Table des matières

COURS XI
ARITHMÉTIQUE DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

XI.1. Variétés abéliennes (cas d'un corps de base)

XI.1.a. Projectivité. —

XI.1.1. — Soit k un corps et A un k-schéma abélien. (1)

Le théorème suivant s'énonce dans le langage des diviseurs (algébriques). Ce point de vue est équivalent à celui des faisceaux inversibles compte tenu de l'isomorphisme du théorème IV.5.9 :

$$\mathcal{L} : CH^1(A) \to \mathrm{Pic}(A).$$

Si D est un diviseur algébrique sur A, et a un point rationnel de A/k, on pose : $D_a := T_a^*(D)$ avec les notations du paragraphe X.1.19. D'après le théorème du carré et la définition qui le suit, on peut donc associer à D un morphisme de groupes abéliens :

$$\Phi_D : A(k) \to \mathrm{CH}^1(A), x \mapsto D_x - D.$$

Soit D un diviseur algébrique effectif sur A. Rappelons qu'on lui associe suivant la définition V.2.1, un système linéaire dit complet $|D|$, l'ensemble des diviseurs effectifs rationnellement équivalents à D. D'après le corollaire V.2.6 :

$$|D| = (\Gamma(A, \mathcal{L}(D)) - \{0\})/k^\times.$$

Si $s = (s_1, ..., s_n)$ est une famille de sections globales qui engendrent $\mathcal{L}(D)$, on peut définir un unique morphisme de k-schémas :

$$\varphi : A \to \mathbb{P}^n_k$$

tel que $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{L}(D)$ (cf [**Har77**, 7.1]). De plus, à un automorphisme de $\mathbb{P}^n_k$ près, le morphisme φ ne dépend pas du choix de s. Il ne dépend en fait que du système linéaire complet $|D|$.

On rappelle les définitions suivantes :

– on dit que D est *très ample* si φ est une immersion fermée ;

– on dit que D est *ample* si il existe un entier $n > 0$ tel que $n.D$ est très ample.

1. Dans le langage de Weil, A correspond à une *variété abélienne A définie sur k.*

***Théorème XI.1.2* (Weil).** — *Soit A un k-schéma abélien, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. On pose $\bar{A} = A \times_k \operatorname{Spec}(\bar{k})$.*

Soit D un diviseur algébrique effectif sur A. On note $\bar{D}$ l'image inverse de A sur $\bar{A}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Ker}(\Phi_{\bar{D}})$ *est fini.*

(ii) *D est ample ;*

(iii) *$3.D$ est très ample ;*

Il existe sur A un diviseur effectif ample.

Démonstration. — Pour la première assertion, voir [**Mum08**, Application 1, p. 60].

La deuxième assertion s'en déduit facilement : soit U un voisinage ouvert affine de 0_A dans A, et Z le fermé complémentaire muni de sa structure réduite. Il résulte de [**EGA4**, 21.12.7] que Z est purement de codimension 1 dans A. Ainsi, le cycle associé $\langle Z \rangle_X$ – cf définition IV.2.3 – est un diviseur algébrique que l'on note D. Il est bien sûr effectif.

On va montrer que D satisfait la condition (i) de l'énoncé, ce qui permettra de conclure. On considère le morphisme $\underline{\Phi}_{\bar{D}} : A \to \underline{\operatorname{Pic}}_k(A)$. Alors $H = \operatorname{Ker}(\underline{\Phi}_{\bar{D}})$ est un sous-schéma fermé de A. Il est donc propre sur k. Comme $0_A \in U$, on en déduit $H \subset \bar{U}$. Comme U est affine, on en déduit que H est affine. Il est donc nécessairement fini, ce qui implique la condition (i). □

Corollaire XI.1.3. — *Tout k-schéma abélien est projectif.*

XI.1.b. Module de Tate. —

Proposition XI.1.4. — *Soit k un corps de caractéristique p et A un k-schéma abélien de dimension g.*

Pour tout entier $n \neq 0$, l'endomorphisme $n_A : A \to A$ est une isogénie de degré n^{2g}. En particulier elle est séparable (donc étale) si n est premier à p et radicielle si n est une puissance de p.

Démonstration. — D'après le Théorème XI.1.2, on peut trouver un diviseur effectif ample D sur X. Soit $\mathcal{L}$ le fibré inversible ample sur X qui lui est associé d'après le théorème IV.5.9.

Quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} + (-1)^*_A(\mathcal{L})$, on peut supposer que $\mathcal{L}$ est symétrique. Alors, d'après le Corollaire X.1.18, on obtient :

$$n_A^*(\mathcal{L}) = n^2.\mathcal{L}. \tag{XI.1}$$

Ainsi, le diviseur $n_A^*(\mathcal{L})$ est ample. Soit Z le noyau de n_A. La restriction de $n_A^*(\mathcal{L})$ à Z est donc trivial. Mais par ailleurs, il est ample ce qui implique que Z est de dimension nulle. On déduit donc du point (iii) de la Proposition X.2.8 que f est une isogénie.

Soit α la classe du diviseur algébrique D dans $CH^1(A)$. Notons que d'après l'égalité (XI.1), on obtient dans $CH^*(A)$: $n_A^*(\alpha) = n^2.\alpha$.

Notons que la puissance g-ème de α dans $CH^*(A)$ est un cycle α^g de codimension g, autrement dit un 0-cycle. Du fait que n_A^* est un morphisme d'anneau, on obtient encore : $n_A^*(\alpha^g) = n^{2g}.\alpha^g$ dans $CH_0(A)$.

Si on calcule le degré de ces deux 0-cycles (cf IV.4.8), on obtient l'égalité d'entiers :

$$\deg(n_A).g.\deg(\alpha) = n^{2g}.g.\deg(\alpha),$$

ce qui entraine le résultat attendu vu que $\deg(\alpha) > 0$. □

Remarque XI.1.5. — La proposition précédente se généralise immédiatement au cas d'une base quelconque compte tenu de la Remarque X.2.10.

Plus précisément, pour tout S-schéma abélien A et tout entier $n \neq 0$, le morphisme n_A est un isogénie telle que $\deg_S(n_A) = \dim(A/S)$. En particulier, si n est premier aux caractéristiques résiduelles de S, n_A est une isogénie séparable.

Ainsi, pour $n \neq 0$, n_A est surjectif. D'où :

Corollaire XI.1.6. — *Le groupe $A(\bar{k})$ des points fermés de A est divisible : pour tout point $x \in A(\bar{k})$, et tout entier $n > 0$, il existe un point $y \in A(\bar{k})$ tel que $x = n.y$.*

On pose pour tout entier $n \neq 0$, on pose $A_n := \mathrm{Ker}(n_A)$. D'après ce qui précède c'est un k-schéma en groupe. Par définition, $A_n(\bar{k})$ est le sous-groupe de $A(\bar{k})$ formé des éléments de n-torsion. De plus,

Corollaire XI.1.7. — *Si n est premier à la caractéristique de k, $A_n(\bar{k}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, $A_n(\bar{k})$ est de cardinal égal à n^{2g}. Par ailleurs, pour tout $m \mid n$, les éléments de m-torsion de $A_n(\bar{k})$ sont donnés par le sous-groupe $A_m(\bar{k})$, qui a exactement m^{2g} éléments. Il en résulte que $A_n(\bar{k})$ est engendré par $2g$ éléments distincts d'ordre exactement n ce qui conclut. □

Le cas où n est une puissance de p est plus délicat. On se réfère à [**Mum08**, p. 63, 64].

Proposition XI.1.8. — *Soit k un corps de caractéristique p.*

Alors, pour tout k-schéma abélien A de dimension g, il existe un entier f vérifiant $0 \leq i \leq g$ et tel que pour tout $n > 0$,

$$A_{p^n}(\bar{k}) = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^f.$$

Définition XI.1.9. — L'entier f qui apparait dans la proposition précédente s'appelle le p-rang du k-schéma abélien A.

Remarque XI.1.10. — La notion de p-rang est remarquablement stable :

1. Le p-rang d'un k-schéma abélien est invariant par extension de corps.
2. deux k-schémas abéliens isogènes on même p-rang.
3. Si A est un S-schéma abélien, la fonction qui à un point $s \in S$ associe le p-rang de A est localement constante sur S.

XI.1.11. — Soit A un k-schéma abélien et l un entier premier.

Alors, la multiplication par l induit une tour de groupes finis :

$$\ldots \to A_{l^n}(\bar{k}) \xrightarrow{l} A_{l^{n-1}}(\bar{k}) \to \ldots \to A_l(\bar{k})$$

On note $T_l(A)$ la limite projective de cette tour. Il s'agit concrètement des suites $(a_n)_{n>0}$ de points fermés de A tels que $l.a_n = a_{n-1}$ et $l.a_1 = 0$. Du fait que $A_{l^n}(\bar{k})$ est un $\mathbb{Z}/l^n.\mathbb{Z}$-module, on déduit que $T_l(A)$ est un $\mathbb{Z}_l$-module.

