MOTIFS MIXTES ARITHMÉTIQUES

par

Frédéric Déglise

Table des matières

Introduction

Dans cet exposé, j'aimerais présenter certaines avancées que j'ai obtenues en collaboration avec Denis-Charles Cisinski dans la théorie des motifs mixtes rationnels. En particulier, montrer à quel point est arrivée cette théorie et peut-être présicer sa situation dans le domaine de la cohomologie en géométrie algébrique. Mon but est d'arriver à relier cette théorie avec la théorie étale.

Je commence donc par un historique du sujet :

1. Beilinson, 1984, [**Beĭ87**].
   Beilinson demande la construction d'une catégorie triangulée monoïdale $DM(S)$ sur le modèle de $D_c^b(S,\Lambda)$:
   - (M1) munie des 6 opérations de Grothendieck :
     $$f^*, f_*, f_!, f^!, \otimes, \underline{Hom}$$
     satisfaisant les propriétés de SGA4.
   - (M2) La sous-catégorie de $DM(k)$ fomée des motifs de schémas projectifs lisses est la catégorie des motifs de Chow sur k.
2. Voevodsky : *motifs de Voevodsky* :

(a) 1996, **[Voe96]**, $DM_h^{eff}(S)$, sans (M1) ni (M2).
(b) 2000, **[Voe00]**, $DM_{gm}(k)$ vérifiant (M2) – concernant (M1), seul $\otimes$ est défini.

3. Morel-Voevodsky : *catégorie homotopique* :
   (a) 2001, **[MV99]**, $H(S)$ (pas triangulée).
   (b) (Jardine) 2000, **[Jar00]**, $SH(S)$ triangulée monoïdale. Ne peut satisfaire (M2).
4. Ayoub, 2007, **[Ayo07]**, établit (M1) complétement pour SH.

Plus précisément, Ayoub utilise le cadre axiomatique des foncteurs croisés introduit par Voevodsky :

(A1) $X \mapsto \mathscr{T}(X)$, catégorie triangulée monoïdale fermée munie de :

$$f^* : \mathscr{T}(Y) \to \mathscr{T}(X), f : Y \to X \text{morphisme de schémas}$$

- $f^* g^* = (gf)^*$
- f^* admet un adjoint à droite f_*
- si f est lisse de type fini, f^* admet un adjoint à gauche $f_\sharp$. Ce dernier foncteur vérifie : changement de base et formule de projection.

(A2) $\mathbf{A}^1$-homotopie, $\mathbf{P}^1$-stabilité (inversibilité du twist de Tate)

(A3) $i : Z \to S$ immersion fermée, $j : (S - Z) \to S$ immersion complémentaire, le foncteur i_* est pleinement fidèle et il existe un triangle distingué :

$$j_\sharp j^* \xrightarrow{adj.} 1 \xrightarrow{adj.} i_* i^* \xrightarrow{\partial_i}$$

(1)

***Théorème* (Ayoub).** — *Les propriétés (A*) impliquent l'existence de $(f_!, f^!)$ et les propriétés habituelles des 6 foncteurs.* (2)

L'exemple canonique auquel s'applique cette théorie est la catégorie homotopique stable SH de Morel-Voevodsky. (3)

Notations. — Tous les schémas sont supposés noethériens. S désigne un schéma de base. Il y aura beaucoup de catégories monoïdales relativement à S dans l'exposé : leur unité est toujours notée $\mathbb{1}_S$.

1. Motifs de Beilinson

1.1. Rappels : SH. — On utilise le site lisse-Nisnevich : $\mathscr{L}_S$. L'avantage c'est que si l'on regarde les faisceaux sur ce site, ils vérifient trivialement la fonctorialité dégagé dans les axiomes 1 des foncteurs croisés : f^*, $p_\sharp$, $\otimes$.

Rappelons qu'on dispose d'une notion d'équivalence d'homotopie faible pour les faisceaux simpliciaux sur ce site (Illusie, Artin-Mazur). On note

$$H^s(S)$$

la catégorie localisée correspondante.

