Table des matières

COURS II
GROUPES DE PICARD

Introduction

II.0.1. — Fixons un corps k arbitraire.

La géométrie algébrique est à la base l'étude des *ensembles k-algébriques (affines)*. On les définis comme les ensembles $V \subset k^n$ pour un entier $n > 0$ tels qu'il existe une famille finie de polynômes

$$(P_1(t_1, ..., t_n), ..., P_r(t_1, ..., t_n))$$

dans l'anneau $k[t_1, ..., t_n]$ à n indéterminées vérifiant :

$$V = \{(x_1, ..., x_n) \in k^n \mid \forall i, P_i(x_1, ..., x_n) = 0\}.$$

Exemple II.0.2. — On a déjà vu l'exemple des courbes elliptiques complexes (Définition I.1.14) : $k = \mathbb{C}$, $n = 2$, $r = 1$, $P_1(x, y) = y^2 - x^3 - g_2.x - g_3$, où g_2 et g_3 sont associées à un réseau de $\mathbb{C}$.

Plus généralement, un ensemble algébrique dans k^2 défini par l'annulation d'un seul polynôme $P(x, y)$ est appelée une courbe plane (affine) C. Si d est le degré total de $P(x, y)$, on dit que C est de degré d.

De même, si n est quelconque et V défini par un seul polynôme $P(x_1, ..., x_n)$, V est appelée une hypersurface de k^n. On définit le degré de V comme le degré total de P.

II.0.3. — C'est la volonté de définir la notion d'*ensemble k-algébrique projectif* (défini par des équations polynomiales homogènes) qui mène à la notion de variété algébrique générale : dans le cas où $k = \mathbb{C}$, il s'agit un espace topologique admettant un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ tel que U_i est isomorphe à un ensemble algébrique affine et ceci de manière algébriquement cohérente (par rapport aux intersections de la forme $U_i \cap U_j$). Cette notion contient non seulement les sous-ensembles algébriques de $\mathbb{C}^n$ mais aussi ceux de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. [1]

Enfin, on étend la géométrie algébrique au cas de l'arithmétique [2] en passant à la théorie des schémas :

- Les ensembles k-algébriques affines sont remplacés par les espaces topologiques de la forme $X := \mathrm{Spec}(A)$.

  On retrouve l'information algébrique de A non seulement dans la topologie de X mais encore dans le fait que X est muni d'un faisceau en anneaux, appelé faisceaux des fonctions (algébriques) sur X, noté $\mathcal{O}_X$ et tel que $\mathcal{O}_X(X) = A$.

1. Compte tenu du recouvrement affine standard de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$:

$$U_i = \{(x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid x_i = 1\} \simeq \mathbb{A}^n(\mathbb{C}).$$

2. Étude des solutions de polynômes à coefficients dans un anneau quelconque, le cas critique étant celui de $\mathbb{Z}$. On parle encore de *géométrie diophantienne* ou plus récemment de *géométrie arithmétique*.

On les appelle des *schémas affines.* [3]

– Les schémas sont des espaces topologiques X muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ (dont les fibres sont des anneaux locaux) et tel qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X tel que $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ est isomorphe à un schéma affine.

II.1. Théorie des faisceaux (rappels)

II.1.1. — Soit X un espace topologique. On note $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$ l'ensemble des ouverts de X ordonné par inclusion.On peut voir cet ensemble comme une catégorie : les objets sont les ouverts de X, et pour deux ouverts U, V de X :

$$\mathrm{Hom}(U,V) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } U \subset V \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons qu'un préfaisceau abélien sur X est la donnée d'un foncteur $F : \mathscr{O}\mathrm{uv}(X)^{op} \to \mathscr{A}b$ à valeur dans la catégorie des groupes abéliens.