Définition XI.1.12. — Avec les notations qui précèdent, on appelle $T_l(A)$ le $\mathbb{Z}_l$-*module de Tate* associé à A.

Comme corollaire des calculs obtenus précédemment, on obtient :

Théorème XI.1.13. — *Soit k un corps de caractéristique p et l un entier premier.*

Pour tout k-schéma abélien A de dimension g et de p-rang f, on obtient :

$$T_l(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}_l^{2g} & \textit{si } l \neq p, \\ \mathbb{Z}_p^f & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarque XI.1.14. — La notion de p-rang d'un k-schéma abélien A est fondamentale en arithmétique.

Rappelons en particulier les définition suivantes :

- Un k-schéma abélien A est dit *ordinaire* si son p-rang est maximal, autrement dit égal à $\dim(A)$.
- Une courbe elliptique sur k est dite *super-singulière* si son p-rang est nul – autrement dit, si elle n'est pas ordinaire.
- Un k-schéma abélien A de dimension g est dit *super-singulier* s'il existe une courbe elliptique E sur $\bar{k}$ tel que A et une isogénie de A dans E^g sur $\bar{k}$.

C'est un théorème très profond qu'un k-schéma abélien A est super-singulier si le polygone de Newton qui est associé à sa représentation cristalline est une droite de pente $-1/2$.

XI.2. Dualité

XI.2.a. Définition. —

XI.2.1. — Soit A et B deux S-schémas abéliens. Rappelons que $\underline{\mathrm{Pic}}_S(B)$ est un faisceau abélien sur $\mathscr{S}ch_S$. On note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \underline{\mathrm{Pic}}_S(B))$ l'ensemble des morphismes de faisceaux abélien sur $\mathscr{S}ch_S$.[2]

Proposition XI.2.2. — *Avec les notations qui précèdent, il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens :*

$$\mathrm{Cor}_S(A, B) \xrightarrow{\epsilon} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \underline{\mathrm{Pic}}_S(B)).$$

Démonstration. — On note e_A (resp. e_B) la section unité de A/S (resp. B/S) et on pose : $s_A = e_A \times_S B$ (resp. $s_B = A \times_S e_B$).

Par définition, et d'après le corollaire X.1.4

$$\mathrm{Hom}(A, \underline{\mathrm{Pic}}_S(B)) = \mathrm{Pic}_A(A \times_S B) \simeq \mathrm{Pic}_{s_B}(A \times_S B).$$

Soit $\mathrm{Hom}_{e_A}(A, \underline{\mathrm{Pic}}_S(B))$ le sous groupe formé des morphismes

$$A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(B)$$

qui envoie la section unité e_A sur la section nulle du faisceau abélien $\underline{\mathrm{Pic}}_S(B)$. En utilisant les notations du point 3 de la proposition X.1.9, on obient donc un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{e_A}(A, \underline{\mathrm{Pic}}_S(B)) \simeq \mathrm{Pic}_{(e_A, e_B)}(A \times_S B).$$

Compte tenu de la proposition X.1.9, on en déduit donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Cor}_S(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{e_A}(A, \underline{\mathrm{Pic}}_S(B)).$$

Or se donner un morphisme $A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(B)$ de S-schémas qui respecte la section unité des S-schémas en groupes revient à se donner un morphisme de S-schémas en groupe (si l'on utilise le fait que $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ est représentable cela résulte de VIII.3.13 ; on peut aussi le déduire directement du théorème X.1.11). $\square$

Rappelons qu'on a définit (cf Définition X.1.7) un morphisme canonique de faisceau fppf sur $\mathscr{S}ch_S$:

$$\underline{\mathrm{Pic}}_S(A \times_S A) \xrightarrow{\chi} \underline{\mathrm{Cor}}_S(A, A).$$

Définition XI.2.3. — Soit A un S-schéma abélien, et $m : A \times_S A \to A$ l'addition de A/S. On définit un morphisme canonique :

$$\underline{\Phi} : \underline{\mathrm{Pic}}_S(A) \xrightarrow{m^*} \underline{\mathrm{Pic}}_S(A \times_S A) \xrightarrow{\chi} \underline{\mathrm{Cor}}_S(A, A).$$

