. — La définition précédente est à comparer avec la notion d'espace pointé. Ainsi, un cycle (X, α) est un schéma X multi-pointé, chaque point étant de plus affecté d'une multiplicité.

Exemple 10.1.3. —
1. Si X est un schéma, on notera $\langle X \rangle$ le cycle fondamental associé à X, avec pour domaine X. Lorsque le contexte est clair, on omet les crochets.
   Si Z est un sous-schéma (non nécessairement fermé) de X, on note $\langle Z \rangle_X$ le cycle fondamental associé à Z considéré comme un cycle de domaine X.
   Un cycles α sur X est un morphisme de cycles : $\alpha \to X$.
2. Si $f : X \to Y$ est un morphisme, et $\alpha = \sum_i n_i.x_i$ un cycle ayant pour domaine X, on note $f_*(\alpha)$ l'image directe de α au sens habituel, vu comme un cycle ayant pour domaine α.
   Si $f_*(\alpha) \neq 0$, on dispose d'un morphisme de cycles $\alpha \to f_*(\alpha)$.

Définition 10.1.4 ([**7**, Def. 7.1.18]). — Considérons deux cycles :

$$(S, \alpha = \sum_{i \in I} n_i.s_i),\ (X, \beta = \sum_{j \in J} m_j.x_j).$$

On dit qu'un morphisme $f : \beta \to \alpha$ est ***pré-spécial*** si :

1. f est de type fini.
2. Pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $f(x_j) = s_i$ et n_i divise m_j dans Λ.

Soit S_0 le support de α. On définit la réduction de β/α comme le cycle ayant pour domaine X suivant :

$$\beta_0 = \sum_{j \in J, f(x_j) = s_i} \frac{m_j}{n_i}.x_j.$$

Exemple 10.1.5. — Soit $f : X \to S$ un morphisme plat de schémas. Alors le morphisme induit $f : \langle X \rangle \to \langle S \rangle$ est pré-spécial. Si S_0 désigne le schéma réduit associé à S, la réduction de f est le cycle $\langle X \times_S S_0 \rangle_X$.

Remarque 10.1.6. — C'est non seulement l'exemple précédent mais aussi un problème dans les conventions de [**FSV00**, chap. 2] qui a motivé la définition précédente. Notons pour préciser cela que le corollaire 3.2.4 de *loc. cit.* peut être faux si le schéma de base S n'est pas réduit. Avec les notations de *loc.cit.* on obtient facilement un contre-exemple à ce corollaire comme suit :
On considère R est un anneau de valuation discrète de corps résiduel k. On pose $S = \mathrm{Spec}(R[t]/(t^2))$ et on considère le « fat point » sur S :

$$\mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{x_0} \mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{x_1} S$$

où x_1 est l'immersion (dominante) évidente venant du fait $S_{red} = \mathrm{Spec}(R)$.

Alors, dans le cas où $X = Z = S$, on obtient suivant les définitions de *loc.cit.* :

– $(x_0, x_1)^*(\mathrm{cycl}_X(Z)) = 2.\mathrm{Spec}(k)$.
– $\mathrm{cycl}_{X \times_S \mathrm{Spec}(k)}(Z \times_S \mathrm{Spec}(k)) = \mathrm{Spec}(k)$.

Il est facile de voir comment corriger ce problème, par exemple en se limitant aux schémas réduits. Notre formulation de la théorie propose une solution différente (voir notamment la définition 10.1.9 ci-dessous).

Définition 10.1.7. — Un *point épais* sur un cycle α est une suite de morphismes :

$$\mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{s} \mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{\tau} \alpha$$

où k est un corps, R un anneau de valuation discrète, l'image de s est le point fermé de $\mathrm{Spec}(R)$ et τ est un morphisme de cycles qui envoie le point générique de $\mathrm{Spec}(R)$ sur un point générique de α.

10.1.8. — Considérons un cycle α de support S et un point épais (R, k) comme ci-dessus. Notons K le corps des fractions de R.

Par définition, K est une extension du corps résiduel F d'un point générique η de S, et R est une F-algèbre.

Considérons un morphisme pré-spécial $f : (X, \beta) \to \alpha$ et $\beta_0 = \sum_{i \in I} n_i.x_i$ sa réduction. Notons que X est un S-schéma. On pose $X_R = X \times_S \mathrm{Spec}(R)$ et $X_k = X \times_S \mathrm{Spec}(k)$.

On pose $I' = \{i \in I \mid f(x_i) = \eta\}$. Pour tout $i \in I'$, le corps résiduel κ_i de x_i dans X est donc une extension de F. On note alors A_i l'image du morphisme d'anneaux évident :

$$(\kappa_i \otimes_F R) \to (\kappa_i \otimes_F K).$$

Notons que A_i est une R-algèbre sans torsion. De plus, le diagramme canonique de schémas :

$$\mathrm{Spec}(\kappa_i \otimes_F K) \to \mathrm{Spec}(A_i) \to \mathrm{Spec}(\kappa_i \otimes_F R) \tag{10.1.8.a}$$

permet de voir $\mathrm{Spec}(A_i)$ comme l'adhérence schématique du schéma source dans le schéma but. C'est donc un sous-schéma de X_R.

Définition 10.1.9 **([7, Def. 7.1.25]).** — Considérons les notations qui précèdent.

On définit la *spécialisation* de β/α au point épais (R, k) comme le cycle de X_k suivant :

$$\beta_{R,k} := \sum_{i \in I'} n_i.\langle \mathrm{Spec}(A_i \otimes_R k) \rangle_{X_k}.$$

Remarque 10.1.10. — Si $\alpha = \langle S \rangle$ et S est réduit, la définition précédente coïncide avec celle de [**FSV00**, chap. 2, 3.1.3] – compte tenu de (10.1.8.a).

On introduit finalement la notion fondamentale :

Définition 10.1.11 **([7, def. 7.1.26]).** — Un morphisme de cycles $f : \beta \to \alpha$ est *spécial* si il est pré-spécial et pour tout couple de points épais :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}(R) \arrow[dr] & \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \alpha \\ & \mathrm{Spec}(R') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

on a : $\beta_{R,k} = \beta_{R',k}$.

Précisons tout de suite que le premier intérêt de cette notion est qu'elle est *stable par composition* (voir [7, 7.2.6]). (35)

Remarque 10.1.12. — Un autre intérêt de la notion précédente est qu'elle se localise : pour un cycle β sur S, on peut définir la propriété d'être spécial en un point de S. On n'entrera pas dans ces détails dans le mémoire, mais ces considérations permettent d'énoncer un résultat de *constructibilité* pour la propriété d'être spécial concernant un cycle – on renvoie le lecteur intéressé à [7, §7.3.a].

10.2. Produit extérieur de cycles. — Grâce à la notion de morphisme spécial, on a pu définir suivant la méthode de Suslin et Voevodsky un *produit extérieur* de cycles dans le contexte suivant :

Theorem 10.2.1 **([7, Th. 7.1.36]).** — *On considère des morphismes de cycles :*

$$\begin{tikzcd} & (X, \beta) \arrow[d, "f"] \\ (S', \alpha') \arrow[r] & (S, \alpha) \end{tikzcd}$$

tel que f est spécial. Soit n le pgcd des caractéristiques résiduelles des points génériques de α'.

Alors, il existe un unique $\Lambda[1/n]$-cycles $\beta \otimes_\alpha \alpha'$ s'insérant dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \beta \otimes_\alpha \alpha' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & \beta \arrow[d, "f"] \\ \alpha' \arrow[r] & \alpha \end{tikzcd}$$

dont le domaine est le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} X \times_S S' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

et tel que :

– *f' est pré-spécial.*

35. Ce fait ne pouvait pas être exprimé directement dans la formulation de Suslin et Voevodsky.

– *Pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(E) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(R) \arrow[d] \\ & \alpha' \arrow[r] & \alpha \end{tikzcd}$$

tel que (R, E) et (R', E) sont des points épais sur α et α', alors :

$$(\beta \otimes_\alpha \alpha')_{R',E} = \beta \otimes_{R,E} .$$

Notons que la deuxième condition implique que $\beta \otimes_\alpha \alpha'/\alpha$ est en fait spécial.