On dit que F est un faisceau si pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert $U = \sqcup_{i\in I} U_i$ de U, la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow F(U) \xrightarrow{a} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{b_2}{\overset{b_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I^2} F(U_i \cap U_j) \tag{II.1}$$

où

$$\begin{aligned} a(f) &= (f|_{U_i})_{i\in I} \\ b_1(f_i) &= (f_i|_{U_i\cap U_j})_{i,j} \\ b_2(f_i) &= (f_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j}. \end{aligned}$$

Exemple II.1.2. — 1. Dans le cas $X = \mathbb{R}^n$, le foncteur $F : U \mapsto \mathrm{Hom}_{cont}(U, \mathbb{R})$ formé des morphismes continus d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$;

2. Soit X un espace topologique localement connexe et A un groupe abélien. le foncteur

$$(U \subset X) \mapsto A^{\pi_0(U)}$$

où $\pi_0(U)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de U est un faisceau abélien sur X. On l'appelle le *faisceau constant* sur X de groupe A et on le note A_X.

3. Pour un anneau A quelconque, $X = \mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers non nuls de A, muni de sa topologie de Zariski : si $f \in A$, on note $D(f)$ l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne contiennent pas f ; les ouverts $D(f)$ forment une base de la topologie de f.

   Le faisceau structural du schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ est caractérisé par sa restriction aux ouverts de cette base :

$$F = \mathcal{O}_X : D(f) \mapsto A_f.$$

Remarque II.1.3. — Notons que dans les deux exemples précédents, le faisceau F prend ses valeurs non seulement dans la catégorie des groupes abéliens mais aussi dans la catégorie des anneaux. On dit que F est un *faisceau en anneaux.* Notons que dans ce dernier cas, les morphismes de la suite (II.1) sont des morphismes d'anneaux.

Définition II.1.4. — Un *morphisme de préfaisceaux abéliens* est une transformation naturelle des foncteurs correspondants. On note $\widehat{\mathscr{A}b}_X$ la catégorie des préfaisceaux abéliens sur X et $\mathscr{A}b_X$ la sous-catégorie pleine formée des faisceaux sur X.

---

3. La théorie des schémas est due à Grothendieck, mais la terminologie est empruntée à Chevaley.

II.1.5. — Rappelons que pour tout préfaisceau abélien F sur X, il existe un faisceau abélien noté $a(F)$ et une transformation naturelle

$$\eta : F \to a(F).$$

On appelle $a(F)$ le *faisceau associé* à F.

Le faisceau $a(F)$ est le faisceau initial vérifiant cette propriété : pour tout morphisme de préfaisceaux $F \xrightarrow{\phi} G$ tel que G est un faisceau, il existe un unique morphisme de faisceaux $\tilde{\phi}$ s'inscrivant dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\eta"'] & & G. \\ & a(F) \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

On a ainsi définit un foncteur $a : \widehat{\mathscr{A}b}_X \to \mathscr{A}b_X$ qui est analogue au foncteur qui à un ensemble E associe le groupe abélien libre engendré par E : en particulier, si $\mathcal{O} : \mathscr{A}b_X \to \widehat{\mathscr{A}b}_X$ désigne le foncteur évident, a est adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{O}$: pour tout préfaisceau F et tout faisceau G, on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{A}b}_X}(F, \mathcal{O}(G)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}b_X}(a(F), G), \phi \mapsto \tilde{\phi}.$$

Exemple II.1.6. — Supposons que X est localement connexe et soit A un groupe abélien.

Alors le faisceau A_X défini dans l'exemple II.1.2 est encore le faisceau associé au préfaisceau : $(U \subset X) \mapsto A$.

II.1.7. — On déduit de l'existence du foncteur faisceau associé a rappelé dans le paragraphe précédent que les notions habituelles de la théorie des groupes abéliens s'étendent aux faisceaux abéliens : noyau, image, conoyau,... On dit que la catégorie $\mathscr{A}b_X$ est *abélienne*.

Considérons un morphisme $\phi : F \to G$ de faisceaux abéliens sur X.

