SUITE SPECTRALE DU CONIVEAU ET t-STRUCTURE HOMOTOPIQUE

par

Frédéric Déglise

Résumé. — Dans cette note, nous montrons que la suite spectrale du coniveau associée à un spectre motivique sur un corps parfait coïncide avec sa suite spectrale d'hypercohomologie pour la t-structure homotopique.

Abstract **(Coniveau spectral sequence and homtopy t-structure)**
In this note, we show that the coniveau spectral sequence associated with a motivic spectrum over a perfect field coincides with its hypercohomology spectral sequence with respect to the homotopy t-structure.

Pour Christophe Soulé,
en témoignage de mon admiration et de ma gratitude.

Table des matières

Introduction

Depuis Bloch et Ogus, généralisant des considérations initiales de Grothendieck, la suite spectrale du coniveau fait partie de l'arsenal classique d'une bonne théorie

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 14F42, (14C15, 14C35).
Mots clefs. — motifs mixtes, complexes motiviques, modules de cycles, filtration par coniveau.

L'auteur est partiellement financé par l'ANR, projet no. ANR-07-BLAN-0142 ≪ Méthodes à la Voevodsky, motifs mixtes et Géométrie d'Arakelov ≫.

cohomologique des variétés algébriques. Il est naturel de se demander quelle est son interprétation motivique.

Le premier indice de ce lien est fourni par le théorème fondamental de Voevodsky, sur lequel il base sa théorie des complexes motiviques : la suite spectrale du coniveau associée à la cohomologie d'un faisceau invariant par homotopie avec transferts F dégénère en E_1 et fournit une résolution de Gersten de F. Pour aller plus loin, il faut se rappeler qu'en tel faisceau est un objet du cœur d'une t-structure naturelle sur la catégorie triangulée des complexes motiviques : la *t-structure homotopique*.

Dans cet article nous donnons une interprétation naturelle du théorème de Voevodsky : la suite spectrale du coniveau associée à tout complexe motivique coïncide à partir du terme E_1 avec sa suite spectrale d'hypercohomologie induite par la t-structure homotopique (cf Th. 4.1). Ce résultat est aussi une extension d'un théorème de Bloch-Ogus ([**BO74**]) qui concerne le cas du complexe motivique associé à la cohomologie de De Rham (suivant [**CD12**]).

La preuve reprend un argument classique dû à Deligne (la filtration décalée, [**Del71**, Sec. 1.3]). Beaucoup d'autres résultats d'interprétation de la suite spectrale du coniveau en termes hyper-cohomologiques sont à dénombrer dans la littérature. Plus que tout autre, Bondarko a en particulier obtenu indépendamment notre résultat par des méthodes différentes (voir [**Bon10**]).

Cette note est une suite naturelle à l'étude de la relation entre faisceaux avec transferts de Voevodsky et modules de cycles de Rost, développée dans [**Dég11**]. On rappelle le contexte de *op. cit.* dans la première section. Les sections 2, 3 et 4 contiennent la preuve du théorème annoncé, après quelques rappels et compléments sur les couples exacts (section 2), et l'introduction des deux suites spectrales en jeu (section 3). La dernière section contient quelques exemples, notamment à travers la notion de théorie de Weil mixte introduite dans [**CD12**].

Notations

Dans tout cet article, k est un corps parfait fixé. Les schémas sont toujours supposés, sauf mention explicite du contraire, être des k-schémas de type fini. On note $\mathscr{L}_k$ la catégorie des schémas lisses et $\mathscr{L}_k^{cor}$ la catégorie des correspondances finies.

1. Quelques rappels motiviques

Cette section a pour but de rappeler la théorie des complexes motiviques de Voevodsky et les compléments donnés dans [**Dég11**]. Les références indiquées concernent donc *op. cit.*

1.1. — *Complexes motiviques.*– Voevodsky, suivant une conjecture de Beilinson, a introduit la catégorie des *complexes motiviques* $DM^{eff}(k)$. Sa construction se fait en deux étapes :

– (cf *Sec. 1.1*) on définit la catégorie des faisceaux avec transferts : les faisceaux Nisnevich de groupes abéliens sur $\mathscr{L}_k$ munis d'une extension à $\mathscr{L}_k^{cor}$. Cette catégorie est abélienne monoïdale de Grothendieck et on la note $Sh^{tr}(k)$. Le faisceau avec transferts représenté par un schéma lisse X est noté $\mathbb{Z}^{tr}(X)$.
– (cf *Déf. 4.2*) on définit $DM^{eff}(k)$ comme la $\mathbb{A}^1$-localisation de la catégorie dérivée $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$.

La catégorie $DM^{eff}(k)$ est non seulement triangulée mais aussi monoïdale. Elle est de plus équipée d'une t-structure dite *homotopique* dont le cœur est formé des faisceaux avec transferts invariants par homotopie. [1] On note $HI(k)$ la sous-catégorie pleine de $Sh^{tr}(k)$ formée par ces faisceaux, appelés simplement *faisceaux homotopiques*, et on considère

$$\underline{\mathrm{H}}^0 : DM^{eff}(k) \to HI(k)$$

le foncteur cohomologique associée à la t-structure homotopique. Rappelons en effet que d'après les théorèmes fondamentaux de Voevodsky, on peut aussi décrire la catégorie $DM^{eff}(k)$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ formée des complexes de faisceaux avec transferts dont les faisceaux de cohomologie sont invariants par homotopie (cf *Prop. 4.4 et Th. 5.1*).