Exemple 10.2.2. — Considérons un morphisme plat de schémas $f : X \to S$. Alors, $\langle X\rangle \to \langle S\rangle$ est spécial et pour tout morphisme de schémas $S' \to S$, on a $\langle X\rangle \otimes_S \langle S'\rangle = \langle X \times_S S'\rangle$.

Définition 10.2.3 ([**7**, Def. 7.1.37]). — Sous les conditions du théorème précédent, on appelle $\beta \otimes_\alpha \alpha'$ le *produit extérieur* de β/α par α'.

De plus, on dit que β/α est Λ-*universel* si pour tout $\alpha' \to \alpha$, les coefficients du cycle $\beta \otimes_\alpha \alpha'$ appartiennent à Λ.

On a pu vérifier un grand nombre de propriétés de ce produit extérieur : commutativité (Cor. 7.2.3), associativité (Cor. 7.2.7), formules de projection (Prop. 7.2.8 et Cor. 7.2.10).

Ces formules sont des extensions relativement faciles du travail de Suslin et Voevodsky à notre cadre. La propriété suivante est par contre nouvelle, et c'est l'une de nos motivations :

Proposition 10.2.4 ([**7**, Prop. 7.3.9]). — *Soit S un schéma (noethérien) limite projective d'un système projectif $(S_i)_{i\in I}$ de schémas tel que $S \to S_i$ soit dominant. Soit $(X_i)_{i\in I}$ un système projectif de schémas au-dessus de $(S_i)_{i\in I}$, X/S sa limite projective supposée de type fini.*

Soit (X, α) un cycle spécial (resp. Λ-universel) sur S. Alors, il existe $i \in I$ et un cycle (X_i, α_i) spécial (resp. Λ-universel) sur S_i tels que $\alpha = \alpha_i \otimes_{S_i} S$.

Rappelons finalement la proposition suivante, formulée dans notre contexte mais due à Suslin et Voevodsky :

Theorem 10.2.5. — *Soit α un cycle pré-spécial sur un schéma réduit S dont le support est équidimensionnel sur S.*

1. *Si S est géométriquement unibranche,* [36] *alors α est spécial sur S.*
2. *Si S est régulier, alors α est Λ-universel sur S.*

Pour une démonstration de cette proposition dans notre contexte, on renvoie le lecteur à [**7**, 7.3.26, 7.3.27]. Notons en particulier qu'on obtient des résultats plus précis que ceux de Suslin et Voevodsky, et notamment une caractérisation de la condition d'être spécial pour un cycle sur S à l'aide de la notion de multiplicité de Samuel (*cf.* [**7**, cor. 7.3.24]). Cette caractérisation explique clairement pourquoi l'hypothèse que S est géométriquement unibranche apparaît dans le théorème précédent.

Remarque 10.2.6. — Comme dans la théorie de l'intersection générale, le produit extérieur $\beta \otimes_\alpha \alpha'$ s'exprime encore par l'existence de multiplicité d'intersections, dites *de Suslin-Voevodsky*, ayant de bonnes propriétés. [37] On a montré comment exprimer ces multiplicités dans tous les cas en termes de *multiplicité de Samuel* – voir à nouveau [**7**, Cor. 7.3.25]. Dans le cas d'un schéma régulier, Suslin et Voevodsky avaient encore obtenu l'expression de ces multiplicités par une formule des Tor – voir [**7**, Th. 7.3.30].

36. *i.e.* pour tout point géométrique $\bar{s}$ de S, l'hensélisé strict de S en $\bar{s}$ est intègre.
37. Voir plus précisément [**7**, Def. 7.1.40].

10.3. Degré des morphismes finis spéciaux. —

10.3.1. — Soit $f : X' \to X$ un morphisme fini équidimensionnel. [38]

Pour tout point générique $x \in X$, on définit le *degré* de f au-dessus de x :

$$\deg_x(f) = \sum_{x'/x} [\kappa_{x'} : \kappa_x]$$

où la somme parcourt l'ensemble des points génériques de X' au-dessus de x.

Proposition 10.3.2. — *Si f est fini spécial et X est connexe, alors il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout point générique $x \in X$, $\deg_x(f) = d$.*

Définition 10.3.3. — Sous les conditions de la proposition précédente, on appelle d le *degré* de f.

Cette définition montre bien l'intérêt de dégager le fait d'être spécial pour un morphisme (de schémas ou de cycles). Comme on le verra plus loin, la notion de morphisme fini spécial semble être assez optimale pour obtenir une *formule du degré* – cette notion couvre en particulier le cas des morphismes finis et plats considéré habituellement.

11. Motifs de Voevodsky

11.1. Correspondances finies. —

Définition 11.1.1 **([7**, def. 8.1.2**]).** — Soit S un schéma de base.

Pour tous S-schémas séparés X et Y, on définit le groupe $c_S(X,Y)$ des S-correspondances finies de X vers Y comme les cycles $(X \times_S Y, \alpha)$ tels que α est fini et $\mathbb{Z}$-universel sur X.

On note un élément α de $c_S(X,Y)$ par le symbole $X \bullet\!\xrightarrow{\alpha} Y$.

11.1.2. — La composition des S-correspondances finies se définit aisément, grâce à la notion de produit extérieur : pour $X \bullet\!\xrightarrow{\alpha} Y \bullet\!\xrightarrow{\beta} Z$, on note $p : X \times_S Y \times_S Z \to X \times_S Z$ la projection évidente et on pose ([**7**, Def. 8.1.5]) :

$$\beta \circ \alpha = p_*(\beta \otimes_{\langle Y \rangle} \alpha).$$

Les propriétés élémentaires des S-correspondances finies se démontrent bien plus facilement que dans le cas classique grâce à la notion de produit extérieur. On renvoie le lecteur à la section 8 de *loc. cit.* pour plus de détails.

Définition 11.1.3. — On note Sm_S^{cor} la catégorie dont les objets sont les S-schémas lisses séparés et les morphismes sont formés par les S-correspondances finies.

On note $[X]$ les objets de Sm_S^{cor}. Cette catégorie est non seulement additive, mais aussi monoïdale. On note $\otimes_S^{tr}$ son produit tensoriel. Le graphe d'un morphisme permet de définir un foncteur :

$$\gamma : Sm_S \to Sm_S^{cor}$$

qui est monoïdal (pour le produit cartésien sur Sm_S).

Exemple 11.1.4. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini $\mathbb{Z}$-universel entre S-schémas lisses. Alors, le graphe de f, vu comme un cycle de $Y \times_S X$, définit une S-correspondance finie $({}^tf) \in c_S(Y,X)$ appelée la *transposée* de f.

On peut vérifier facilement que le morphisme ${}^tf$ vérifie les propriétés formelles du morphisme de Gysin. On en déduit ainsi facilement, suivant le modèle de l'accouplement (1.4.6.a), la proposition suivante :

38. Il revient au même de demander que f soit fini et tout point générique de X' s'envoie sur un point générique de X.

Proposition 11.1.5. — *Soit $p : X \to S$ morphisme étale fini, $\delta : X \to X \times_S X$ le morphisme diagonal. Alors, les morphismes suivants :*

$$\text{(11.1.5.a)} \qquad \begin{cases} \eta : [S] \xrightarrow{{}^t p} [X] \xrightarrow{\delta} [X] \otimes_S^{tr} [X] \\ \mu : [X] \otimes_S^{tr} [X] \xrightarrow{{}^t \delta} [X] \xrightarrow{p} [S] \end{cases}$$

définissent un accouplement d'auto-dualité forte de l'objet $[X]$ dans Sm_S^{cor}.

Notons aussi qu'on obtient une formule du degré :

Proposition 11.1.6 (**[7**, 8.1.11]). — *Soient X, X' des S-schémas lisses tel que X est connexe. Soit $f : X' \to X$ un morphisme fini $\mathbb{Z}$-universel de degré d (définition 10.3.3).*
Alors, $f \circ {}^t f = d.1_{[X]}$.