Pour tout ouvert U, on note $K(U)$ (resp. $C(U)$) le noyau (resp. conoyau) de ϕ_U :

$$0 \to K(U) \to F(U) \xrightarrow{\phi_U} G(U) \to C(U) \to 0.$$

Pour tout recouvrement ouvert $U = \cup_i U_i$, on en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K(U) \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \prod_{i\in I} K(U_i) \arrow[r, "b_1 - b_2"] \arrow[d] & \prod_{(i,j)\in I^2} K(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \prod_{i\in I} F(U_i) \arrow[r, "b_1 - b_2"] \arrow[d] & \prod_{(i,j)\in I^2} F(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & G(U) \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \prod_{i\in I} G(U_i) \arrow[r, "b_1 - b_2"] \arrow[d] & \prod_{(i,j)\in I^2} G(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\ & C(U) \arrow[r, "a_C"] & \prod_{i\in I} C(U_i) \arrow[r, "b_1 - b_2"] & \prod_{(i,j)\in I^2} C(U_i \cap U_j) \end{tikzcd}$$

où les colonnes sont des suites exactes courtes et les deux lignes du milieu sont des suites exactes. Le lemme du serpent implique que la ligne supérieure est exacte : on en déduit que K est un faisceau. C'est le *noyau* de ϕ dans la catégorie des faisceaux (abéliens).

Par contre, on ne peut pas affirmer que C est un faisceau – la flèche a_C n'est pas nécessairement injective. Le faisceau associé $a(C)$ est appelé le *conoyau* de ϕ.

Remarque II.1.8. — On verra dans le chapitre sur la cohomologie que la notion de noyau (resp. conoyau) admet une définition intrinsèque dans toute catégorie. L'exemple et le paragraphe précédent montrent que les noyau et conoyau d'un morphisme quelconque de faisceaux abéliens *existent* dans la catégorie des faisceaux abéliens.

II.1.9. — La notion de noyau, d'image et de conoyau permet de donner un sens à la notion de suite exacte de faisceaux abéliens :

$$F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F'' \tag{II.2}$$

est exacte si $v \circ u = 0$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v)$.

Rappelons que si x est un point de X et F un faisceau abélien sur X, on définit la fibre de F en x comme le groupe abélien :

$$F_x = \varinjlim_{x \in U \subset X} F(U)$$

où la limite inductive parcourt l'ensemble filtrant des voisinages ouverts de x dans X.

Rappelons le fait suivant : une suite de faisceaux de la forme (II.2) est exacte si et seulement si pour tout point $x \in X$, la suite induite de groupes abéliens :

$$F'_x \to F_x \to F''_x$$

est exacte.

Exemple II.1.10. — Soit X un espace topologique localement connexe et A un groupe abélien.

Alors, pour tout point $x \in X$, la fibre du faisceau constant $(A_X)_x = A$.

En particulier, si

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

est une suite exacte courte de groupes abéliens, la suite induite de faisceaux abéliens

$$0 \to A'_X \to A_X \to A''_X \to 0$$

est exacte.

II.1.11. — Reprenons la discussion du paragraphe précédent. On peut encore étendre les notions de produit tensoriel de groupes abéliens aux faisceau abéliens. Si F et G sont deux faisceaux abéliens sur X, on note $F \otimes G$ le faisceau abélien associé au préfaisceau suivant :

$$U \mapsto F(U) \otimes_{\mathbb{Z}} G(U)$$

où le produit tensoriel désigne le produit tensoriel de groupes abéliens (*i.e.* de $\mathbb{Z}$-modules).

On peut aussi définir le faisceau des morphismes de F vers G par la formule suivante :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F, G) : U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(U), G(U))$$

où l'ensemble de droite est muni de sa structure de groupe évidente. On vérifie en effet que le préfaisceau ainsi défini est bien un faisceau.

On peut alors étendre la propriété universelle du produit tensoriel des groupes abéliens au faisceaux abéliens : pour des faisceaux F, G, H, il existe un isomorphisme canonique (naturel en F, G, H) :

$$\mathrm{Hom}(F \otimes G, H) \simeq \mathrm{Hom}(F, \underline{\mathrm{Hom}}(G, H)). \tag{II.3}$$

Remarque II.1.12. — On dit encore que la catégorie des faisceaux abéliens est *monoïdale* (existence du produit tensoriel, satisfaisant certaines propriétés : associativité, existence d'un objet unité) et fermée (existence du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}$ satisfaisant la propriété (II.3)).