1.2. — *Spectres motiviques.*– (cf *Sec. 4.2*) Comme dans la théorie des motifs purs de Grothendieck, la catégorie effective vient avec une catégorie *stable*, dans laquelle on inverse le motif de Tate :

$$\mathbb{1}(1) := \mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{P}^1_k)/\mathbb{Z}^{tr}(\{\infty\})[-2]. \,^{(2)}$$

Dans le cadre des complexes motiviques, ce procédé s'appelle la $\mathbb{P}^1$-stabilisation. [3] On obtient la catégorie triangulée monoïdale des *spectres motiviques* (ou complexes motiviques stables), notée $DM(k)$. Elle est munie d'une adjonction de catégories triangulées :

$$\Sigma^\infty : DM^{eff}(k) \leftrightarrows DM(k) : \Omega^\infty \tag{1.2.a}$$

telle que Σ^∞ est monoïdal et envoie le motif de Tate sur un objet inversible de $DM(k)$. [4] Pour tout schéma lisse X, on pose : $M(X) := \Sigma^\infty \mathbb{Z}^{tr}(X)$. Un spectre

1. Pour tout schéma lisse X, $F(X) \to F(\mathbb{A}^1_X)$ est un isomorphisme.
2. C'est l'inverse du motif de Lefschetz considéré par Grothendieck. La différence entre l'approche de Voevodsky et celle de Grothendieck vient du fait que Voevodsky considère des motifs homologiques (*i.e.* covariants) alors que dans la théorie des motifs purs, les motifs sont cohomologiques (*i.e.* contravariants).
3. Il est notablement plus évolué que le procédé trivial pour inverser un objet dans une catégorie monoïdale afin de permettre de conserver les informations homotopiques de la catégorie sous-jacente à la catégorie dérivée des faisceaux avec transferts – notamment en vu de définir des foncteurs dérivés tels que le produit tensoriel. La construction est empruntée aux topologues et utilise le concept de spectres.
4. La construction est telle que $DM(k)$ est la catégorie homotopique universelle satisfaisant ces propriétés.

motivique $\mathbb{E}$ définit une théorie cohomologique bigraduée sur les schémas lisses en posant :

$$\mathbb{E}^{i,n}(X) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), \mathbb{E}(n)[i]).$$

On peut étendre de manière unique la t-structure homotopique à $DM(k)$ de telle manière que les foncteurs Ω^∞ et produit tensoriel par $\mathbb{1}\{1\} := \Sigma^\infty\,\mathbb{1}(1)[1]$ sont t-exacts (cf *Sec. 5.2*).

1.3. — *Modules homotopiques (avec transferts).*– Un *module homotopique* est un faisceau homotopique gradué F_* muni d'une famille d'isomorphismes :

$$F_n \to (F_{n+1})_{-1}$$

où l'opération $?_{-1}$ est l'opération de contraction [5] de Voevodsky (cf *Def. 1.17*). On note $HI_*(k)$ la catégorie des modules homotopiques.

À un spectre homotopique $\mathbb{E}$, objet de $DM(k)$, on associe un module homotopique $\underline{\mathrm{H}}^0_*(\mathbb{E})$ tel que :

$$\underline{\mathrm{H}}^0_n(\mathbb{E}) = \underline{\mathrm{H}}^0\left(\Omega^\infty(\mathbb{E}\{-n\})\right).$$

Le foncteur ainsi défini $\underline{\mathrm{H}}^0_* : DM(k) \to HI_*(k)$ établit une équivalence de catégorie entre $HI_*(k)$ et le cœur homotopique de $DM(k)$ (cf *Th. 5.11*).

1.4. — *Modules de cycles.*– On appelle *corps de fonctions* toute extension de corps E/k de degré de transcendance finie. Un telle extension peut-être vue comme le corps des fonctions d'un k-schéma lisse connexe X (k est parfait). Si de plus F_* est un module homotopique, on pose :

$$\hat{F}_*(E) := \varinjlim_{U \subset X} F_*(U)$$

où U parcourt l'ensemble cofiltrant des ouverts non vides de X. On a ainsi défini un foncteur covariant $\hat{F}_*$ de la catégorie des corps de fonctions dans la catégorie des groupes abéliens gradués. Il admet de plus une fonctorialité beaucoup plus riche : une structure de module de cycles au sens de Rost (cf *Par. 3.1*). Muni de cette structure, on appelle $\hat{F}_*$ la *transformée générique* de F_*. Le théorème central de *op. cit.*, Th. 3.7, montre que cette transformée générique établit une équivalence de catégorie entre $HI_*(k)$, cœur homotopique de $DM(k)$, et la catégorie des modules de cycles.

La théorie de Rost permet d'associer à un module de cycles ϕ et un schéma X (non nécessairement lisse) un complexe de groupes abéliens gradués $C^*(X, \phi)$ dont la cohomologie se comporte en tous points comme les groupes de Chow. On appelle $C^*(X;\phi)$ le *complexe des cycles* à coefficients dans ϕ et on pose : $A^p(X;\phi) = H^pC^*(X;\phi)$.

Considérant à nouveau un module homotopique F_*, il résulte du Théorème 3.7 de *op. cit.* et d'un résultat de Rost (voir *Par. 3.2*) que pour tout schéma lisse, le complexe de cycles $C^*(X;\hat{F}_*)$ calcule la cohomologie Nisnevich de F : on dispose d'un isomorphisme canonique de groupes abéliens gradués :

$$\epsilon_X : H^p_{\mathrm{Nis}}(X; F_*) \to A^p(X; \hat{F}_*), \tag{1.4.a}$$

5. En clair : $F_{-1}(X) = F(\mathbb{G}_m \times X)/F(X)$.

naturel en X, par rapport à la contravariance pour les correspondances finies et à la covariance pour les morphismes projectifs (voir *Cor. 3.12*).

Remarque 1.5. — L'isomorphisme précédent traduit le fait que le faisceau F_* admet une résolution de Gersten (ou encore est de Cohen-Macaulay dans le sens de [**Har66**, IV, §2, Def. p. 238] lorsqu'on le restreint au petit site Zariski de tout schéma lisse).

2. Couples exacts et diagrammes spectraux

2.1. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne.

Rappelons qu'un couple exact dans $\mathscr{A}$ est la donnée d'objets bigradués $E_1^{p,q}$ et $D_1^{p,q}$, pour des indices $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, et de morphismes homogènes

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[rr, "(1,-1)", "\alpha"'] & & D_1 \arrow[dl, "\beta"', "(0,0)"] \\
& E_1 \arrow[ul, "\gamma"', "(1,0)"] &
\end{tikzcd}$$

dont les bidegrés sont indiqués sur le diagramme. Rappelons (*cf.* [**McC01**, 2.3]) que l'on associe à un tel couple exact une suite spectrale dont la première page est $E_1^{p,q}$ avec pour différentielles les morphismes $d_1 = \gamma \circ \beta$.