Remarque 11.1.7. — On n'a présenté dans ce mémoire qu'un cas particulier de la construction donnée dans *loc. cit.* Ainsi, on peut considérer un anneau de coefficients $\Lambda \subset \mathbb{Q}$ quelconque pour les correspondances finies, et on peut aussi considérer des S-schémas séparés éventuellement singuliers.

11.2. Complexes motiviques stables. —

11.2.1. — Soit S un schéma de base. À partir de la catégorie Sm_S^{cor}, on peut construire sur le modèle du cas d'un corps (paragraphe 6.1.1), la catégorie des complexes motiviques stables :
- ([**7**, def. 9.4.2]) On définit la catégorie $Sh^{tr}(S)$ des faisceaux avec transferts sur S comme les préfaisceaux additifs $F : (Sm_S^{cor})^{op} \to \mathscr{A}b$ tels que $F \circ \gamma$ est un faisceau Nisnevich sur Sm_S. Cette catégorie est abélienne de Grothendieck et monoïdale fermée.
- ([**7**, def. 10.1]) On considère la $\mathbb{A}^1$-localisation de la catégorie dérivée $\mathrm{D}(Sh^{tr}(S))$: c'est une catégorie triangulée monoïdale fermée, notée $DM^{eff}(S)$. On note $\mathbb{Z}_S^{tr}$ son objet unité. Comme dans le cas d'un corps, cette catégorie est encore la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles explicite. (39)
- ([**7**, def. 10.1]) On considère la $\mathbb{P}^1$-*stabilisation* de la catégorie $DM^{eff}(S)$: c'est une catégorie triangulée monoïdale fermée notée $DM(S)$ munie d'une adjonction de catégories triangulées :
$$\Sigma^\infty : DM^{eff}(S) \leftrightarrows DM(S) : \Omega^\infty$$
telle que Σ^∞ est monoïdal et $\Sigma^\infty(\mathbb{Z}_S^{tr}(1))$ est $\otimes$-inversible – $\mathbb{Z}_S^{tr}(1)$ désigne le motif de Tate habituel. On note simplement $\mathbb{1}_S$ l'objet unité de $DM(S)$ (égal à $\Sigma^\infty\mathbb{Z}_S^{tr}$).

11.2.2. — La catégorie $DM(S)$ partage des propriétés analogue à son homologue dans le cas d'un corps. Tout S-schéma lisse X représente un motif $M_S(X)$ dans $DM(S)$ et on a la relation : $M_S(X) \otimes M_S(Y) = M_S(X \times_S Y)$.

Toutefois, il est difficile de calculer les morphismes dans cette catégorie. On peut malgré tout obtenir le résultat suivant :

Proposition 11.2.3. — *Soit S un schéma et n un entier relatif.*
Alors :
1. $\mathrm{Hom}_{DM^{eff}(S)}(\mathbb{Z}_S^{tr}, \mathbb{Z}_S^{tr}[n]) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\pi_0(S)} & \textit{si } n = 0, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$
2. *Si S est régulier,* $\mathrm{Hom}_{DM^{eff}(S)}(\mathbb{Z}_S^{tr}, \mathbb{Z}_S^{tr}(1)[n]) = \begin{cases} \mathcal{O}_S(S)^\times & \textit{si } n = 1, \\ \mathrm{Pic}(S) & \textit{si } n = 2, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$

39. Les procédés de $\mathbb{A}^1$-*localisation* et de $\mathbb{P}^1$-stabilisation d'une catégorie dérivée telle que $\mathrm{D}(Sh^{tr}(S))$ à l'aide des catégories de modèles sont décrits dans [**5**]. Le fait non trivial que l'on puisse appliquer ce procédé général à la catégorie abélienne $Sh^{tr}(S)$ est démontré dans [**7**, Cor. 9.3.16].

11.2.4. — Bien qu'on ne puisse pas démontrer le théorème de simplification de Voevodsky dans $DM^{eff}(S)$, on déduit de cette proposition un morphisme de groupes abéliens :

$$\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Hom}_{DM(S)}(\mathbb{1}_S, \mathbb{1}_S(1)[2]),$$

et ceci même pour un schéma S non nécessairement régulier. [40]

Il en résulte que $DM(S)$ vérifie tous les axiomes utilisés dans l'article [**2**] (décrits dans le paragraphe 2.1.1). Ainsi, les résultats de cet article concernant le triangle et le morphisme de Gysin s'appliquent à $DM(S)$.

11.3. Lien avec l'homotopie stable. —

11.3.1. — Comme on l'a vu, la construction de $DM(S)$ est tout à fait analogue à celle de $SH(S)$ et $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Z})$. Il en résulte que les adjonctions (7.0.9.a) se prolongent au cas d'une base quelconque S et induisent des adjonctions de catégories triangulées :

(11.3.1.a)
$$SH(S) \underset{K}{\overset{N}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Z}) \underset{\gamma_*}{\overset{\gamma^*}{\rightleftarrows}} DM(S)$$

telles que les adjoints à gauches N et γ^* soient monoïdaux et respectent les objets représentables par un S-schéma lisse.

Du fait que ces adjonctions soient définies par des adjonctions de Quillen au niveau des catégories homotopiques, il résulte que $K(\gamma_*(\mathbb{1}_S))$ est un spectre en anneaux stricts.

Définition 11.3.2. — Avec les notations ci-dessus, on définit le *spectre d'Eilenberg-Mac Lane motivique* sur S par la formule :

$$\mathbf{H}_{\mathcal{M},S} := K(\gamma_*(\mathbb{1}_S)).$$

Par adjonction, on déduit de cette définition que pour tout S-schéma lisse X et tout couple $(n, i) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\mathbf{H}^{n,i}_{\mathcal{M}}(X) = \mathrm{Hom}_{DM(S)}(M_S(X), \mathbb{1}_S(i)[n])$$

où le membre de gauche désigne la cohomologie représentée par $\mathbf{H}_{\mathcal{M},S}$ dans $SH(S)$.

Remarque 11.3.3. — De manière évidente, notre définition coïncide avec celle de Voevodsky [**Voe98**, §6.1]. L'avantage de notre approche est de fournir une structure stricte de spectre en anneaux sur $\mathbf{H}_{\mathcal{M},S}$.

11.4. Fonctorialité élémentaire. —

11.4.1. — Considérons un morphisme de schémas $f : T \to S$.
La catégorie Sm^{cor}_S est munie d'un foncteur de changement de base associé à f :

$$f^{-1} : Sm^{cor}_S \to Sm^{cor}_T,\ X \mapsto X_T := X \times_S T, \alpha \in c_S\left(X, Y\right) \mapsto \alpha \otimes_X \langle X_T \rangle \in c_T\left(X_T, Y_T\right).$$

On en déduit formellement une paire de foncteurs adjoints :

(11.4.1.a)
$$f^* : Sh^{tr}(S) \leftrightarrows Sh^{tr}(T) : f_*$$

où $f_*(F) = F \circ f^{-1}$.

On fera attention que le foncteur f^* n'est pas exact en général. Par contre, si f est lisse séparé, on dispose d'un foncteur d'oubli au niveau des S-correspondances finies :

$$\begin{aligned} f_\sharp : Sm^{cor}_T &\longrightarrow Sm^{cor}_S, \\ (X \to T) &\longmapsto (X \to T \xrightarrow{f} S), \\ \alpha \in c_T\left(X, Y\right) &\longmapsto \delta_{XY*}(\alpha) \in c_S\left(X, Y\right) \end{aligned}$$

où $\delta_{XY} : X \times_T Y \to X \times_S Y$ est l'immersion (fermée) canonique. On peut alors vérifier que $f^*(F) = F \circ f_\sharp$. On en déduit une paire de foncteurs adjoints :

(11.4.1.b)
$$f_\sharp : Sh^{tr}(T) \leftrightarrows Sh^{tr}(S) : f^*.$$

40. Pour obtenir cela, il faut utiliser la fonctorialité élémentaire de $DM(S)$ – voir [**7**, Def. 10.3.1].

La catégorie de modèles sous-jacente à $DM(S)$ a été introduite de telle manière que ces deux adjonctions se dérivent. On obtient ainsi la fonctorialité suivante des complexes motiviques stables :

$$\text{(11.4.1.c)} \qquad \begin{cases} \mathbf{L}f^* : DM(S) \leftrightarrows DM(T) : \mathbf{R}f_*, f \text{ quelconque,} \\ \mathbf{L}f_\sharp : DM(T) \leftrightarrows DM(S) : \mathbf{R}f^* = f^*, f \text{ lisse séparé.} \end{cases}$$

Il est naturel de se demander si on peut étendre cette fonctorialité afin d'obtenir le même formalisme que dans le cas traité dans [**SGA4**] (complexes de faisceaux étales de torsion première à la caractéristique à cohomologie bornée constructible).