---

2. Si l'on utilise le théorème X.1.5, il s'agit des morphismes de S-schémas en groupes.

XI.2.4. — Compte tenu de la proposition précédent la définition, en considérant les section au-dessus de S le morphisme Φ induit un morphisme de groupes abéliens :

$$\mathrm{Pic}_S(A) \to \mathrm{Cor}_S(A,A) \xrightarrow{\epsilon} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \underline{\mathrm{Pic}}_S(A)).$$

Ainsi, tout élément $l \in Pic(A)$ induit un morphisme de faisceaux abéliens :

$$\underline{\Phi}_l : A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(A).$$

On peut vérifier en revenant à la définition de l'isomorphisme ϵ que ce morphisme coïncide avec le morphisme $\underline{\Phi}_l$ de la définition X.1.21 : sur les S-section, il s'écrit donc :

$$A(S) \to \mathrm{Pic}_S(A), \Phi_l : x \mapsto T_x^*(l) - l.$$

XI.2.5. — Rappelons que les théorèmes Raynaud vus précédemment (Théorèmes X.1.5 et X.1.10) :

– Le faisceau $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ est représentable par un S-schéma propre.
– Le faisceau $\underline{\mathrm{Cor}}_S(A,A)$ est représentable par un S-schéma en groupes net et séparé.

On en déduit que le noyau de $\underline{\Phi}$ est un sous-schéma ouvert et fermé de $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$. Il est donc propre sur S. On montre de plus que c'est un S-schéma abélien qui est en tout point de même dimension que A.

Définition XI.2.6. — Pour tout S-schéma abélien, avec les notations de la définition précédente, on pose : $\underline{\mathrm{Pic}}^0_S(A) = \mathrm{Ker}(\underline{\Phi})$.

On note $\hat{A}$ le S-schéma abélien qui représente ce faisceau et on l'appelle le dual de A.

Compte tenu de ces notation, on notera $\mathrm{Pic}^0_S(A)$ le groupe des S-points de $\hat{A}$. Par définition, c'est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}_S(A)$.

On considèrera aussi le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(A)$ suivant :

$$\mathrm{Pic}^0(A) = \{l \in \mathrm{Pic}(A) \mid \Phi_l = 0\}. \tag{XI.2}$$

Lemme XI.2.7. — *Considérons les notations de la définition précédente ainsi que celles du Paragraphe XI.2.4.*

Alors, pour tout $l \in \mathrm{Pic}(A)$, le morphisme $\Phi_l : A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ se factorise dans $\hat{A}$.

On notera simplement

$$\Phi_l : A \to \hat{A} \tag{XI.3}$$

le morphisme obtenu par corestriction.

Démonstration. — Pour tout $x \in A(S)$, $l' := \Phi_l(x) = T_x^*(l) - l$. On doit montrer que $\Phi_{l'}$ est nul. Or pour tout $y \in A(S)$,

$$\Phi_{l'}(y) = T_y^*(l') - l' = T_{x+y}^*(l) - T_x^*(l) - T_y^*(l) + l.$$

Or cet élément est nul à cause du théorème du carré X.1.20.

Le cas d'un T-point de A en résulte quitte à remplacer le S-schéma A par le T-schéma A_T. □

XI.2.b. Propriétés. —

XI.2.8. — L'association $A \mapsto \hat{A}$ est évidemment fonctorielle.

Plus précisément, si $f : B \to A$ est un morphisme de S-schémas abéliens, on obtient par définition un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \times_S B \arrow[r, "f \times_S f"] \arrow[d, "m_B"'] & A \times_S A \arrow[d, "m_A"] \\ B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

d'où en particulier, d'après la définition XI.2.3, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Cor}}_S(B,B) & \underline{\mathrm{Cor}}_S(A,A) \arrow[l] \\ \underline{\mathrm{Pic}}_S(B) \arrow[u, "\Phi_B"] & \underline{\mathrm{Pic}}_S(A) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[u, "\Phi_A"'] \end{tikzcd}$$

qui induit à son tour un morphisme $\hat{f} : \hat{A} \to \hat{B}$.

De plus, d'après cette construction, on obtient pour tout $l \in \mathrm{Pic}(A)$, posant $l' = f^*(l)$, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hat{B} & \hat{A} \arrow[l, "\hat{f}"'] \\ B \arrow[u, "\Phi_{l'}"] \arrow[r, "f"] & \hat{A} \arrow[u, "\Phi_l"'] \end{tikzcd}$$

La proposition suivante est un peu moins évidente :

Proposition XI.2.9. — *Le foncteur contravariant*

$$\mathscr{A}b_S \to \mathscr{A}b_S, A \mapsto \hat{A}$$

est additif : $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$.