Afin d'obtenir la partie 2 des axiomes d'Ayoub, on introduit les deux opérations « homotopiques suivantes » :

1. ($\mathbf{A}^1$-homotopie) On localise encore $H^s(S)$ par rapport aux morphismes

$$\mathbf{A}^1_X)_+ \to X_+$$

pour tout S-schéma lisse X. (réminiscence de l'équivalence rationelle)

On obtient la catégorie homotopique $H(S)$.

1. Le morphisme ∂_i est alors unique.
2. Essentiellement : changement de base propre/lisse, pureté relative, formule de projection.
3. L'axiome (A3), le plus difficile, avait été essentiellement démontré par Morel et Voevodsky.

2. ($\mathbf{P}^1$-stabilité) Cette catégorie est monoïdale (smash produit $\wedge$) mais pas triangulée : le candidat pour le shift, donné par la sphère simpliciale S^1_s, n'est pas inversible.

   Comme en topologie, on « stabilise »la catégorie : on inverse formellement l'*objet de Tate* :
$$(\mathbf{P}^1_S, \infty)$$
   (réminiscence des motifs).

   On obtient $SH(S)$ triangulée monoïdale : du fait que $\mathbf{P}^1 = S^1_s \wedge \mathbf{G}_m$ (à homopotopie près), on a en fait inversé deux sphères : simpliciale et twist à la Tate. On utilisera dsans la suite la convention :
$$\mathbb{1}_S(1)[2] := (\mathbf{P}^1_S, \infty).$$

Aucune de ces opérations n'est anodyne. Toutefois, en utilisant les catégories de modèles de Quillen, on peut dériver (à gauche) les foncteurs structuraux et obtenir (A1). L'axiome (A2) a été imposé. L'axiome (A3) est un théorème de Morel-Voevodsky.

Remarque 1. — On peut comparer cette construction à la théorie étale avec le dictionnaire :
$$X_+ \longleftrightarrow p_! p^!(\Lambda).$$
Alors, l'$\mathbf{A}^1$-homotopie et la $\mathbf{P}^1$-stabilité sont déjà vraies dans ce cadre (sans besoin de les imposer).

1.2. Cohomologie motivique de Beilinson. — Rappelons que Beilinson définit la cohomologie motivique rationnelle d'un schéma régulier comme :
$$H^{n,i}_{\text{B}}(S) = Gr^i_\gamma(K^{\mathbf{Q}}_{2i-n}(S))$$
gradué pour la γ-filtration sur la K-théorie de Quillen rationnelle.

En particulier, $H^{2n,n}_{\text{B}}(S) = Gr^n_\gamma(K^{\mathbf{Q}}_0(S))$ comme défini dans SGA6. Ce groupe coïncide avec $CH^n(S) \otimes \mathbf{Q}$ suivant Gillet-Soulé.

***Théorème 1* (Riou)**. — *La cohomologie H^{**}_{B} est représentable dans $SH(S, \mathbf{Q})$:*
Il existe $H_{\text{B},S} \in SH(S, \mathbf{Q})$ tel que pour tout $(n, i) \in \mathbf{Z}^2$,
$$H^{n,i}_{\text{B}}(S) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_S, \mathbb{1}_S(i)[n]).$$

Essentiellement, la K-théorie est représentable instablement par la grassmanienne infinie. Le théorème de Riou consiste à relever les opérations d'Adams dans la catégorie homotopique puis homotopique stable.

Remarque 2. — La construction de Riou s'étend à tout schéma S. La cohomologie motivique n'est alors plus reliée à la K-théorie de Quillen du fait de l'invariance par homotopie : elle est plutôt reliée à la *K-théorie invariante par homotopie.*

1.3. Localisation de Bousfield et définition. — La définition suivante est classique en topologie (localisation de Bousfield) :

Définition 1. — Un spectre $\mathbb{E} \in SH(S, \mathbf{Q})$ est dit :
– H_{B}*-acyclique* si $H_{\text{B}} \wedge \mathbb{E} = 0$.
– H_{B}*-local* si pour tout spectre H_{B}-acyclique $\mathbb{F}$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}, \mathbb{E}) = 0$.