Considérons maintenant un complexe K à coefficients dans $\mathscr{A}$. On suppose donnés pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$ les complexes et morphismes suivants :

(2.1.a)
$$\begin{tikzcd}
& F^{p+1}K \arrow[dl, hook, "i^{p+1}"'] \arrow[rr, hook, "f^p"] & & F^pK \arrow[dl, two heads, "\pi^p"] \arrow[dr, hook, "i^p"] & \\
K \arrow[dr, two heads, "k^{p+1}"'] & & G^pK \arrow[dl, hook, "\tilde{\pi}^p"'] & & K \arrow[dl, two heads, "k^p"] \\
& T^{p+1}K \arrow[rr, two heads, "\tilde{f}^p"'] & & T^pK &
\end{tikzcd}$$

On demande que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, les couples (i^p, k^p), (f^p, π^p), $(\tilde{f}^p, \tilde{\pi}^p)$ forment des suites exactes courtes dans la catégorie abélienne $\mathrm{C}(\mathscr{A})$. On notera en particulier que F^*K (resp. T^*K) définit une filtration (resp. cofiltration) de K. Bien entendu, l'une détermine l'autre.

Il en résulte que, passant à la catégorie dérivée $\mathscr{T} := \mathrm{D}(\mathscr{A})$, on obtient le diagramme suivant

(2.1.b)
$$\begin{tikzcd}
& F^{p+1}K \arrow[dl, "i^{p+1}"'] \arrow[rr, "f^p"] & & F^pK \arrow[dl, "\pi^p"] \arrow[dr, "i^p"] & \\
K \arrow[r, phantom, "*"] \arrow[dr, "k^{p+1}"'] & {} & G^pK \arrow[ul, "+1"'] \arrow[dl, "\tilde{\pi}^p"'] & {} \arrow[r, phantom, "*"] & K \arrow[dl, "k^p"] \\
& T^{p+1}K \arrow[uu, "+1"'] \arrow[rr, "\tilde{f}^p"'] & & T^pK \arrow[uu, "+1"'] \arrow[ul, "+1"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les triangles marqués d'une étoile sont distingués et les autres sont commutatifs. Autrement dit, on obtient un *octaèdre* dans la catégorie triangulée $\mathscr{T}$.

Supposons donné par ailleurs un foncteur homologique [(6)] $\varphi : \mathrm{D}(\mathscr{A}) \to \mathscr{B}$, et posons $\varphi^n = \varphi(.[n])$. On peut alors définir des objets bigradués :

$$D_1^{p,q} = \varphi^{p+q}(F^pK), \tilde{D}_1^{p,q} = \varphi^{p+q}(T^{p+1}K), E_1^{p,q} = \varphi^{p+q}(G^pK), E_\infty^{p,q} = \varphi^{p+q}(K).$$

pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Par application du foncteur cohomologique φ au diagramme précédent, on obtient un diagramme commutatif d'objets bigradués, formé de morphismes homogènes,

$$\begin{tikzcd}
& D_1 \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl] & & D_1 \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr] & \\
E_\infty \arrow[dr] & & E_1 \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[dl, "\tilde{\gamma}"] \arrow[u, phantom, "(1)"] \arrow[d, phantom, "(2)"] & & E_\infty \arrow[dl] \\
& \tilde{D}_1 \arrow[uu, "r"] \arrow[rr, "\tilde{\alpha}"'] & & \tilde{D}_1 \arrow[uu, "r"'] \arrow[ul, "\tilde{\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les triangles (1) et (2) forment un couple exact (avec les conventions rappelées ci-dessus). On reconnait dans ce diagramme commutatif un cas particulier de ≪ système de Rees ≫ suivant la terminologie introduite par Eilenberg et Moore (*cf.* [**McC01**, 3.1]).

En particulier, la commutativité du diagramme montre que les suites spectrales associées respectivement à (1) et (2) sont *égales* — l'assertion concernant les différentielles de la première page est par exemple immédiate. Notons enfin que lorsque la filtration F^*K est bornée (ou ce qui revient au même T^*K), le terme à l'infini de cette suite spectrale est ce que nous avons noté E_∞ et la suite spectrale converge.

Remarque 2.2. — 1. Un cas particulier fondamental est celui où le foncteur φ est le foncteur (co)homologique $H^0 : \mathrm{D}(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ canonique. La suite spectrale obtenue ci-dessus est alors la suite spectrale du complexe filtré (K, F^*K) (*cf.* [**Del71**]).

2. Suivant la construction ci-dessus, on reconnait donc dans la donnée d'un système de Rees la trace d'un octaèdre, en l'occurence le diagramme (2.1.b).
3. Plus généralement, c'est la famille des diagrammes (2.1.b) qui est fondamentale pour définir la suite spectrale précédente. Ainsi, le procédé décrit ci-dessus à partir de ces diagrammes a un sens dans nimporte quelle catégorie triangulée, indépendamment de la manière dont on a donné naissance à ces diagrammes. Si on se place par ailleurs dans une catégorie ≪ triangulée enrichie ≫ $\mathscr{T}$ – c'est-à-dire une ∞-catégorie stable dans le sens de [**Lur09**], comme par exemple la catégorie homotopique d'une DG-catégorie, ou encore la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles stable – on peut associer canoniquement à la donnée des morphismes (f^p, i^p) (resp. $(\tilde{f}^p, \tilde{i}^p)$), des diagrammes du type (2.1.b) en utilisant le foncteur *cofibre homotopique* (resp. *fibre homotopique*).

6. *i.e.* covariant et triangulé

4. Remarquons que tout foncteur triangulé $\psi : \mathscr{T}' \to \mathscr{T}$ envoie une famille de diagrammes (2.1.b) sur une famille du même type. En général, le foncteur (co)homologique φ se décompose en $H^0 \circ \psi$ où ψ est un foncteur triangulé et H^0 est le foncteur (co)homologique d'une t-structure donnée sur $\mathscr{T}$. Dans le cadre qui suit, ψ est un foncteur dérivé (à droite). Les catégories $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont les catégories homotopiques de catégories de modèles stables. Il y a lieu dans ce cas de remplacer l'hypothèse que $\tilde{f}^p$ est induit par un épimorphisme de complexes par l'hypothèse que c'est une fibration [(7)] pour la catégorie de modèles sous-jacente à $\mathscr{T}$. Ce cadre correspond à une « tour de fibrations » et à la suite spectrale qui lui est associée en topologie algébrique. La question de la convergence de cette suite spectrale est alors reliée au problème de savoir si la flèche canonique

$$K \to \mathrm{holim}_{p \in \mathbb{Z}} T^p K$$

est une équivalence faible.