II.1.13. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme d'espaces topologiques.

Si G est un préfaisceau sur Y, on définit un préfaisceau sur X par la formule suivante :

$$(U \subset X) \mapsto G(f^{-1}(U)).$$

On le note $f_*(G)$ et on l'appelle l'*image directe de G par f*. On voit immédiatement que si G est un faisceau, alors $f_*(G)$ est un faisceau. On a ainsi défini un foncteur :

$$f_* : \mathscr{A}b_Y \to \mathscr{A}b_X.$$

Lemme II.1.14. — *Sous les conditions du lemme précédent, le foncteur f_* admet un adjoint à gauche noté f^{-1} : pour tout faisceau G sur Y (resp. F sur X), il existe un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_Y\left(f^{-1}(F), G\right) \simeq \mathrm{Hom}_X\left(F, f_*(G)\right).$$

Démonstration. — On définit le faisceau $f^{-1}(F)$ comme le faisceau abélien sur Y associé au préfaisceau suivant :

$$\hat{f}^{-1}(F) : (V \subset Y) \mapsto \varprojlim_{U \supset f(V)} F(U)$$

où la limite projective parcourt l'ensemble ordonné des ouvert U de X contenant $f(V)$.

Du fait que a est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli, il suffit de vérifier qu'il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_Y(\hat{f}^{-1}(F), G) \simeq \mathrm{Hom}_X(F, f_*(G)).$$

où les Hom sont calculés dans la catégorie des préfaisceaux.

Or, un élément du groupe de droite est une famille de morphismes indexée par un ouvert $U \subset X$:

$$\beta_U : F(U) \mapsto G(f^{-1}(U)),$$

compatible à la restriction suivant U.

De même, un élément du groupe de gauche est une famille de morphismes indexée par un ouvert $V \subset X$:

$$\alpha_V : \varprojlim_{U \supset f(V)} F(U) \to G(V)$$

compatible à la restriction suivant V. D'après la définition de la limite projective, cela revient à se donner une famille de morphismes indexés par des couples (U, V) tels que $U \supset V \Rightarrow V \subset f^{-1}(-U)$:

$$\alpha_{U,V} : F(U) \to G(V).$$

On obtient alors les bijections réciproques entre ces deux familles comme suit :

$$\begin{aligned} &(\alpha_{U,V}) \mapsto (\alpha_{U,f^{-1}(U)}),\\ &(\beta_U) \mapsto \left(V \subset f^{-1}(-U) \mapsto F(U) \xrightarrow{\beta_U} G(f^{-1}(U)) \xrightarrow{\text{restriction}} G(V)\right). \end{aligned}$$

□

Exemple II.1.15. — Dans le cas où $f = j : U \to X$ est l'inclusion d'un ouvert de X, pour tout faisceau F sur X, le foncteur $j^{-1}(F)$ se calcule facilement : à un ouvert $V \subset U$, il associe le groupe abélien $F(V)$, V étant vu comme un ouvert de X.

Définition II.1.16. — Dans les conditions du lemme précédent, on appelle f^{-1} (resp. f_*) le foncteur *image inverse* (resp. *image directe*) associé à f.

Remarque II.1.17. — En géométrie algébrique, et même dans une plus large mesure, la notion de foncteurs adjoints entre catégories est omniprésente.

Il y a plusieurs notations pour désigner un couple de foncteurs adjoints ; nous utiliserons la suivante, appliquée à la définition précédente :

$$f^{-1} : \mathscr{A}b_X \leftrightarrows \mathscr{A}b_Y : f_*.$$

Dans cette notation, le foncteur adjoint à gauche (resp. droite) est toujours placé à gauche (resp. droite) des doubles flèches.

II.2. Modules

II.2.1. — Considérons maintenant un schéma X, muni de son faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$.