On définit la catégorie des motifs de Beilinson comme le quotient de Verdier :
$$\mathrm{DM}_{\text{B}}(S) = SH(S, \mathbf{Q})/\{\mathbb{E}\ H_{\text{B}}\text{-acyclique}\}.$$

C'est évidemment une catégorie triangulée et monoïdale. D'après la théorie de la localition de Bousfield, $\mathrm{DM}_{\text{B}}(S)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $SH(S, \mathbf{Q})$ formée des objets H_{B}-locaux.

Remarque 3. — En topologie, la catégorie homotopique stable SH_{top} classifie les théories cohomologiques. On dispose notamment du foncteur Einlenberg-Mac Lane
$$D(\mathbf{Z} - mod) \xrightarrow{H} SH_{top}$$
dérivé du foncteur $R \mapsto HR$, cohomologie singulière à coefficients dans R.

Alors, parce que les groupes d'homotopie stable des sphères sont de torsion en degré strictement positifs d'après le théorème de Serre, $H \otimes \mathbf{Q}$ est une équivalence de catégorie :

$$D(\mathbf{Q} - ev) = \mathbf{Q}^{\mathbf{Z}} \simeq SH_{top} \otimes \mathbf{Q}.$$

Ici, $D(\mathbf{Q} - ev)$ est l'analogue de la catégorie dérivée des motifs rationnels, et si on la localise par rapport à $H\mathbf{Q}$, on ne change rien.

PB : comment calculer avec une définition aussi abstraite ?

2. Théorèmes principaux

2.1. Lien avec la K-théorie. — Rappelons que $H_{\text{B},S}$ est un spectre en anneaux :

$$\mu : H_{\text{B},S} \wedge H_{\text{B},S} \to H_{\text{B},S}, \eta : \mathbb{1} \to H_{\text{B},S}$$

satisfaisant les axiomes d'un monoïde dans $SH(S, \mathbf{Q})$ – correspondant au produit en K-théorie algébrique. Le théorème clé dans notre approche est le suivant :

Théorème 2. — *La multiplication $\mu : H_{\text{B}} \wedge H_{\text{B}} \to H_{\text{B}}$ est un isomorphisme.*

C'est analogue au fait que $H_{sing}\mathbf{Q} \wedge H_{sing}\mathbf{Q} = H_{sing}\mathbf{Q}$, bien connu en topologie – c'est faux à coefficients rationnels. Cela résulte essentiellement du fait que la K-théorie est représentable par la Grassmanienne infinie et du calcul de la cohomologie motivique de la grassmanienne infinie.

Corollaire 2.a. — *Soit $\mathbb{E}$ un spectre rationnel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbb{E}$ *est H_{B}-local.*

(ii) $\eta \wedge \mathbb{E} : \mathbb{E} \to H_{\text{B}} \wedge \mathbb{E}$ *est un isomorphisme.*

(iii) $\mathbb{E}$ *admet une structure de H_{B}-module.*

De plus, lorsque (iii) est vérifiée, la structure de H_{B}-module est unique. On en déduit une équivalence de catégorie triangulées monoïdales :

$$\mathrm{DM}_{\text{B}}(S) \simeq H_{\text{B},S}\text{-}\,\mathrm{mod}\,.$$

On en déduit facilement que $\mathrm{DM}_{\text{B}}(S)$ vérifie les axiomes des foncteurs croisés ce qui munit cette catégorie des 6 opérations – elles sont induites par celles de $SH(S, \mathbf{Q})$: le foncteur canonique

$$\pi : SH(S, \mathbf{Q}) \to \mathrm{DM}_{\text{B}}(S)$$

commute aux 6 opérations.