Démonstration. — On peut se ramener au cas où S est un schéma local. Comte tenu des définitions, pour tout élément $l \in \mathrm{Pic}_S(A) = \mathrm{Pic}(A)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\Phi_l = 0$.
2. $m^*l = p_1^*(l) + p_2^*(l)$, où m est l'addition de A/S et $p_1, p_2 : A \times_S A \to A$ les deux projections canoniques.

On en déduit que si $l \in \mathrm{Pic}^0_S(A)$, pour tous morphismes de S-schémas abéliens $f, g : B \to A$, $(f+g)^*(l) = f^*(l) + g^*(l)$, en appliquant le morphisme $(f \times_S g)^*$ à l'égalité du point 2 ci-dessus.

La définition qui précède des morphismes $\hat{?}$ permet donc de conclure. □

Remarque XI.2.10. — On retiendra de la démonstration qui précède que pour tout $l \in \mathrm{Pic}^0(A)$, $n_A^*(l) = n.l$ dans $\mathrm{Pic}(A)$. Autrement dit, l est symétrique (Définition X.1.16).

XI.2.c. Bidualité. —

XI.2.11. — Pour deux S-schémas en groupes G et H, on note $\underline{\mathrm{Hom}}(G,H)$ le faisceau des morphismes de S-schémas en groupes de F dans G, soit le faisceau sur $\mathscr{S}ch_S$ suivant :

$$T/S \mapsto \mathrm{Hom}_{T-gr}(G \times_S T, H \times_S T).$$

De même, on notera $\underline{\mathrm{Ext}}^1(F,G)$ le faisceau des extensions de g dans H ; c'est le faisceau fppf sur $\mathscr{S}ch_S$ associé au préfaisceau :

$$T/S \mapsto \mathrm{Ext}^1(G \times_S T, H \times_S T).$$

Soit $\mathbb{G}_m$ le schéma en groupes multiplicatif sur S. Rappelons que le foncteur

$$G \mapsto G^D := \underline{\mathrm{Hom}}(G, \mathbb{G}_m)$$

est dualisant sur la catégorie des S-schémas en groupes plats finis. [(3)]

***Théorème XI.2.12* (Rosenlicht)**. — *Pour tout S-schéma abélien, il existe un isomorphisme canonique :*

$$\gamma_A : \underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{G}_m) \to \hat{A}.$$

3. Si G est plat fini sur S, G^D est plat fini sur S et de plus $(G^D)^D = G$ à travers l'isomorphisme évident obtenu par adjonction.

Corollaire XI.2.13. — *Si $f : B \to A$ est un S-isogénie, $\hat{f}$ est une S-isogénie et* $\mathrm{Ker}(\hat{f}) = \mathrm{Ker}(f)^D$.

Cela de la suite exacte longue des Ext compte tenu du théorème précédent et du fait que pour un S-schéma en groupe plat fini G, $\underline{\mathrm{Ext}}^1(G, \mathbb{G}_m) = 0$.

Corollaire XI.2.14. — *Pour tout suite exacte courte de S-schémas abéliens*

$$0 \to C \to B \to A \to 0$$

la suite

$$0 \to \hat{A} \to \hat{B} \to \hat{C} \to 0$$

obtenue en appliquant le foncteur $\hat{?}$ est exacte.

Compte tenu du théorème précédent, l'exactitude à gauche de la suite résulte de l'exactitude à gauche du foncteur $\underline{\mathrm{Ext}}^1(-, \mathbb{G}_m) = 0$. L'exactitude à droite résulte alors du fait que $\dim(A/S) = \dim(\hat{A}/S)$.

XI.2.15. — Considérons deux S-schémas abéliens A et B.

Rappelons que $\mathrm{Pic}^0_S(B) \subset \mathrm{Pic}_S(B)$ est un sous-schéma ouvert et fermé. Il en résulte que tout morphisme de S-schémas abéliens $f : A \to \mathrm{Pic}_S(B)$ se factorise dans $\mathrm{Pic}^0_S(B)$. Autrement dit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathrm{Pic}_S(B)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathrm{Pic}^0_S(B)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}b_S}(A, \hat{B}).$$

On déduit donc de la Proposition XI.2.2 et du fait que $\mathrm{Cor}_S(A, B) = \mathrm{Cor}_S(B, A)$ le résultat suivant :

Proposition XI.2.16. — *Avec les notations qui précèdent, il existe des isomorphismes canoniques :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}b_S}(A, \hat{B}) \simeq \mathrm{Cor}_S(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}b_S}(B, \hat{A})$$

fonctoriels en A et B.