Remarquons que dualement, si ψ est un foncteur dérivé à gauche, il y a lieu de supposer que f^p est une cofibration ; ce cas correspond dans le cadre d'une catégorie de modèles abstraite au cas particuliers des complexes filtrés dans une catégorie dérivée. Dans ce cas, la convergence est reliée à la flèche canonique

$$\mathrm{hocolim}_{p \in \mathbb{Z}} F^p K \to K.$$

3. Suites spectrales : coniveau et hypercohomologie

3.1. — Pour les deux prochains exemples, on fixe un schéma lisse X et un spectre motivique $\mathbb{E}$. On pose $\mathbb{E}_0 = \Omega^\infty \mathbb{E}$ vu comme complexe de faisceau Nisnevich sur $\mathscr{L}_k$.
Suite spectrale n°1.– La t-structure homotopique sur $DM(k)$ permet d'obtenir un diagramme du type (2.1.b) dans la catégorie triangulée $DM(k)$:

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\leq -p-1}\mathbb{E} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \tau_{\leq -p}\mathbb{E} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{E} \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "*"] & & \underline{\mathrm{H}}_*^{-p}(\mathbb{E})[p] \arrow[ul, "+1"'] \arrow[dl] \arrow[u, phantom, "*"] \arrow[d, phantom, "*"] & & \mathbb{E} \arrow[dl] \arrow[l, phantom, "*"] \\
 & \tau_{>-p-1} \arrow[uu, "+1"] \arrow[rr] & & \tau_{>-p-1} \arrow[ul, "+1"'] \arrow[uu, "+1"'] &
\end{tikzcd}$$

Si X est un schéma lisse, on obtient donc après application du foncteur (co)homologique $\mathrm{Hom}(M(X), .)$ un couple exact et une suite spectrale :

$$'E_{1,t}^{p,q} = \mathrm{Hom}(M(X), \underline{\mathrm{H}}_*^{-p}(\mathbb{E})[2p+q]) \Rightarrow \mathrm{Hom}(M(X), \mathbb{E}[p+q])$$

qui est la suite spectrale d'hypercohomologie associée à la t-structure homotopique.

---

7. On voir alors G^p comme la cofibre homotopique de $\tilde{f}^p$, qui est un objet fibrant. L'avantage est qu'il n'y a alors par lieu de dériver le foncteur de Quillen à droite sous-jacent à ψ.

Suivant l'usage, on renumérote cette suite spectrale pour qu'elle commence au terme E_2 suivant la règle :

$$E_{2,t}^{p,q} = {}'E_{1,t}^{-q,p+2q}.$$

Un petit calcul donne alors la forme finale suivante pour cette suite spectrale :

$$E_{2,t}^{p,q} := H^p(X, \underline{\mathrm{H}}_0^q\,\mathbb{E}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{E}_0).$$

Remarquons que cette suite spectrale est convergente puisqu'elle est concentrée dans la colonne $0 \leq p \leq \dim X$.

Suite spectrale n°2.– Rappelons [8] qu'un drapeau de X est une suite décroissante $(Z^p)_{p\in\mathbb{N}}$ de sous-schémas fermés de X telle que $\mathrm{codim}_X(Z^p) \geq p$. L'ensemble des drapeaux de X, ordonné par l'inclusion termes à termes, est filtrant. On le note $\mathrm{Drap}(X)$.

Étant donné un tel drapeau, on peut considérer le diagramme suivant dans la catégorie des faisceaux avec transferts :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}^{tr}(X-Z^p) \arrow[dl, hook, "i_{p*}"'] \arrow[rr, hook, "f_{p*}"] & & \mathbb{Z}^{tr}(X-Z^{p+1}) \arrow[dl, "\pi_p"'] \arrow[dr, hook, "i_{p+1*}"] & \\
\mathbb{Z}^{tr}(X) \arrow[dr, "k_p"'] & & \mathbb{Z}^{tr}(X-Z^{p+1}/X-Z^p) \arrow[dl, hook, "\tilde{\pi}_p"'] & & \mathbb{Z}^{tr}(X) \arrow[dl, "k_{p+1}"] \\
& \mathbb{Z}^{tr}(X/X-Z^p) \arrow[rr, two heads, "\tilde{f}_p"'] & & \mathbb{Z}^{tr}(X/X-Z^{p+1}) &
\end{tikzcd}$$

Les morphismes f^p et i^p désignent les immersions ouvertes canoniques. On obtient donc un diagramme du type (2.1.a), à ceci près que la filtration donnée par f_{p*} est décroissante. Ce diagramme est naturellement fonctoriel (contravariant) par rapport à l'inclusion des drapeaux. Il induit donc un diagramme commutatif du type (2.1.b) dans la catégorie $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$. En prenant son image par le foncteur triangulé

$$\mathrm{D}(Sh^{tr}(k)) \to DM^{eff}(k) \to DM(k),$$

on obtient donc un diagramme de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
& M(X-Z^p) \arrow[dl, "i_{p*}"'] \arrow[rr, "f_{p*}"] & & M(X-Z^{p+1}) \arrow[dl, "\pi_p"'] \arrow[dr, "i_{p+1*}"] & \\
M(X) \arrow[dr, "k_p"'] \arrow[r, phantom, "*"] & & M(X-Z^{p+1}/X-Z^p) \arrow[ul, "+1"'] \arrow[dl, "\tilde{\pi}_p"'] \arrow[u, phantom, "*"] \arrow[d, phantom, "*"] & & M(X) \arrow[dl, "k_{p+1}"] \arrow[l, phantom, "*"] \\
& M(X/X-Z^p) \arrow[uu, "+1"] \arrow[rr, "\tilde{f}_p"'] & & M(X/X-Z^{p+1}) \arrow[ul, "+1"] \arrow[uu, "+1"'] &
\end{tikzcd}$$

Considérons un spectre motivique $\mathbb{E}$. Appliquant le foncteur $\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_{DM(k)}(.,\mathbb{E})$ au diagramme précédent, on obtient un diagramme dans la catégorie triangulée $\mathrm{D}(\mathscr{A}b)$