Ce formalisme est baptisé de nos jours le *formalisme des six foncteurs de Grothendieck*. Motivés par cette question, un des travaux de fondements que nous avons entrepris dans [**7**] avec D.C. Cisinski a été de définir et d'étudier les conditions d'existence d'un tel formalisme.

Remarque 11.4.2. — Notons qu'une des difficultés dans ce projet est de montrer que le foncteur γ_* de l'adjonction (11.3.1.a) commute avec le foncteur f^* pour un morphisme de schémas quelconque — cela se réduit au cas où f est une immersion fermée.

D'après la définition 11.3.2, cela impliquerait la conjecture suivante de Voevodsky ([**Voe98**, conj. 17]) :

(V1) Pour tout morphisme de schémas $f : S' \to S$, le morphisme naturel $f^*\mathbf{H}_{\mathcal{M},S} \to \mathbf{H}_{\mathcal{M},S'}$ est un isomorphisme.

12. Catégories $\mathcal{P}$-fibrées et formalisme des 6 foncteurs

12.1. Catégories pré-motiviques. — On présente ici un cas particulier des axiomes généraux introduits dans la première partie de [**7**].

Définition 12.1.1 ([**7**, §1.4]). — On note $\mathscr{S}$ la catégorie des schémas noethériens excellents de dimension finie et on considère la classe des morphismes lisses Sm dans $\mathscr{S}$. On définit une catégorie triangulée pré-motivique $\mathscr{T}$ par les propriétés suivantes :

1. On se donne une catégorie $\mathscr{T}$ fibrée sur $\mathscr{S}$ en catégories triangulées monoïdales. Autrement dit [41] :
   (a) pour tout schéma S dans $\mathscr{S}$, on se donne une catégorie triangulée monoïdale $\mathscr{T}(S)$.
   (b) Pour tout morphisme $f : T \to S$ dans $\mathscr{S}$, on se donne un foncteur
   $$f^* : \mathscr{T}(S) \to \mathscr{T}(T)$$
   exact et monoïdal qui satisfait les relations $f^*g^* = (gf)^*$, $(1_S)^* = 1_{\mathscr{T}(S)}$.
2. On suppose que pour tout morphisme lisse p, le foncteur p^* admet un adjoint à gauche noté $p_\sharp$.

   On suppose satisfaites les propriétés suivantes :

(Sm-BC) *(Changement de base lisse)* Pour tout carré cartésien dans $\mathscr{S}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "p"] & S \end{tikzcd}$$

tel que p est lisse, le morphisme naturel

$$q_\sharp g^* \to f^* p_\sharp$$

est un isomorphisme.

41. Les conditions (a) et (b) décrivent plutôt un 2-foncteur strict de la catégories $\mathscr{S}$ dans la 2-catégorie des catégories triangulées monoïdales. Du point de vue des catégories fibrées introduites par Grothendieck dans [**SGA1**], on s'est donné un clivage normalisé de $\mathscr{T}$ sur $\mathscr{S}$ (*cf.* [**SGA1**, VI, §7]).

(Sm-PF) *(Formule de projection)* Pour tout morphisme lisse $f : T \to S$ et tout objet M (resp. N) dans $\mathscr{T}(T)$ (resp. $\mathscr{T}(S)$) le morphisme canonique

$$f_\sharp(M \otimes f^*(N)) \to f_\sharp(M) \otimes N$$

est un isomorphisme.

Une catégorie $\mathscr{T}$ satisfaisant ces deux propriétés est appelée une *catégorie triangulée Sm-fibrée monoïdale* ([**7**, 1.1.26] sans structure triangulée et [**7**, 1.3.10] pour le cas triangulé).

3. On suppose que pour tout morphisme f dans $\mathscr{S}$ (resp. tout schéma S dans $\mathscr{S}$), le foncteur f^* (resp. $\otimes_S$) admet un adjoint à droite noté f_* (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_S$).

La catégorie $\mathscr{T}$ est alors dite *complète* ([**7**, 1.1.28]).

4. On note $\mathbb{1}_S$ l'objet unité de $\mathscr{T}(S)$. La famille d'objets $(\mathbb{1}_S)_{S \in \mathscr{S}}$ définit une *section cartésienne* de la catégorie fibrée $\mathscr{T}$. Notons que si l'on se donne deux sections cartésiennes (A_S) et (B_S) de $\mathscr{T}$, on peut aussi définir leur produit tensoriel comme la section cartésienne $(A_S \otimes_S B_S)$.

   À tout schéma lisse $p : X \to S$, on peut associer un motif $M_S(X) = p_\sharp(\mathbb{1}_X)$.

   On suppose donné un ensemble de sections cartésiennes τ stable par produit tensoriel. Les objets de τ sont appelés les *twists*. Pour tout $(i, n) \in \tau \times \mathbb{Z}$, tout schéma S dans $\mathscr{S}$ et tout objet M de $\mathscr{T}(S)$, on note $M\{i\}[n]$ la n-ème suspension du produit tensoriel de M avec la section cartésienne i prise au-dessus de S.

   Avec ces notations, on demande que la famille de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}(S)}(M_S(X)\{i\}[n], -), \ \ X/S \text{ lisse}, \ (i, n) \in \tau \times \mathbb{Z}$$

   soit conservative.

Remarque 12.1.2. — 1. Le dernier axiome permet de penser aux objets de $\mathscr{T}(S)$ comme à des spectres. Dans le cas où τ est un groupe pour $\otimes$, pour tout objet E sur S, tout S-schéma lisse X et tout couple $(i, n) \in \tau \times \mathbb{Z}$, on peut définir la cohomologie de X à coefficients dans M, en degré n et twist i, comme le groupe :

$$E^{n,i}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}(S)}(M_S(X), E\{i\}[n]).$$

   Le point 4 se reformule en disant que $E \to E'$ est un isomorphisme si et seulement si il induit un isomorphisme sur les théories cohomologiques correspondantes.

2. Dans *loc. cit.* on a cherché à développer un cadre axiomatique qui s'applique à d'autres situations. Ainsi :
   (a) On peut s'intéresser au cas des catégories abéliennes. Celles-ci apparaissent naturellement pour construire les catégories triangulées, comme catégories dérivées. Par ailleurs, la catégorie conjecturale des motifs mixtes devrait rentrer dans ce cadre.
   (b) On peut remplacer la classe des schémas lisses par une classe de morphismes $\mathcal{P}$ stable par composition et pullbacks : par exemple $\mathcal{P}$ peut être la classe des morphismes étales (comme dans le cadre des faisceaux étales de [**SGA4**]) ou celle des immersions ouvertes. On notera alors que l'analogue des propriétés 1 à 4 (dans le cadre abélien ou dérivé) est bien vérifié de manière élémentaire dans chacun de ces cadres.

Exemple 12.1.3. — 1. Les catégories que l'on a rencontrées dans ce mémoire : $SH(S)$ (par. 3.1.1), $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S)$ (par. 7.0.5) et $DM(S)$ (par. 11.4.1) forment toutes des catégories triangulées pré-motiviques pour S un schéma variable de $\mathscr{S}$ (avec pour monoïde $\tau = \mathbb{Z}$ correspondant au twist à la Tate et à son inverse).