XI.2.17. — Il résulte de la proposition précédente que pour tout S-schéma abélien A, le mophisme $1_{\hat{A}} : \hat{A} \to \hat{A}$ induit canoniquement un morphisme de S-schémas abéliens :

$$\kappa_A : A \to \hat{\hat{A}}.$$

On en déduit de plus le résultat suivant :

Corollaire XI.2.18. — *Le morphisme κ_A est un isomorphisme.*

En effet, on déduit formellement que $\hat{\kappa}_A \circ \kappa_{\hat{A}} = Id$. Donc, $\kappa_{\hat{A}}$ est un monomorphisme de S-schémas abéliens, et donc un isomorphisme. Alors, $\hat{\kappa}_A$ est un isomorphisme et on peut conclure en appliquant le corollaire XI.2.14.

XI.2.d. Le cas d'un corps de base. —

XI.2.19. — Dans le cas où la base est un corps k, on peut expliciter un peu les résultats précédents pour un k-schéma abélien A.

Ainsi, $\hat{A}$ est un k-schéma abélien tel que

$$\hat{A}(k) = \mathrm{Pic}^0(A) = \{l \in \mathrm{Pic}(A) \mid \Phi_l = 0\}$$

où l'on a noté : $\Phi_l : A(k) \to \mathrm{Pic}(A), x \mapsto T_x^*(l) - l$.

Pour tout $l \in \mathrm{Pic}(A)$, le morphisme Φ_l induit $A \to \hat{A}$. Si k est algébriquement clos, dire que l est ample équivaut à dire que Φ_l est un isogénie (d'après le théorème XI.1.2).

De plus, $\hat{\hat{A}}$ est canoniquement isomorphe à A. Notons par ailleurs que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}b_k}(A, \hat{B}) = \mathrm{Cor}_k(A, B) = \mathrm{Pic}(A \times B) / \mathrm{Pic}(A) \times \mathrm{Pic}(B).$$

Ainsi, l'isomorphisme canonique $A \to \hat{\hat{A}}$ correspond à un élément canonique

$$\Pi \in \operatorname{Pic}(A \times \hat{A}) / \operatorname{Pic}(A) \times \operatorname{Pic}(\hat{A})$$

et on appelle tout faisceau inversible sur $A \times \hat{A}$ représentant la classe de Π un *fibré de Poincaré* associé à A.

La propriété caractéristique de cet élément est que pour tout $x \in \hat{A}(k)$, correspondant à un élément $l(x)$ dans $\operatorname{Pic}^0(A)$, on ait dans $\operatorname{Pic}(A)$:

$$(A \times_k x)^*(\Pi) = l(x).$$

Exemple XI.2.20. — Soit (E, e) une courbe elliptique sur un corps algébriquement clos.

Alors, pour tout diviseur D, $\Phi_D = (\deg D)^2.\Phi_e$. On en déduit donc que $\Phi_D = 0$ si et seulement si $\deg(D) = 0$. La définition qu'on a donné ici de $\operatorname{Pic}^0(E)$, où E est vu comme un k-schéma abélien, coïncide avec la définition précédente, IV.5.14. rappelons qu'on a alors une suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Pic}^0(E) \to \operatorname{Pic}(E) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, on sait que D est ample si et seulement si $\deg(D) > 0$. On en déduit donc les conditions équivalentes sur D :

1. $\deg(D) > 0$.
2. D est ample.
3. $\Phi_D : E \to \hat{E}$ est une isogénie.

Enfin, le théorème VI.2.8 peut se traduire par l'existence d'un isormorphisme canonique (compte tenu du choix de e) :

$$E \simeq \hat{E}.$$

Cet isomorphisme n'est pas autre chose que l'isogénie Φ_e.

XI.3. Conclusion

XI.3.a. Quelques résultats fondamentaux supplémentaires. —

XI.3.1. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p, l premier différent de p.