Corollaire 2.b. — *le spectre $H_{\text{B},S}$ est H_{B}-local et le morphisme d'unité $\eta : \mathbb{1}_S \to H_{\text{B},S}$ est une résolution H_{B}-locale.*

Ainsi :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\text{B}}(S)}(\mathbb{1}_S, \mathbb{1}_S(i)[n]) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}(S,\mathbf{Q})}(\mathbb{1}_S, H_{\text{B},S}(i)[n]) = H^{n,i}_{\text{B}}(S).$$

Si $p : X \to S$ est lisse, on pose $M_S(X) = p_! p^!(\mathbb{1}_S)$ dans $\mathrm{DM}_{\text{B}}(S)$. Si X et Y sont projectifs lisses sur S, S régulier, on vérifie facilement grâce au formalisme des 6 opérations :

$$\mathrm{Hom}(M_S(X), M_S(Y)) = H^{2d,d}_{\text{B}}(X \times_S Y) = CH^d(X \times_S Y) \otimes \mathbf{Q}$$

où d est la relative dimension de Y/S. Autrement dit, on a obtenu un foncteur pleinement fidèle :

$$Chow(S)^{op} \to \mathrm{DM}_{\text{B}}(S), X/S \mapsto M_S(X).$$

Remarque 4. — Si S n'est pas de dimension non nulle, cette notion de motifs de Chow est trop restrictive. Elle a été avantageusement étendue par D. Hébert (et aussi Bondarko) en une notion de *motifs de poids* 0.

2.2. Pureté absolue. — On considère une immersion fermée $i : Z \to S$ de codimension c entre schémas réguliers.

Rappelons que d'après le théorème de localisation de Quillen,

$$K_r^Z(S) \simeq K_r(Z).$$

D'après le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch étendu aux K_i supérieurs par Soulé, on obtient de plus un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Gr_\gamma^i K_r^Z(S) \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & Gr_\gamma^{i+c} K_r(Z) \arrow[d, hook] \\ K_r^Z(S) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] & K_r(Z) \otimes \mathbf{Q} \end{tikzcd}$$

En posant $n = 2i - r$, la flèche pointillée définie un isomorphisme canonique :

$$\mathfrak{p}_i : H_{\text{Б},Z}^{n,i}(S) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Б}}^{n+2c,i+c}(Z).$$

Or, utilisant la propriété (A3) des fonteurs croisés :

$$H_{\text{Б},Z}^{n,i}(S) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_S, i_! i^!(\mathbb{1}_S)(i)[n]) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_Z, i^!(\mathbb{1}_S)(i)[n]).$$

Ainsi, $\mathfrak{p}_i^{-1}(1)$ défini une classe fondamentale canonique :

$$\eta_i : \mathbb{1}_Z(-c)[-2c] \to i^!(\mathbb{1}_S)(c)[2c].$$

Théorème 3. — *Le morphisme η_i est un isomorphisme.*

Il s'agit essentiellement d'une reformulation du fait que pour tout schéma lisse X/S, $\mathfrak{p}_{i\times_S X}$ est encore un isomorphisme.

2.3. Constructibilité. —

Définition 2. — On définit la partie constructible de $\mathrm{DM}_{\text{Б}}(S)$ comme la sous-catégorie triangulée épaisse $\mathrm{DM}_{\text{Б},c}(S)$ engendrée par $M_S(X)(i)$, pour $i \in \mathbf{Z}$ et X/S lisse.

On peut vérifier qu'un motif K est constructible si et seulement si il est compact : $\mathrm{Hom}(K, .)$ commute aux sommes infinies. La catégorie ainsi définie est clairement stable par f^*, $\otimes$ et $f_!$. Muni du théorème de pureté absolu, on prouve :

Théorème 4. — *La sous-catégorie $\mathrm{DM}_{\text{Б},c}$ de $\mathrm{DM}_{\text{Б}}$ est stable par les 6 opérations si l'on se restreint aux morphismes de type fini entre schémas excellents.*

La preuve suit la méthode de Gabber. On démontre en effet que $\mathrm{DM}_{\text{Б}}$ vérifie la descente cohomologique pour la h-topologie (4) Par un dévisage facile, on se ramène à montrer que la constructibilité est stable par j_* pour $j : (S - Z) \to S$ une immersion ouverte. Si S et Z sont réguliers, cela résulte directement de la pureté absolue et de l'axiome (A3). On s'y ramène par un dévissage qui suit essentiellement la méthode de Gabber.