2. Les versions effectives des catégories précédentes sont aussi triangulées pré-motiviques avec pour ensemble de twist $\tau = \mathbb{N}$ engendré par le twist à la Tate.
3. Un dernier exemple est constitué par la catégorie $\mathbf{MGL}_S - mod$ des modules (stricts) sur le spectre en anneaux $\mathbf{MGL}_S$ (par. 3.2.5), pour S variable. Le monoïde des twists τ est à nouveau engendré par le twist à la Tate et son inverse.

On introduit alors une notion naturelle de morphismes pour les catégories fibrées définies ci-dessus :

Définition 12.1.4 ([**7**, Def. 1.2.7]). — Soit $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ deux catégories triangulées pré-motiviques dans le sens de la définition précédente.

Un morphisme $\varphi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}'$ est la donnée pour tout schéma S dans $\mathscr{S}$ d'une adjonction de catégories triangulées :

$$\varphi_S^* : \mathscr{T}(S) \leftrightarrow \mathscr{T}'(S) : \varphi_{S*}$$

telle que φ^* soit monoïdal ainsi que d'isomorphismes canoniques :

$$c_f : f^*\varphi_S^* \to \varphi_T^* f^*,\ \ f : T \to S,$$
$$c'_p : p_\sharp \varphi_T^* \to \varphi_S^* p_\sharp,\ \ p : T \to S \text{ lisse.}$$

On demande que c_f et c'_p soient compatibles à la composition.

Exemple 12.1.5. — Les adjonctions (11.3.1.a) définissent des morphismes de catégories triangulées pré-motiviques dans le sens précédent :

(12.1.5.a) $$SH \underset{K}{\overset{N}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1} \underset{\gamma_*}{\overset{\gamma^*}{\rightleftarrows}} DM$$

12.2. L'axiome du support. — L'intérêt de l'axiome qui suit est de permettre la construction du foncteur $f_!$ suivant la méthode de Deligne :

Définition 12.2.1 ([**7**, Def. 2.2.5]). — Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée pré-motivique.

On dit que $\mathscr{T}$ vérifie l'axiome du support (Supp)si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout famille finie de schémas $(S_i)_{i\in I}$ dans $\mathscr{S}$, le foncteur évident
$$\mathscr{T}(\sqcup_{i\in I} S_i) \to \bigoplus_{i\in I} \mathscr{T}(S_i)$$
est une équivalence de catégories.
2. Pour tout carré commutatif dans $\mathscr{S}$
$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{k} & T \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{j} & S \end{array}$$
tel que j, k sont des immersions ouverte et p, q des morphismes propres, la transformation naturelle canonique :
$$j_\sharp q_* \to p_* k_\sharp$$
est un isomorphisme.

Le théorème suivant, extrait de [**7**], suit comme annoncé la méthode de Deligne. Il est énoncé sous forme simplifiée dans ce mémoire :

Theorem 12.2.2 ([**7**, th. 2.2.14]). — *Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée pré-motivique telle que :*

(a) $\mathscr{T}$ satisfait l'axiome du support.

(b) Pour tout morphisme propre $f : T \to S$ dans $\mathscr{S}$, f_* admet un adjoint à droite $f^!$. [42]

Alors, pour tout morphisme séparé de type fini $f : Y \to X$ dans $\mathscr{S}$, il existe une paire de foncteurs adjoints

$$f_! : \mathscr{T}(Y) \rightleftarrows \mathscr{T}(X) : f^!$$

telle que $f_!$ définit un 2-foncteur covariant. De plus, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) *Il existe une transformation naturelle $\alpha_f : f_! \to f_*$ compatible à la composition qui est un isomorphisme si f est propre.*

(2) *Pour toute immersion ouverte j, $j_! = j_\sharp$ et $j^! = j^*$.*

42. Cette propriété est satisfaite si les objets $M_S(X)\{i\}$ sont compacts pour X/S lisse et $i \in \tau$.

(3) *Pour tout carré cartésien dans $\mathscr{S}$*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & X' \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X, \end{tikzcd}$$

tel que f est séparé de type fini, il existe des transformations naturelles

$$Ex(\Delta_!^*) : g^* f_! \to f'_! g'^*,$$
$$Ex(\Delta_*^!) : g'_* f'^! \to f^! g_*$$

qui sont des isomorphismes si f est une immersion ouverte ou g est un morphismes lisse.

(4d) *Pour tout morphisme séparé de type fini $f : Y \to X$ dans $\mathscr{S}$, il existe une transformation naturelle*

$$Ex(f_!^*, \otimes) : (f_! K) \otimes_X L \to f_!(K \otimes_Y f^* L)$$

qui est un isomorphisme si f est une immersion ouverte.

De plus, les propriétés (1) et (2) définissent la famille de foncteur $f_!$ de manière unique.

Ce théorème décrit déjà partiellement ce qu'est le formalisme des 6 foncteurs de Grothendieck. Il manque toutefois des propriétés essentielles. La première est le fait que les transformations naturelles noté $Ex(-)$ dans ce théorème doivent être des isomorphismes. (43) La deuxième est la propriété de localisation qui est déterminante dans notre contexte.

Exemple 12.2.3. — On a pu montrer dans [**7**, th. 10.4.2] que DM satisfait les conditions (a) et (b) du théorème ci-dessus. On dispose donc des foncteurs $(f_!, f^!)$ dans ce cadre.

12.3. L'axiome de localisation. —

Définition 12.3.1 **([7**, Def. 2.3.2**]).** — Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée pré-motivique.

On dit que $\mathscr{T}$ satisfait l'axiome de localisation (Loc)si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\mathscr{T}(\varnothing) = 0$.
2. Pour toute immersion fermée $i : Z \to S$ d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to S$,
   (a) La paire de foncteurs (j^*, i^*) est conservative.
   (b) Le morphisme d'adjonction $i^* i_* \to 1$ est un isomorphisme.

Ce simple axiome a de nombreuses conséquences qui sont développées dans la section 2.3 de *loc. cit.* Notons particulièrement, sous les hypothèses du point 2, l'existence pour tout objet K de $\mathscr{T}(S)$ d'un unique triangle distingué :

(12.3.1.a) $$j_\sharp j^*(K) \xrightarrow{(1)} K \xrightarrow{(2)} i_* i^*(K) \to j_\sharp j^*(K)[1]$$

dans lequel les morphismes (1) et (2) sont les morphismes d'adjonction évidents.

Exemple 12.3.2. — Suivant un théorème de Morel et Voevodsky, les catégories triangulées pré-motiviques SH et $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}$ vérifient l'axiome de localisation (voir [**MV99**, th. 2.21, p. 114] et [**Ayo07**, 4.5.44]).

12.3.3. — Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée pré-motivique satisfaisant les propiétés suivantes :

(Htp) *Homotopie :* Pour tout schéma S, le morphisme de projection canonique $M_S(\mathbb{A}^1_S) \to \mathbb{1}_S$ est un isomorphisme.

(Stab) *Stabilité :* Pour tout schéma S, on note $\mathbb{1}_S(1)$ le noyau de l'épimorphisme scindé canonique $M_S(\mathbb{P}^1_S) \to \mathbb{1}_S$. Alors, $\mathbb{1}_S(1)$ est $\otimes$-inversible.

- $\mathscr{T}$ satisfait l'axiome de localisation (Loc).
- Pour tout morphisme propre $f : T \to S$ dans $\mathscr{S}$, f_* admet un adjoint à droite $f^!$.

43. Dans le cas du point (3), cela revient à demander le théorème du changement de base propre.

Lorsque ces axiomes sont satisfaits, on dit pour abréger que $\mathscr{T}$ est une catégorie triangulée motivique ([**7**, Def. 2.4.2]).

Dans ce cas, on peut alors associer à tout fibré vectoriel E/X un *motif de Thom* $MTh(E)$ défini de manière unique par le triangle distingué :

$$M_S(E^\times) \to M_S(E) \to MTh(E) \xrightarrow{+1}$$

où $E^\times$ désigne le complémentaire de la section nulle et la première flèche est induite par l'immersion ouverte évidente.