On termine ce cours par les résultats suivants qui méritent d'être énoncés :

1. *Théorème de réductibilité complète de Poincaré* : On dit qu'un k-schéma abélien est simple s'il ne contient pas de sous-k-schémas abéliens non triviaux. Alors, tout k-schéma abélien se décompose de manière unique à isogénie près comme un produit de k-schémas abéliens simples.
2. *Morphismes* : pour tous k-schémas abéliens X et Y :
   (a) le groupe $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, Y)$ est libre de rang fini et le morphisme canonique :
   $$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X), T_l(Y)).$$
   (b) l'anneau $\operatorname{End}^0(X)$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple de dimension finie.

XI.3.b. Motifs et schémas abéliens. —

XI.3.2. — *Jacobienne et cohomologie.*– Fixons à nouveau un corps algébriquement clos k de caractéristique p et $l \neq p$. Soit C une courbe algébrique propre, lisse et connexe sur k.

Alors, on peut décrire ainis la cohomologie étale l-adique rationnelle (Paragraphe IX.2.20) de C.

– $H^0_{ét}(C, \mathbb{Q}_l) = \mathbb{Q}_l$ - car C est connexe.
– $H^2_{ét}(C, \mathbb{Q}_l(1)) \simeq H^0_{ét}(C, \mathbb{Q}_l) = \mathbb{Q}_l$ par dualité de Poincaré.

– Il existe un isomorphisme canonique de $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels :

$$H^1_{ét}(C, \mathbb{Q}_l(1)) \simeq T_l(J(C)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

qui sont donc de dimension finie égale à $2g$ où g est le genre de C.

– Pour $i > 2$, $H^i_{ét}(C, \mathbb{Q}_l(1))$ – axiome (Dim1).

Rappelons par ailleurs que le twist n'intervient dans ce contexte que pour rendre l'accouplement de dualité de Poincaré canonique : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H^n_{ét}(C, \mathbb{Q}_l(i)) \simeq H^n_{ét}(C, \mathbb{Q}_l)$ – à travers un isomorphisme non canonique, défini par le choix d'une racine l-ème de l'unité dans $\bar{k}$.

XI.3.3. — *Jacobienne et motifs.*– On reprend les notations du paragraphe précédent.

Grothendieck a imaginé sa théorie des motifs avec pour la modèle la théorie des variétés abéliennes. Son intention était de définir une cohomologie pour les k-schémas projectifs lisses qui prolonge le foncteur variété jacobienne d'une courbe, $C \mapsto J(C)$. Il cherchait de plus à définir la cohomologie universelle ayant cette propriété, et disons plus précisément une cohomologie qui s'envoie – on dit : *se réalise* – dans toute cohomologie de Weil (cf Définition IX.2.6).

L'originalité de cette approche est que cette cohomologie n'est plus à valeurs dans une catégorie simple comme celle des K-espaces vectoriels gradués, pour K un corps de caractéristique 0. Au contraire, elle est à valeur dans une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéraire analogue à celle de la catégorie des variétés abéliennes à isogénies près $\mathscr{A}b^0_k$.

Ainsi, Grothendieck introduit la catégorie des *motifs purs rationnels modulo équivalence numérique* que nous noterons ici $\mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}}$. C'est une catégorie abélienne semi-simple (théorème de Jannsen), comme celle des variétés abéliennes à isogénies près. Mais elle est de plus munie d'une produit tensoriel $\otimes$ qui correspond à la structure multiplicative des cohomologies de Weil. On note $\mathbb{Q}$ l'unité pour ce produit tensoriel – on l'appelle le *motif constant.*

On dispose par ailleurs d'un foncteur de cohomologie, contravariant, de source la catégorie $\mathscr{P}_k$ des k-schémas projectifs lisses :

$$h : \mathscr{P}_k^{op} \to \mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}},$$

qui vérifient l'analogue des propriétés d'une cohomologie de Weil :

– *Künneth* : pour X, Y dans $\mathscr{P}_k$, $h(X \times_k Y) = h(X) \otimes h(Y)$, et $h(k) = \mathbb{Q}$. Plus rapidement : h est monoïdal.
– *Twists* : il existe dans $\mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}}$ un motif dit de Lefschetz $\mathbb{L}$ tel que $h(\mathscr{P}P^1_k) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{L}$ et qui est $\otimes$-inversible. Pour tout motif M et tout entier $n \in ZZ$, on pose $M(-n) = M \otimes \mathbb{L}^{\otimes, n}$.
– *Dualité* : si X est projectif lisse connexe de dimension d, $h(X)$ est fortement dualisable dans $\mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}}$ avec pour dual fort $h(X)(d)$ (cf Définition IX.1.20).
– *Correspondances.*– L'analogue de la classe de cycle dans le contexte des motifs est l'action des correspondances : pour tout k-schémas projectifs lisse X et Y, X étant équidimensionnel de dimension d, une *correspondance algébrique* α de X vers Y, est un cycle algébrique de $X \times_k Y$ de codimension d. A toute correspondance α de ce type est alors associé un morphisme