2.3.a. — Soit R un motif sur S. On pose $D_S = \mathbf{R}\underline{Hom}(., R)$, vu comme un endofoncteur de $\mathrm{DM}_{\text{Б},c}(S)$. Rappelons qu'on dit que R est dualisant si le morphisme *cher à Cartan* :

$$Id \to D_S^2$$

est un isomorphisme.

Théorème 5. — *Supposons S régulier excellent.*

1. *Le motif $\mathbb{1}_S$ est dualisant.*
2. *Pour tout morphisme $f : X \to S$ séparé de type fini, $f^!(\mathbb{1}_S)$ est dualisant.*

On obtient donc un foncteur dualisant D_X qui échange les paires $(f_*, f_!)$ et $(f^*, f^!)$.

4. Elle est engendrée par les recouvremennts propres et Zariski. Rappelons qu'elle est plus fine que les topologies étales et fppf.

On a obtenu un formalisme des 6 foncteurs complets, pour la partie constructible des motifs. Avec l'existence d'une filtration par les poids évoquée précédemment, ce sont les résultats théoriques essentiels (de notre point de vue) de la théorie des motifs mixtes. En conclusion, j'aimerai terminer par un travail en cours qui permet de lier cette théorie à la théorie étale, et qui donne un nouveau regard sur les motifs de Beilinson.

3. Motifs étales et réalisation

3.1. Construction de Morel. — Morel avait proposé d'utiliser la catégorie suivante pour définir les motifs :
- $Sh_{\text{ét}}(\mathscr{L}_S, \Lambda)$: faisceaux étales de Λ-modules sur le site lisse-étale.
- $D(Sh_{\text{ét}}(\mathscr{L}_S, \Lambda))$: sa catégorie dérivée.
- $D_{\mathbf{A}^1,\text{ét}}(S, \Lambda)$: catégorie déduite de la précédente par $\mathbf{A}^1$-localisation et $\mathbf{P}^1$-stabilisation.

Par construction, on dispose d'un foncteur canonique :

$$SH(S) \to D_{\mathbf{A}^1,\text{ét}}(S, \Lambda)$$

dérivé du foncteur qui à un faisceau simplicial $\mathcal{F}$ associe :

$$\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}_{\text{ét}} \rightsquigarrow \Lambda[\mathcal{F}_{\text{ét}}] \rightsquigarrow C(\Lambda[\mathcal{F}_{\text{ét}}]).$$

Théorème 6. — *Il existe une flèche pointillée essentiellement unique qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} SH(S) \arrow[r] \arrow[d] & D_{\mathbf{A}^1,\text{ét}}(S, \mathbf{Q}) \arrow[dl, dashed, "\psi_S"] \\ \mathrm{DM}_{\mathrm{B}}(S) & \end{tikzcd}$$

et ψ_S est une équivalence de catégories.

Ce théorème concerne la partie rationnelle. Pour la torsion, il faut un résultat plus fin.

3.2. Théorème de rigidité. — Rappelons le théorème de Suslin et Voevodsky :

Théorème 7. — *Soit k un corps, Λ un anneau tel que $char(k) \subset \Lambda^\times$.*
Soit F est un faisceau étale sur $\mathscr{L}_k$ de Λ-modules tel que :
- *F admet des transferts (*i.e.* action des correspondances finies).*
- *F est invariant par homotopie.*

Alors, F est localement constant.

Après Voevodsky, on en déduit le résultat suivant :

$$DM_{\text{ét}}(k, \Lambda) \simeq D(\Lambda[G_k]\text{-}\operatorname{mod})$$

où G_k est le groupe de Galois absolu de k.