8. Cette définition est classique ; on se réfère à [**Dég08**, section 3], pour plus de détails.

qui est précisément de la forme (2.1.b) où l'on a posé :

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X), \mathbb{E}), & F^pK &= \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X/X - Z^p), \mathbb{E}), \\ T^pK &= \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X - Z^p), \mathbb{E}), & G^pK &= \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X - Z^{p+1}/X - Z^p), \mathbb{E}). \end{aligned}$$

Le diagramme ainsi obtenu est naturel covariant par rapport aux inclusions de drapeaux. Comme les limites inductives filtrantes sont exactes dans $\mathrm{D}(\mathscr{A}b)$, on en déduit un diagramme de la forme (2.1.b) avec :

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X), \mathbb{E}), \\ F_c^pK &= \varinjlim_{Z^* \in \mathrm{Drap}(X)} \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X/X - Z^p), \mathbb{E}) \\ T_c^pK &= \varinjlim_{Z^* \in \mathrm{Drap}(X)} \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X - Z^p), \mathbb{E}), \\ G_c^pK &= \varinjlim_{Z^* \in \mathrm{Drap}(X)} \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X - Z^{p+1}/X - Z^p), \mathbb{E}). \end{aligned}$$

Après application du foncteur (co)homologique canonique de $\mathrm{D}(\mathscr{A}b)$, on en déduit donc une suite spectrale :

$$E_{1,c}^{p,q} := \varinjlim_{Z^* \in \mathrm{Drap}(X)} \mathbb{E}^{p+q}(X - Z^{p+1}/X - Z^p) \Rightarrow \mathbb{E}^{p+q}(X)$$

qui n'est autre que le suite spectrale du coniveau associée à la théorie cohomologique représentée par $\mathbb{E}$ (voir [**BO74**] pour la référence originale). Notons que cette suite spectrale est convergente puisqu'un drapeau de X est de longeur bornée par la dimension de X.

4. Théorème de comparaison

Dans [**Dég12b**, Prop. 2.7(ii)], on démontre qu'il existe un isomorphisme canonique de complexes de groupes abéliens :

$$E_{1,c}^{*,q} \simeq C^*(X, \underline{\hat{\mathrm{H}}}_*^q(\mathbb{E}))_0$$

où le membre de droite est le complexe de cycles (en degré 0) à coefficients dans le module de cycles $\underline{\hat{\mathrm{H}}}_*^q(\mathbb{E})$.

On obtient donc la forme suivante de la suite spectrale du coniveau :

$$E_{2,c}^{p,q} = A^p(X, \underline{\hat{\mathrm{H}}}_*^q(\mathbb{E}))_0 \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{E}_0)$$

D'après l''isomorphisme (1.4.a), on en déduit donc pour tout couple d'entier (p, q) un isomorphisme de groupes abéliens :

$$\varphi_2^{p,q} : E_{2,t}^{p,q} \to E_{2,c}^{p,q}.$$

Théorème 4.1. — *La famille d'isomorphismes $\varphi_2^{p,q}$ est compatible aux différentielles des deux suites spectrales définies ci-dessus.*

De plus, elle induit de proche en proche des isomorphismes compatibles aux différentielles $\varphi_r^{p,q} : E_{r,t}^{p,q} \to E_{r,c}^{p,q}$ pour tout $r \geq 2$.

Démonstration. — Puisque les deux suites spectrales sont concentrées en degrés $0 \leq p \leq \dim X$, on peut supposer que E est borné inférieurement pour la t-structure homotopique.

Soit X_{Nis} le site des X-schémas étales muni de la topologie de Nisnevich. Soit $\tilde{X}_{\mathrm{Nis}}$ la catégorie des faisceaux abéliens sur X_{Nis}. Si V/X est un schéma étale, on note $\mathbb{Z}_X(V)$ le faisceau de groupes abéliens libres sur X_{Nis} représenté par V.
Soit K la restriction de $\mathbb{E}_0$ à X_{Nis}. Par hypothèse, K est borné inférieurement. Il existe donc une résolution de Cartan-Eilenberg $I \to K$ où I est un complexe quasi-isomorphe à K, dont les composantes sont des objets injectifs de $\tilde{X}_{\mathrm{Nis}}$. Ainsi, pour tout X-schéma étale V, on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\tilde{X}_{\mathrm{Nis}})}(\mathbb{Z}_X(V), I[n]) \to \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(V), \mathbb{E}[n]). \tag{4.1.a}$$

Puisque le foncteur de restriction à X_{Nis} est exact, la suite spectrale $E^{p,q}_{2,t}$ est canoniquement isomorphe à la suite spectrale d'hypercohomologie Nisnevich du complexe I – *i.e.* associée au foncteur cohomologique $\mathrm{R}\Gamma$, foncteur dérivé du foncteur sections globales.

Soit $(Z^p)_{p\in\mathbb{N}}$ un drapeau de X. On obtient alors un diagramme du type (2.1.a) dans la catégorie $\tilde{X}_{\mathrm{Nis}}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_X(X-Z^p) \arrow[rr, hook, "f_{p*}"] \arrow[dl, hook, "i_{p*}"'] & & \mathbb{Z}_X(X-Z^{p+1}) \arrow[dl, "\pi_p"] \arrow[dr, hook, "i_{p+1*}"] & \\
\mathbb{Z}_X(X) \arrow[dr, "k_p"'] & & \mathbb{Z}_X(X-Z^{p+1}/X-Z^p) \arrow[dl, hook, "\tilde{\pi}_p"'] & & \mathbb{Z}_X(X) \arrow[dl, "k_{p+1}"] \\
 & \mathbb{Z}_X(X/X-Z^p) \arrow[rr, two heads, "\tilde{f}_p"'] & & \mathbb{Z}_X(X/X-Z^{p+1}) &
\end{tikzcd}$$