Le théorème suivant est une version légèrement généralisée [44] de théorèmes fondamentaux d'Ayoub démontré dans [**Ayo07**] :

Theorem 12.3.4 **(**[**7**, 2.4.21]**)**. — *Considérons les hypothèses et notations qui précèdent.*

Alors, $\mathscr{T}$ vérifie l'axiome du support. Avec les notations du théorème 12.2.2, on obtient de plus les propriétés suivantes :

(iii) *Pour tout morphisme lisse strictement projectif* [45] f *dans $\mathscr{S}$ avec pour fibré tangent relatif T_f, il existe des isomorphismes canoniques :*

$$\mathfrak{p}_f : f^! \xrightarrow{\sim} MTh(T_f) \otimes f^* \quad et \quad \mathfrak{q}_f : f_\sharp(.\otimes MTh(-T_f)) \xrightarrow{\sim} f_!$$

qui sont duaux l'un de l'autre. Ces isomorphismes sont compatibles à la composition. [46]

(iv) *Pour tout carré cartésien Δ comme dans la propriété (4) du théorème 12.2.2, les transformations naturelles*

$$Ex(\Delta_!^*) : g^* f_! \to f'_! g'^* \,,$$
$$Ex(\Delta_*^!) : g'_* f'^! \to f^! g_* \,.$$

sont des isomorphismes.

(v) *Pour tout morphisme séparé de type fini $f : Y \to X$ dans $\mathscr{S}$, le morphisme de la propriété (4d) du théorème 12.2.2*

$$Ex(f_!, \otimes) : (f_! K) \otimes_X L \to f_!(K \otimes_X f^* L)$$

est un isomorphisme. De plus, il existe des isomorphisme naturels canoniques :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_X(f_!(L), K) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\mathrm{Hom}}_Y(L, f^!(K)) \,,$$
$$f^! \underline{\mathrm{Hom}}_X(L, M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_Y(f^*(L), f^!(M)) \,.$$

Cet énoncé est en fait une version simplifiée du théorème [**7**, 2.4.21] – dont il reprend partiellement la numérotation des propriétés. Si l'on excepte l'existence d'un foncteur dualisant, il résume de manière optimale le formalisme des 6 foncteurs de Grothendieck (d'après des notes non publiées de Deligne).

Exemple 12.3.5. — D'après [**Ayo07**], les catégories $\mathscr{S}$-fibrées SH et $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}$ sont toutes deux triangulées motiviques.

13. Motifs rationnels

13.1. Definition. —

13.1.1. — À coefficients rationnels, la catégorie homotopique stable est équivalente à la catégorie homologique stable : autrement dit, la première adjonction de (12.1.5.a) induit une équivalence de catégories :

$$SH(S) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}).$$

D'après l'exemple 12.3.5, $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(-, \mathbb{Q})$ est une catégorie triangulée motivique.

---

44. On a remplacé l'hypothèse quasi-projectif par séparé de type fini pour l'existence des foncteurs $(f_!, f^!)$.
45. *i.e.* admettant une immersion dans un fibré projectif trivial.
46. On renvoie le lecteur à *loc. cit.* pour l'énoncé précis de cette compatibilité.

13.1.2. — Rappelons que la K-théorie invariante par homotopie est représentable dans $SH(S)$ par un spectre en anneaux stricts $\mathbf{KGL}_S$. On note $\mathbf{KGL}_S^{\mathbb{Q}}$ la version rationnel de ce spectre, vu comme un objet de $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ d'après l'équivalence précédente.

Supposons que S est régulier. Alors, on obtient un isomorphisme canonique :

$$K_n(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{SH(S)}(\mathbb{1}_S[n], \mathbf{KGL}_S)$$

où le membre de gauche est la K-théorie de Quillen.

Rappelons aussi qu'à coefficients rationnels, la K-théorie de Quillen de S se décompose en facteurs directs :

$$K_*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \oplus_{i \in \mathbb{N}} K_*^{(i)}(S).$$

Ces sous-espaces se caractérisent comme certains sous-espaces propres pour l'action des opérations d'Adams. Riou a montré dans sa thèse (*cf.* [**Rio09**]) que ces opérations d'Adams se relèvent dans $SH(S)$ et induisent une décomposition que l'on peut écrire (voir [**7**, 13.1.4.1]) sous la forme :

$$\mathbf{KGL}_S^{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}_{\mathrm{B},S}(i)[2i] \tag{13.1.2.a}$$

où $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}$ est un spectre en anneau sur S, facteur direct de $\mathbf{KGL}_S^{\mathbb{Q}}$ et tel que pour tout couple d'entiers $(i, n) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\mathbf{H}_{\mathrm{B}}^{n,i}(S) \xrightarrow{\sim} K_{2i-n}^{(i)}(S).$$

Autrement dit, le spectre en anneaux $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}$ représente la *cohomologie motivique de Beilinson* dans $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$.

Notons que la décomposition (13.1.2.a) s'étend au cas d'un schéma S quelconque. La définition suivante est central dans notre travail sur les motifs mixtes rationnels :

Définition 13.1.3 **([7, 13.2.1]).** — Soit S un schéma dans $\mathscr{S}$. On définit la catégorie $DM_{\mathrm{B}}(S)$ des *motifs de Beilinson* sur S comme la localisation de Bousfield de la catégorie $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ par rapport à $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}$.

Plus précisément, étant donné un spectre rationnel E sur S :

– On dit que E est $\mathbf{H}_{\mathrm{B}}$-*acyclique* si $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S} \otimes E = 0$.

– On dit que E est $\mathbf{H}_{\mathrm{B}}$-*local* si pour tout spectre rationnel $\mathbf{H}_{\mathrm{B}}$-acyclique F, $\mathrm{Hom}(F, E) = 0$.

La catégorie $DM_{\mathrm{B}}(S)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ formée des objets $\mathbf{H}_{\mathrm{B}}$-locaux.

Du fait que les objet $\mathbf{H}_{\mathrm{B}}$-locaux sont stables par les foncteur f^* et $f_\sharp$, on déduit formellement que DM_{B} définit une catégorie triangulée motivique de telle manière qu'on obtienne un morphisme de catégories pré-motiviques :

$$\beta^* : \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(-, \mathbb{Q}) \leftrightarrows DM_{\mathrm{B}} : \beta_*$$

où β_* est le foncteur d'oubli évident. On dispose ainsi des constructions du théorème 12.3.4 dans le cadre de DM_{B}.

13.1.4. — On peut montrer que le spectre $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}$ a de bonnes propriétés : c'est un spectre en anneaux strict (définition 3.2.2), stable par changement de base. Utilisant la construction de la définition 3.2.4, on obtient la description suivante des motifs de Beilinson :

Theorem 13.1.5 **([7, 13.2.9]).** — *La catégorie des motifs de Beilinson sur S est équivalente à la catégorie homotopique* $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}$*−mod des modules stricts sur* $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}$.

Remarque 13.1.6. — D'après [**7**, Cor. 13.2.15], $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}$ est le spectre en anneaux orienté universel dont la loi de groupe formel associée est additive. Le théorème précédent affirme donc que les motifs de Beilinson sont encore les spectres en anneaux orientés (*cf.* définition 3.1.4) avec loi de groupe formelle additive.

13.2. Théorème de descente et motifs de Voevodsky. —

13.2.1. — La première approche de Voevodsky concernant la théorie des motifs utilisait la h-topologie ([**Voe96**]). Sa construction s'inscrit naturellement dans le modèle de construction déjà rencontré (catégories homotopique et homologique stable, complexes motiviques stables) :

- On considère le site des S-schémas de type fini $\mathscr{S}_S^{ft}$, muni de la h-topologie et on note $Sh_h(\mathscr{S}_S^{ft}, \mathbb{Q})$ la catégorie des faisceaux rationnels sur ce site.
- Considérant la $\mathbb{A}^1$-localisation de la catégorie dérivée $\mathrm{D}(Sh_h(\mathscr{S}_S^{ft}, \mathbb{Q}))$, on obtient la catégorie $\underline{DM}_h^{eff}(S, \mathbb{Q})$ introduite par Voevodsky. C'est une catégorie homotopique d'une catégorie de modèles monoïdale.
- On considère ensuite la $\mathbb{P}^1$-stabilisation de $\underline{DM}_h^{eff}(S, \mathbb{Q})$ et on la note $\underline{DM}_h(S, \mathbb{Q})$.