3.2.a. — On peut définir la notion de faisceau étale avec transferts sur une base arbitraire (même singulière). Utilisant la méthode de Morel-Voevodsky, on déduit de la catégorie dérivée correspondante une catégorie $\mathbf{A}^1$-localisé et $\mathbf{P}^1$-stabilisée dite des *motifs étales* :

$$DM_{\text{ét}}(S, \Lambda).$$

On obtient de plus un foncteur canonique :

$$\rho_S : DM_{\text{ét}}(S, \Lambda) \to D(S_{\text{ét}}, \Lambda)$$

dérivé du foncteur qui à un faisceau étale avec transferts associe le faisceau étale sur $S_{\text{ét}}$ évident.

Théorème 8. — *Supposons $char(S) \subset \Lambda^\times$.*
Le foncteur ρ_S envoie les motifs étales constructibles dans $D^b_c(S_{\text{ét}}, \Lambda)$ et induit une équivalence de catégories :

$$DM_{\text{ét},c}(S, \Lambda) \to D^b_c(S, \Lambda).$$

Ce résultat donne immédiatement le foncteur de réalisation l-adique pour un premier $l \neq p$, et S un $\mathbf{Z}[1/p]$-schéma géométriquement unibranche [5]. En effet, on définit :

$$DM_{\text{ét},c}(S) \to DM_{\text{ét},c}(S)^{\wedge_l} \subset D^b_c(S, \mathbf{Z}_l).$$

Prenant la partie rationnelle de cette flèche, on obtient :

$$\rho^l_S : \mathrm{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \simeq DM_{\text{ét},c}(S) \otimes \mathbf{Q} \to D^b_c(S, \mathbf{Q}_l).$$

Remarque 5. — 1. Cette flèche n'est pas essentiellement surjective en général – elle tombe dans la « partie géométrique » de la catégorie d'Eckedhal.

2. Il est facile de voir que ρ^l commute aux 6 opérations.

   Notons par ailleurs que ρ^l_S admet un adjoint à droite, disons σ^l_S ; le motif de Beilinson $\sigma_l(\mathbb{1}_S)$ représente la cohomologie étale l-adique continue. La question de savoir si σ^l commute à i^* pour i une immersion fermée est cruciale - elle est vraie pour i une immersion entre schémas d'égales caractéristiques. Si on le savait pour l'immersion du point fermé de $\mathrm{Spec}\,(W(k))$, on pourrait en déduire un isomorphisme entre cohomologie étale l-adique et cohomologie rigide d'un $\mathbb{F}_p$-schéma de type fini (quitte à tensoriser avec un corps suffisament grand).

3.2.b. — Ainsi, le foncteur de réalisation ρ^l est le foncteur naturel qui va de la partie rationnelle d'une catégorie triangulée dans sa partie l-adique rationnelle.

Rappelons que le foncteur naturel :

$$D(\mathbf{Q} - ev) \to D(\mathbf{Q}_l - ev)$$

est conservatif si l'on se restreint aux complexes parfaits.

Ceci permet d'espérer par analogie que ρ^l est conservatif, résultat qui serait fondamental pour la théorie des motifs.

Références

[Ayo07] J. Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (I)*, Astérisque, vol. 314, Soc. Math. France, 2007.

[Beĭ87] A. A. Beĭlinson, *Height pairing between algebraic cycles*, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, pp. 1–25. MR 923131 (89h :11027)

[Jar00] J. F. Jardine, *Motivic symmetric spectra*, Doc. Math. **5** (2000), 445–553.

[MV99] F. Morel and V. Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Publ. Math. IHES **90** (1999), 45–143.

[Voe96] V. Voevodsky, *Homology of schemes*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), no. 1, 111–153.

[Voe00] V. Voevodsky, *Cohomological theory of presheaves with transfers*, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 87–137. MR MR1764200

Janvier 2011

Frédéric Déglise, LAGA, CNRS (UMR 7539), Université Paris 13, Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/`

5. Cette hypothèse ne sert que dans la théorie des tranferts, et la théorie de l'intersection qui lui est sous-jacente. On peut étendre la définition de $DM_{\text{ét},c}(S)$ pour obtenir la réalisation en toute généralité.