Ce digramme donne lieu à son tour à une octaèdre (du type (2.1.b)) dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(\tilde{X}_{\mathrm{Nis}})$. D'après (4.1.a), la suite spectrale associée à ce dernier diagramme pour le foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}(., I)$ est canoniquement isomorphe à la suite spectrale $E^{p,q}_{1,c}$. Notons $F^p_c(I)$ le noyau de l'épimorphisme

$$I = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_X(X), I) \xrightarrow{i_p^*} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_X(X-Z^{p+1}), I)$$

et posons $G^p = F^p_c(I)/F^{p+1}_c(I)$. On obtient alors un octaèdre dans $\mathrm{D}(\tilde{X}_{\mathrm{Nis}})$:

$$\begin{tikzcd}
 & F^{p+1}_c(I) \arrow[rr] \arrow[dl] & & F^p_c(I) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
I \arrow[dr, "i^*_{p+1}"'] \arrow[r, phantom, "*"] & {} & G^p \arrow[ul, "+1"'] \arrow[dl] \arrow[u, phantom, "*"] \arrow[d, phantom, "*"] & {} & I \arrow[dl, "i^*_p"] \arrow[l, phantom, "*"] \\
 & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_X(X-Z^{p+1}), I) \arrow[uu, "+1"] \arrow[rr, "f_p^*"'] & {} & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_X(X-Z^p), I) \arrow[uu, "+1"'] \arrow[ul, "+1"] &
\end{tikzcd}$$

qui montre que la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré (I, F^p_c) est canoniquement isomorphisme à $E^{p,q}_{1,c}$. Ainsi, on peut calculer le $(p+q)$-ème faisceau de cohomologie du complexe G^p :

$$\underline{\mathrm{H}}^{p+q}(G^p) = C^p(., \underline{\hat{\mathrm{H}}}^q_*(\mathbb{E}))_0$$

où le complexe de cycles à coefficients dans $\underline{\hat{\mathrm{H}}}^q(\mathbb{E})$ est vu comme un faisceau Nisnevich sur X_{Nis} – rappelons en effet que ce dernier est fonctoriel par rapport aux morphismes étales. Si l'on considère $\mathcal{E}^{p,q}_{1,c}$ la suite spectrale du complexe filtrée (I, F^p_c) dans la catégorie abélienne $\tilde{X}_{\mathrm{Nis}}$, on obtient même un isomorphisme de complexes de faisceaux :

$$\mathcal{E}^{*,q}_{1,c} = C^*(., \underline{\hat{\mathrm{H}}}^q_*(\mathbb{E}))_0. \tag{4.1.b}$$

Notons $F_{triv}(I)$ la filtration triviale sur I :

$$F^p_{triv}(I) = \begin{cases} I & \text{si } p < 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\mathcal{E}^{p,q}_{r,triv}$ la suite spectrale dans $\tilde{X}_{nis}$ qui lui est associée. Evidemment, $\mathcal{E}^{*,q}_{1,triv}$ est un complexe concentré en degré 0 égal au faisceau $\underline{\mathrm{H}}^q(I)$.

On peut alors considérer le morphisme canonique de complexes filtrés :

$$\varphi' : (I, F_{triv}) \to (I, F_c).$$

Il résulte du calcul (4.1.b) que le morphisme de complexes de faisceaux induit par φ' suivant :

$$\mathcal{E}^{*,q}_{1,triv} \to \mathcal{E}^{*,q}_{1,c}$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Evalué en un X-schéma étale V, ce quasi-isomorphisme correspond au morphisme d'augmentation canonique

$$\Gamma(V, \underline{\mathrm{H}}^q_0(\mathbb{E})) \to C^*(V, \underline{\hat{\mathrm{H}}}^q_*(\mathbb{E}))_0.$$

Il en résulte que le morphisme induit sur les termes de la deuxième page

$$\mathcal{E}^{p,q}_{2,triv} \to \mathcal{E}^{p,q}_{2,c} \tag{4.1.c}$$

est le morphisme nul si $p \neq 0$, et correspond pour $p = 0$ à l'isomorphisme canonique (1.4.a)

$$\underline{\mathrm{H}}^q_0(\mathbb{E}) \to A^0(., \underline{\hat{\mathrm{H}}}^q_*(\mathbb{E}))_0,$$

vu comme un isomorphisme de faisceaux. Soit Dec le foncteur de « décalage de la filtration » définit dans [**Del71**, 1.3.3]. Le morphisme φ' induit donc un morphisme entre les filtrations décalées :

$$\varphi'' : (I, Dec(F_{triv})) \to (I, Dec(F_c))$$

Notons que d'après [**Del71**, 1.4.6], $Dec(F_{triv})$ est la filtration *canonique* sur I – qui correspond à la filtration pour la t-structure homotopique sur $\mathbb{E}$ d'après le choix de I. Il résulte de [**Del71**, 1.3.15] et du calcul précédent que φ'' est un quasi-isomorphisme de complexes filtrés. Il induit donc un isomorphisme au niveau des couples exacts associés dans la catégorie $D(\tilde{X}_{\mathrm{Nis}})$ et a fortiori un isomorphisme de suite spectrales d'hypercohomologie. L'isomorphisme ainsi obtenu sur la première page des suites spectrales (*cf.* [**Del71**, 1.3.4]) est de la forme

$$(\varphi'')_*^{p,q} : E_{2,t}^{p,q} \to E_{2,c}^{p,q}.$$

Compte tenu de l'identification de l'isomorphisme (4.1.c) obtenue ci-dessus, $(\varphi'')_*^{p,q}$ s'identifie à $\varphi_2^{p,q}$ ce qui permet de conclure. $\square$

5. Exemples et applications

5.1. — *Fonctorialité de la filtration par coniveau.*– Notons $E_{r,c}^{p,q}(X, \mathbb{E})$ la suite spectrale du coniveau associée au schéma lisse X et au motif $\mathbb{E}$ comme ci-dessus. Le corollaire principal de la proposition précédente est la fonctorialité de la suite spectrale du coniveau par rapport aux motifs du schéma en jeu, qui provient simplement de la fonctorialité de la suite spectrale associée à la t-structure homotopique. Citons les cas suivants parmi les plus frappants (voir aussi Example 5.5) :

– Un morphisme, ou même une correspondance finie, $f : Y \to X$ entre schémas lisses induit un morphisme de suites spectrales :

$$f^* : E_{r,c}^{p,q}(X, \mathbb{E}(n)) \to E_{r,c}^{p,q}(Y, \mathbb{E}(n))$$

qui converge vers le morphisme $f^* : \mathbb{E}^{p+q,n}(X) \to \mathbb{E}^{p+q,n}(Y)$.