Du fait que $\underline{DM}_h(S, \mathbb{Q})$ est définie à partir du site $\mathscr{S}_S^{ft}$, elle contient beaucoup d'objets : ainsi, tout S-schéma de type fini X défini un objet $\underline{M}_S(X)$ de $\underline{DM}_h(S, \mathbb{Q})$.

On définit une catégorie plus petite, notée $DM_h(S, \mathbb{Q})$ et appelée la catégorie des *h-motifs rationnels*, en considérant la sous-catégorie triangulée localisante de $\underline{DM}_h(S, \mathbb{Q})$ engendrée par les objets de la forme $M_S(X)(i)$ pour un S-schéma lisse X et un entier $i \in \mathbb{Z}$.

Theorem 13.2.2 **(**[**7**, 10.1.4 et 15.1.2]**).** — *Soit S un schéma géométriquement unibranche. Il existe un foncteur triangulé monoïdal canonique*

$$DM(S, \mathbb{Q}) \to \underline{DM}_h(S, \mathbb{Q})$$

qui est pleinement fidèle. Son image essentielle est la catégorie $DM_h(S, \mathbb{Q})$.

On a déjà rencontré l'hypothèse sur S de ce théorème dans la théorie des cycles relatifs (théorème 10.2.5). Elle semble être naturelle voire nécessaire dans le cadre des complexes motiviques stables. Ce n'est pas le cas pour les motifs de Beilinson :

Theorem 13.2.3 **(h-descente,** [**7**, 15.1.2]**).** — *Soit S un schéma dans $\mathscr{S}$. Il existe un foncteur triangulé monoïdal canonique*

$$DM_{\mathrm{B}}(S, \mathbb{Q}) \to \underline{DM}_h(S, \mathbb{Q})$$

qui est pleinement fidèle et dont l'image essentielle est la catégorie $DM_h(S, \mathbb{Q})$.

Remarque 13.2.4. — On déduit de ce théorème que la cohomologie motivique de Beilinson et la K-théorie invariante par homotopie vérifient la h-descente.

Par ailleurs, on obtient une autre caractérisation de la cohomologie motivique de Beilinson : pour tout schéma S dans $\mathscr{S}$, il existe d'après le théorème d'approximation de Gabber un h-recouvrement $\mathcal{X} \to S$ tel que $\mathcal{X}$ est un schéma simplicial dont tous les termes sont réguliers. Alors,

$$\mathbf{H}_{\mathrm{B}}^{n,i}(S) = K_{2i-n}^{(i)}(\mathcal{X})$$

où le membre de droite désigne le sous-espace propre de la K-théorie de Quillen du schéma simplicial $\mathcal{X}$.

13.2.5. — Les deux théorèmes précédents montrent donc que la catégorie des motifs de Beilinson et celle des complexes motiviques rationnels sur un schéma géométriquement unibranche S coincident.

Si l'on définit le spectre d'Eilenberg-Mac Lane motivique rationnel $\mathbf{H}_{\mathcal{M},S}^{\mathbb{Q}}$ comme l'image de l'objet unité par le morphisme canonique $DM(S, \mathbb{Q}) \to SH(S, \mathbb{Q})$, on en déduit une partie de la conjecture de Voevodsky (remarque 11.4.2) :

Corollaire 13.2.6 **(**[**7**, 15.1.6]**).** — *Soit $f : S' \to S$ un morphisme entre schémas géométriquement unibranche. Alors, $f^*(\mathbf{H}_{\mathcal{M},S}^{\mathbb{Q}}) = \mathbf{H}_{\mathcal{M},S'}^{\mathbb{Q}}$.*

13.3. Motifs constructibles. — Rappelons qu'un objet K d'une catégorie triangulée $\mathscr{T}$ est dit *compact* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(K,-)$ commute aux sommes.

Définition 13.3.1 ([**7**, def. 14.1.1]). — Un motif de Beilinson E sur S est dit *constructible* si il est compact dans $DM_{\mathrm{B}}(S,\mathbb{Q})$. On note $DM_{\mathrm{B},c}(S,\mathbb{Q})$ la sous-catégorie triangulée formée des motifs de Beilinson constructibles.

13.3.2. — La famille

$$M_S(X)(i),\ X/S \text{ lisse},\ i\in\mathbb{Z} \tag{13.3.2.a}$$

est une famille de générateurs compacts de $DM_{\mathrm{B}}(S,\mathbb{Q})$: en d'autres termes, $DM_{\mathrm{B}}(S,\mathbb{Q})$ est égale à la plus petite sous-catégorie triangulée stable par sommes contenant (13.3.2.a). Il en résulte formellement que $DM_{\mathrm{B},c}(S,\mathbb{Q})$ est la sous-catégorie triangulée épaisse de $DM_{\mathrm{B}}(S,\mathbb{Q})$ engendrée par (13.3.2.a).

Si S est un schéma géométriquement unibranche, partant de la catégorie $Sm_S^{cor}\otimes\mathbb{Q}$, on peut reprendre les définitions des paragraphes 1.1.1 et 1.4.1 pour obtenir une catégorie $DM_{gm}(S,\mathbb{Q})$. On déduit des théorèmes 13.2.2 et 13.2.3 le résultat suivant :

Proposition 13.3.3. — *Soit S un schéma géométriquement unibranche.*
Alors $DM_{\mathrm{B},c}(S,\mathbb{Q})$ est équivalente à la catégorie $DM_{gm}(S,\mathbb{Q})$.

La notion de constructibilité qu'on a choisie pour les motifs de Beilinson est directement liée à la notion de constructibilité pour les (complexes de) faisceaux étales de [**SGA4**]. Un résultat fondamental dans ce dernier contexte est le théorème de pureté absolu, qui n'a été démontré dans toute sa généralité que relativement récemment par Gabber . [(47)] Fondamentalement grâce au théorème de localisation de Quillen, on déduit l'analogue de ce théorème pour les motifs de Beilinson :

Theorem 13.3.4 **(pureté absolue,** [**7**, 13.4.1]**).** — *Soit S, Z des schémas réguliers. Pour toute immersion fermée $i : Z\to S$ de codimension n, il existe un isomorphisme canonique dans $DM_{\mathrm{B}}(S,\mathbb{Q})$ de la forme :*

$$\mathbf{H}_{\mathrm{B},Z}\xrightarrow{\sim} i^!(\mathbf{H}_{\mathrm{B},S})(n)[2n].$$

Ce théorème a deux conséquences essentielles :

Theorem 13.3.5 **(finitude,** [**7**, 14.1.31]**).** — *Les motifs de Beilinson constructibles sont stables par les six opérations $f^*, f_*, f_!, f^!, \otimes, \underline{\mathrm{Hom}}$ de $DM_{\mathrm{B}}(S,\mathbb{Q})$.*

Rappelons qu'un objet D d'une catégorie triangulée monoïdale fermée $\mathscr{T}$ est dualisant si pour tout objet X de $\mathscr{T}$, le morphisme canonique $X\to\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{T}}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{T}}(X,D),D)$ est un isomorphisme.

Theorem 13.3.6 **(dualité,** [**7**, 14.3.28]**).** — *Soit S un schéma régulier de type fini sur un schéma excellent B tel que $\dim(B)\leq 2$.*
Alors, pour tout morphisme séparé de type fini $f : X\to S$, le motif de Beilinson $f^!(\mathbf{H}_{\mathrm{B},S})$ est dualisant pour la catégorie $DM_{\mathrm{B},c}(S,\mathbb{Q})$.