$$\alpha^* : h(Y) \to h(X).$$

Remarque XI.3.4. — Le terme *équivalence numérique* vient du fait que le morphisme α^* ci-dessus ne dépend dans $\mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}}$ que de la classe de α modulo la relation d'équivalence numérique. Plus généralement, on peut définir une catégorie de motifs purs adaptées à une bonne relation d'équivalence sur les cycles algébriques – comme par exemple l'équivalence rationnelle (Définition IV.3.15) qui mène à la catégories dite des *motifs de Chow.*

XI.3.5. — On continue la discussions précédente.

Notons que la catégorie $\mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}}$, comme la catégorie des variétés abéliennes à isogénies près, est munie d'une dualité : plus précisément, pour tout objet M de $\mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}}$ est fortement dualisable : il existe un objet $M^\vee$ tel que $(M^\vee)^\vee \simeq M$.

Par ailleurs, pour tous motifs M, N, P, $\mathrm{Hom}(M \otimes P, N) = \mathrm{Hom}(P, M^\vee \otimes N)$ – rappelons que c'est la définition même de dual fort dans le cadre abstrait (IX.1.20).

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème XI.3.6. — *Soit C une courbe algébrique propre, lisse et connexe sur k.*

Alors, le motif de C se décompose de manière canonique[4] *comme suit :*

$$h(C) = \mathbb{Q} \oplus h^1(C) \oplus \mathbb{Q}(-1).$$

De plus, il existe un foncteur covariant canonique $\rho : \mathscr{A}b_k^0 \to \mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}}$ qui s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{A}b_k^0 \arrow[d, "\rho"] \\ \mathscr{C}_k \arrow[ur, "J^\vee"] \arrow[r, "h^1"'] & \mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{C}_k$ est la catégorie des courbes projectives lisse connexes et $J^\vee$ est le foncteur qui à une courbe C associe la variété abélienne duale de sa jacobienne $J(C)^\vee$.

De plus, le foncteur ρ est pleinement fidèle.

XI.3.7. — Le premier objectif de la théorie des motifs purs de Grothendieck est donc réalisé. Malheuresement, le deuxième objetif ne l'est pas : on ne sait pas prouver que le foncteur

$$h : \mathscr{P}_k^{op} \to \mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}}$$

est initial parmi les cohomologies de Weil. Plus précisément, on aimerait que pour une cohomologie de Weil H à coefficients dans un corps k, il existe un foncteur canonique $R_H : \mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}} \to K - ev^{\mathbb{Z}}$, monoïdal, qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{M}_{num}(k)_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "R_H"] \\ \mathscr{P}_k \arrow[ur, "H^*"] \arrow[r, "h"'] & K - ev^{\mathbb{Z}}. \end{tikzcd}$$

Or l'existence de ce foncteur R_H est conditionné par l'une conjectures standards, appelée conjecture C par Grothendieck ([**Gro69**]). Conditionnelle à la cohomologie H^*, elle s'énonce comme suit : pour tout k-schéma projectif lisse X et tout cycle algébrique α de X, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la classe du cycle α dans $H^*(X)$ est nulle.

(ii) le cycle α est numériquement équivalent à 0.

On dit encore par abus que l'équivalence homologique coïncide avec l'équivalence numérique.

Références

[EGA4] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20, 24, 28, 32), 1964-1967.

[Gro69] A. Grothendieck. Standard conjectures on algebraic cycles. In *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, pages 193–199. Oxford Univ. Press, London, 1969.

4. L'injection de $\mathbb{Q}$ dans $h(C)$ est induit par la projection canonique $C \to \mathrm{Spec}(k)$, et le facteur $\mathbb{Q}(-1)$ s'en déduit par dualité.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Mum08] D. Mumford. *Abelian varieties*, volume 5 of *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics.* Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 2008. With appendices by C. P. Ramanujam and Yuri Manin, Corrected reprint of the second (1974) edition.

---

premier semestre 2013

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`