On en déduit en particulier l'inclusion :

$$f^*\big(N^p\mathbb{E}^{**}(X)\big) \subset N^p\mathbb{E}^{**}(Y).$$

– Soit $f : Y \to X$ un morphisme projectif de dimension relative pure d entre schémas lisses. Rappelons que l'on associe à f un morphisme de Gysin $f^* : M(X)(d)[2d] \to M(Y)$ (*cf.* [**Dég12a**, 2.7]). On en déduit un morphisme de suites spectrales :

$$f_* : E_{r,c}^{p,q}(Y, \mathbb{E}(n)) \to E_{r,c}^{p-d,q}(X, \mathbb{E}_{-d}(n))$$

qui converge vers le morphisme $f_* : \mathbb{E}^{p+q,n}(Y) \to \mathbb{E}^{p+q-2d,n-d}(X)$.

On en déduit en particulier l'inclusion :

$$f_*\big(N^p\mathbb{E}^{**}(Y)\big) \subset N^{p-2d}\mathbb{E}^{**}(X).$$

– Considérons une classe $x \in H_{\mathcal{M}}^{i,n}(X)$ dans la cohomologie motivique de X. Par définition, cette classe correspond à un morphisme $x : M(X) \to \mathbb{1}(n)[i]$. On en déduit une action de x sur le motif de X :

$$\gamma_x : M(X) \xrightarrow{\delta_*} M(X) \otimes M(X) \xrightarrow{1 \otimes x} M(X)(n)[i]$$

où δ est le morphisme diagonal de X/k. D'où un morphisme de suites spectrales :

$$\gamma_x^* : E_{r,c}^{p-i+n,q}(X, \mathbb{E}_{-n}(m)) \to E_{r,c}^{p+i,q}(X, \mathbb{E}(m+n))$$

qui converge vers $\gamma_x^* : \mathbb{E}^{p+q-i,m-n}(X) \to \mathbb{E}^{p+q,m}(X)$.

Remarque 5.2. — Les inclusions obtenues dans les deux premiers points du paragraphe précédent sont le théorème principal de [**AK07**], pour le cas particulier de la cohomologie de Betti (qui est bien couvert par notre résultat grâce à la théorie des cohomologies de Weil mixtes rappelée ci-dessous). On notera aussi qu'Arapura et Kang montrent la compatibilité de la filtration par coniveau avec le produit. On peut déduire ce résultat du théorème 4.1 en considérant le produit naturel qui apparaît sur la suite spectrale d'hyper-cohomologie dans le cas d'un spectre en anneaux.

De même, on peut raffiner le dernier point du paragraphe ci-dessus en considérant l'action naturelle de la cohomologie motivique sur $\mathbb{E}^{**}$ quelque soit $\mathbb{E}$. On obtient en particulier que, pour un schéma X fixé, la suite spectrale du coniveau associée à la cohomologie motivique agit de manière canonique sur la suite spectrale du coniveau associé à $\mathbb{E}$ et en déduit l'inclusion suivante :

$$N^p\big(H^{**}_{\mathcal{M}}(X)\big).N^q\big(\mathbb{E}^{**}(X)\big) \subset N^{p+q}\big(\mathbb{E}^{**}(X)\big).$$

5.3. — Fixons un corps K de caractéristique 0. Si V est un K-espace vectoriel, on note $V^\vee$ le dual de V.

Considérons une théorie de Weil mixte E à coefficients dans K, au sens de [**CD09**] ; par exemple, E peut correspondre aux la cohomologies de De Rham ou de Betti en caractéristique 0, à la cohomologie rigide en caractéristique $p > 0$ ou à la cohomologie étale l-adique géométrique.

Rappelons qu'une telle théorie est donnée par un préfaisceau en K-algèbres différentielles graduées sur la catégorie des k-schémas affines lisses dont l'hypercohomologie Nisnevich peut être étendue en un foncteur covariant monoïdal

$$R_E : DM(k) \to \mathrm{D}(K).$$

Plus précisément, on obtient avec ces notations, pour tout schéma lisse X et tout entier $p \in \mathbb{Z}$,

$$H^p(X, E) = H^p\big(R_E(M(X))^\vee\big).$$

Par ailleurs, on associe à E un spectre motivique $\mathbb{E}$ (*cf.* [**CD09**, 2.7.6, 2.7.9]) tel que :

$$H^p(X, E) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), \mathbb{E}[p]).\,^{(9)}$$

Notons que le faisceau avec transferts $\mathbb{E}_0$ s'identifie, après oubli des transferts, au faisceau E_{Nis} associé au préfaisceau E.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $K(n) = H^1_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{G}_m, E)^{\otimes n}$, $K(-n) = K(n)^\vee$ – par définition de E, ces espaces vectoriels sont de dimension 1. Pour tout K-espace vectoriel V, on pose $V(\pm n) = V \otimes K(\pm n)$. L'isomorphisme canonique ci-dessus s'étend avec ces notations :

$$H^p(X, E)(n) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), \mathbb{E}(n)[p]).\,^{(10)}$$

9. Avec ces notations, $R_E(\mathbb{F}) = \mathrm{R\,Hom}_{DM(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$.
10. Ainsi, le spectre $\mathbb{E}$ est « $\mathbb{1}(1)$-périodique » : il existe un isomorphisme (non canonique) $E \simeq E(1)$.

On en déduit donc la suite spectrale du coniveau à coefficiens dans $\mathbb{E}$:

$$E_{1,c}^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}(\kappa(x), E)(-p) \Rightarrow H^{p+q}(X, E). \tag{5.3.a}$$

D'après le théorème précédent, cette suite spectrale est canoniquement isomorphe – à partir du terme E_2 – à la suite spectrale d'hyper-cohomologie pour la t-structure homotopique sur $DM(k)$:

$$E_{2,t}^{p,q} = H^p(X, \underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})) \Rightarrow H^{p+q}(X, E). \tag{5.3.b}$$

Il en résulte que la filtration par coniveau sur $H^*(X, E)$ coincide avec la filtration donnée par la t-structure homotopique relativement à $\mathbb{E}$.