Remarque 13.3.7. — Les preuves de ces deux résultats dans *loc. cit.* sont rédigés dans le langage axiomatique des catégories triangulées motiviques. Pour la commodité du lecteur, on rappelle ici les hypothèses employées dans l'énoncé de ces résultats, satisfaites pour DM_{B}.
- On a déjà vu que DM_{B} est une catégorie triangulée motivique.
- Le monoïde des twists sur cette catégorie (point 4 de la définition 12.1.1) est le groupe $\tau=\mathbb{Z}$, dont le générateur est donné par le twist de Tate (*i.e.* le *motif de Tate* $(\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}(1))$.
- Suivant une terminologie introduite par J. Ayoub, DM_{B} est *séparé* : pour tout morphisme surjectif de type fini $f : T\to S$, le foncteur $f^* : DM_{\mathrm{B}}(S,\mathbb{Q})\to DM_{\mathrm{B}}(T,\mathbb{Q})$ est conservatif ([**7**, Def. 2.1.11]). Cette propriété est une conséquence du théorème de h-descente 13.2.3.

47. Voir [**Fuj02**]. On se rappellera en particulier que la démonstration de Gabber utilise un théorème de Thomason qui lui même utilise le théorème de localisation de Quillen en K-théorie.

– La catégorie DM_{B} est « weakly $\mathbb{Z}$-pure » ([**7**, Def. 14.1.22]). C'est une conséquence du théorème de pureté absolue 13.3.4

13.4. Motifs de Morel. —

13.4.1. — Dans un travail non publié [**Mor06**], F. Morel introduit la « partie + » de la catégorie homotopique stable rationnelle. Empruntant la définition 5.2.2, on peut la décrire comme la sous-catégorie de $SH(S) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ formée des spectres faiblement orientables. On la note ici $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})_+$.

Une des observations de Morel est que $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})_+$ est facteur direct de la catégorie $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$: tout objet E de $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ se décompose de manière canonique sous la forme : $E = E_+ \oplus E_-$. Si l'on note $S^0_{\mathbb{Q}}$ l'objet unité de $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$, Morel montre alors comment identifier $S^0_{\mathbb{Q},+}$ avec le spectre de cohomologie motivique de Beilinson $\mathbf{H}_{\mathrm{B},S}$ ([**Mor06**, Cor. 1.4], pour S régulier) et indique que cela montre l'équivalence entre $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(k, \mathbb{Q})_+$ et $DM(k, \mathbb{Q})$ dans le cas où k est un corps de caractéristique 0.

Grâce à la théorie introduite ci-dessus, on obtient ce résultat en toute généralité :

Theorem 13.4.2 **([7, 15.2.13]).** — *Pour tout schéma noethérien de dimension finie S, il existe une équivalence canonique de catégories triangulées :*

$$DM_{\mathrm{B}}(S, \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})_+.$$

Plus précisément, les conditions suivantes sur un spectre rationnel E sur S sont équivalentes :

1. *E est un motif de Beilinson (déf. 13.1.3).*
2. *E est faiblement orientable (déf. 5.2.2).*
3. *E est orientable (déf. 3.1.4).*

13.4.3. — Notons qu'on peut définir une variante de la catégorie $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ en remplaçant la topologie de Nisnevich par la topologie étale dans la construction du paragraphe 7.0.5. La catégorie triangulée monoïdale obtenue $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(S, \mathbb{Q})$ est appelée la catégorie des motifs étales (rationnels).

Utilisant les résultats de Morel sur l'homotopie stable des sphères, on peut prouver le théorème suivant :

Theorem 13.4.4 **([7, 15.2.16]).** — *Pour tout schéma noethérien de dimension finie S, il existe une équivalence canonique de catégories triangulées :*

$$DM_{\mathrm{B}}(S, \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(S, \mathbb{Q}).$$

Remarque 13.4.5. — Les deux théorèmes précédents étaient connus dans le cas d'un corps par Morel. Il avait formulé la conjecture que les catégories $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})_+$ et $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(S, \mathbb{Q})$ étaient de bons candidats pour la catégorie triangulée des motifs mixtes rationnels.

Travaux présentés

[1] F. Déglise, *Around the gysin triangle I*, arXiv : 0804.2415, 2008.

[2] ———, *Around the gysin triangle II*, Doc. Math. **13** (2008), 613–675.

[3] ———, *Modules homotopiques*, arXiv : 0904.4747v1, 2009.

[4] ———, *Homotopy oriented modules*, arXiv : 1005.4187, 2010.

[5] D.-C. Cisinski and F. Déglise, *Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories*, HHA **11** (2009), no. 1, 219–260.

[6] ———, *Mixed Weil cohomologies*, arXiv : 0712.3291, 2007.

[7] ———, *Triangulated categories of mixed motives*, arXiv : 0912.2110, 2009.

Bibliographie générale

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Documents Mathématiques, vol. 3, Soc. Math. France, 2003, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1960–61 (SGA 1). Édition recomposée et annotée du LNM 224, Springer, 1971.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, and J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972–1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1963–64 (SGA 4).

[Ayo07] J. Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I, II*, Astérisque (2007), no. 314, 315, x+466 pp., vi+364 pp.

[Beĭ87] A. A. Beĭlinson, *Height pairing between algebraic cycles*, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, pp. 1–25. MR MR923131 (89h :11027)

[BO74] S. Bloch and A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–201 (1975). MR MR0412191 (54 #318)

[Dég02] F. Déglise, *Modules homotopiques avec transferts et motifs génériques*, Ph.D. thesis, Univ. Paris VII, 2002.

[Dég06] ———, *Transferts sur les groupes de chow à coefficients*, Mathematische Zeitschrift **252** (2006), no. 2, 315–343.

[Dég08] ———, *Motifs génériques*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **119** (2008), 173–244. MR MR2431508

[FSV00] E.M. Friedlander, A. Suslin, and V. Voevodsky, *Cycles, Transfers and Motivic homology theories*, Princeton Univ. Press, 2000.

[Fuj02] K. Fujiwara, *A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber)*, Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp. 153–183. MR MR1971516 (2004d :14015)

[Ful98] W. Fulton, *Intersection theory*, second ed., Springer, 1998.

[Gro66] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 29, 95–103.

[GS99] H. Gillet and C. Soulé, *Filtrations on higher algebraic K-theory*, Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 89–148. MR MR1743238 (2001i :19005)

[Mor04] F. Morel, *An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory*, Contemporary developments in algebraic K-theory, ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004, pp. 357–441 (electronic). MR MR2175638 (2006m :19007)

[Mor06] ———, *Rational stable splitting of Grassmanians and the rational motivic sphere spectrum*, statement of results, 2006.

[MV99] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky, *$\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999), no. 90, 45–143 (2001). MR 1813224 (2002f :14029)

[Par96] K. H. Paranjape, *Some spectral sequences for filtered complexes and applications*, J. Algebra **186** (1996), no. 3, 793–806. MR MR1424593 (97h :55022)

[Rio05] J. Riou, *Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **340** (2005), no. 6, 431–436. MR MR2135324 (2006a :14028)

[Rio09] ———, *Algebraic K-theory, $\mathbb{A}^1$-homotopy and Riemann-Roch theorems*, arXiv : 0907.2710v2, 2009.

[RØ08] O. Röndigs and P. A. Østvær, *Modules over motivic cohomology*, Adv. Math. **219** (2008), no. 2, 689–727. MR MR2435654 (2009m :14026)

[Ros96] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. J. (1996), 319–393.

[Vez01] G. Vezzosi, *Brown-Peterson spectra in stable $\mathbb{A}^1$-homotopy theory*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **106** (2001), 47–64.

[Voe96] V. Voevodsky, *Homology of schemes*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), no. 1, 111–153. MR MR1403354 (98c :14016)

[Voe98] ———, *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), no. Extra Vol. I, 1998, pp. 579–604 (electronic). MR MR1648048 (99j :14018)

Juin 2010.

FRÉDÉRIC DÉGLISE, LAGA, CNRS (UMR 7539), Université Paris 13, Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/`