Ce résultat est à comparer avec la proposition (6.4) de [**BO74**], d'autant plus que d'après la démonstration de 4.1, la suite spectrale (5.3.b) s'identifie à la suite spectrale d'hypercohomologie Nisnevich associée au complexe E_{Nis} sur le site X_{Nis}. Le faisceau $\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})$ s'identifie avec le faisceau Nisnevich associé au préfaisceau

$$\check{\underline{\mathrm{H}}}_0^q(E) : X \mapsto H^q(X, E).$$

Comme ce dernier est un préfaisceau invariant par homotopie avec transferts, $\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})$ s'identifie encore au faisceau Zariski associé à $\check{\underline{\mathrm{H}}}_0^q(\mathbb{E})$ (*cf.* [**Dég04**, 4.4.16]) – il coincide donc avec le faisceau noté $\mathcal{H}^q$ dans [**BO74**] une fois oublié les transferts.

Comme E est sans torsion, il résulte de [**Voe00a**, 5.24] que $\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})$ est un faisceau étale. De plus, d'après [**Voe00a**, 5.7, 5.28],

$$H^p(X, \underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})) = H^p_{\mathrm{Zar}}(X, \underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})) = H^p_{\text{ét}}(X, \underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})).$$

On peut démontrer de plus que la suite spectrale (5.3.b) coincide avec la suite spectrale d'hyper-cohomologie étale (resp. Zariski) associé au complexe E_{Nis}. Pour la topologie étale, cela résulte directement de l'équivalence

$$DM_-^{eff}(k) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} DM_{-,\text{ét}}^{eff}(k) \otimes \mathbb{Q}$$

prouvé par Voevodsky (*cf.* [**Voe00b**, 3.3.2]).

Pour résumer [11] :

Corollaire 5.4. — *Soit E une théorie de Weil mixte à coefficients dans K et $\mathbb{E}$ le spectre motivique qui lui est associé.*

1. *Pour tout schéma lisse X, la filtration par coniveau sur X induit une suite spectrale convergente*

$$E_{1,c}^{p,q}(X, \mathbb{E}) \Rightarrow H^{p+q}(X, E)$$

dont le complexe sur la ligne q est $E_{1,c}^{*,q}(X, \mathbb{E}) = C^*(X, \hat{\underline{\mathrm{H}}}_*^q\mathbb{E})_0$.

2. *Cette suite spectrale s'identifie à partir du terme E_2 avec la suite spectrale* (5.3.b) *induite par la filtration sur $\mathbb{E}$ donnée par la t-structure homotopique de $DM(k)$.*

11. Signalons que le premier point de cette proposition a été obtenu dans [**Dég12a**].

3. *Elle s'identifie encore avec la suites spectrale d'hyper-cohomologie Nisnevich (resp. étale) de X à coefficients dans le préfaisceau E.*

Exemple 5.5. — On peut encore compléter la liste d'exemples de fonctorialité de la filtration par coniveau du paragraphe 5.1 par le suivant : pour un schéma lisse X et un sous-schéma fermé $Z \subset X$ de codimension a, le théorème de pureté de Voevodsky donne un *morphisme résidu* :

$$\partial_{X,Z} : M(Z)(a)[2a-1] \to M(X-Z).$$

On en déduit un morphisme de suites spectrales :

$$\partial^*_{X,Z} : E^{p,q}_{r,c}(X-Z, \mathbb{E}(n)) \to E^{p-a+1,q}_{r,c}(Z, \mathbb{E}_{-a}(n))$$

qui converge vers le morphisme $\partial^*_{X,Z} : \mathbb{E}^{p+q,n}(X-Z) \to \mathbb{E}^{p+q-2a+1,n-a}(Z)$.

D'où l'inclusion :

$$\partial^*_{X,Z}\big(N^p\mathbb{E}^{**}(X-Z)\big) \subset N^{p-2a+1}\mathbb{E}^{**}(Z).$$

Dans le cas particulier où $\mathbb{E}$ est la théorie de Weil mixte associée à la cohomologie de De Rham (et disons $(X-Z)$ est affine), ce résultat a une interprétation très concrète comme suit : le résidu (au sens de Leray) en Z d'une forme différentielle sur $(X-Z)$ de coniveau supérieur à p est de coniveau supérieur à $(p-2a+1)$.

Références

[AK07] D. Arapura & S.-J. Kang – ≪ Functoriality of the coniveau filtration ≫, *Canad. Math. Bull.* **50** (2007), no. 2, p. 161–171.

[BO74] S. Bloch & A. Ogus – ≪ Gersten's conjecture and the homology of schemes ≫, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), p. 181–201 (1975).

[Bon10] M. V. Bondarko – ≪ Motivically functorial coniveau spectral sequences ; direct summands of cohomology of function fields ≫, *Doc. Math.* (2010), no. Extra volume : Andrei A. Suslin sixtieth birthday, p. 33–117.

[CD09] D.-C. Cisinski & F. Déglise – ≪ Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories ≫, *HHA* **11** (2009), no. 1, p. 219–260.

[CD12] ———, ≪ Mixed weil cohomologies ≫, *Adv. in Math.* **230** (2012), no. 1, p. 55–130.

[Dég04] F. Déglise – ≪ Interprétation motivique de la formule d'excès d'intersection ≫, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 1, p. 41–46, Présenté par J.P. Serre.

[Dég08] ———, ≪ Motifs génériques ≫, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **119** (2008), p. 173–244.

[Dég11] ———, ≪ Modules homotopiques ≫, *Doc. Math.* **16** (2011), p. 411–455.

[Dég12a] ———, ≪ Around the Gysin triangle I ≫, Regulators, Contemporary Mathematics, vol. 571, 2012, p. 77–116.

[Dég12b] ———, ≪ Coniveau filtration and motives ≫, Regulators, Contemporary Mathematics, vol. 571, 2012, p. 51–76.

[Del71] P. Deligne – ≪ Théorie de Hodge. II ≫, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1971), no. 40, p. 5–57.

[Har66] R. Hartshorne – *Residues and duality*, Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[Lur09] J. LURIE – *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[McC01] J. MCCLEARY – *A user's guide to spectral sequences*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Voe00a] V. VOEVODSKY – « Cohomological theory of presheaves with transfers », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 87–137.

[Voe00b] ———, « Triangulated categories of motives over a field », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188–238.

Décembre 2012

FRÉDÉRIC DÉGLISE, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* deglise@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/

• *E-mail :* deglise@math.univ-paris13.fr