Rappelons qu'on $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ sur X est un faisceau abélien $\mathcal{E}$ sur X muni d'une action de $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{E}$: pour tout ouvert $U \subset X$, $\mathcal{E}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module, de façon naturelle en U. Un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est un morphisme de faisceaux abéliens tel que pour tout ouvert U ϕ_U est morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$-modules.

On note $\mathcal{O}_X-$mod la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules. (4)

Exemple II.2.2. — Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine. Pour définir un faisceau sur X il suffit de le définir sur la base d'ouverts $(D(f))_{f\in A}$ – ainsi le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ du schéma X est défini par la formule $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$, anneau localisé de A en $\{1, f, f^2, ...\}$.

Soit M un A-module. On note $\tilde{M}$ le faisceau sur X qui à un ouvert de la forme $D(f)$ associe le groupe abélien $M_f := M \otimes_A A_f$. Notons que M_f a de plus une structure de A_f-module. On en déduit que $\tilde{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module dit associé à M.

Rappelons que le foncteur

$$A - mod \to \mathcal{O}_X - mod, M \mapsto \tilde{M}$$

est pleinement fidèle – de la même manière que le foncteur des anneaux dans les schémas qui à A associe $\mathrm{Spec}(A)$ est pleinement fidèle.

Rappelons que les $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ qui sont dans l'image essentielle de ce foncteur sont dit *quasi-cohérents.*

Plus généralement un $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ sur un schéma est *quasi-cohérent* (resp. *cohérent*) si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ tel qu'il existe un A-module M (resp. de présentation finie) et un isomorphisme de $\mathcal{O}_U$-modules $\mathcal{F}|_U \simeq \tilde{M}$.

II.2.3. — Comme la catégorie des faisceaux abéliens sur X est de même nature que la catégorie des groupes abéliens, la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules possède les mêmes propriétés que la catégorie des modules sur un anneau A. En particulier, on peut associer à tout faisceau abélien F un $\mathcal{O}_X$-module libre : il s'agit du produit tensoriel

$$L(F) := \mathcal{O}_X \otimes F$$

muni de son action trivial de $\mathcal{O}_X$ (déduite de l'application η). On obtient une adjonction de catégories

$$L : \mathscr{A}b_X \leftrightarrows \mathcal{O}_X-\mathrm{mod} : o$$

où o est le foncteur d'oubli de la structure de : $\mathcal{O}_X$-module. Comme la catégorie des faisceaux abéliens, la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules admet des noyaux et conoyaux. (5) C'est une catégorie *abélienne.*

Pour tout morphisme de schémas $f : Y \to X$, on dispose par définition de morphismes d'anneaux

$$f^{-1}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y,$$
$$\rho : \mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Y).$$

4. Notons que $\mathcal{O}_X$ est un monoïde dans la catégorie des faisceaux abéliens : il est muni d'une addition

$$\mu : \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$$

et d'un morphisme unité $\eta : \mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X$ vérifiant les axiomes des monoïdes commutatifs : associativité, unité, commutativité. Un $\mathcal{O}_X$-module est un faisceau muni d'une action de ce monoïde.

5. Pour obtenir le noyau (resp. conoyau) d'un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules, on considère son noyau (resp. conoyau) dans la catégorie des faisceaux abéliens et on constate qu'il est muni d'une structure évidente de $\mathcal{O}_X$-modules – comme dans le cas des modules sur un anneau au sens classique.

En particulier, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, $f^{-1}(\mathcal{E})$ est un $f^{-1}(\mathcal{O}_X)$-module et on pose :

$$f^*(\mathcal{E}) := f^{-1}(\mathcal{E}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_X.$$

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module, $f_*(\mathcal{F})$ est un $f_*(\mathcal{O}_Y)$-module et donc, par restriction des scalaires suivant ρ, un $\mathcal{O}_X$-module que l'on note encore $f_*(\mathcal{F})$.

On vérifie facilement qu'on a ainsi définit une adjonction de catégories abéliennes :

$$f^* : \mathcal{O}_X-\mathrm{mod} \leftrightarrows \mathcal{O}_Y-\mathrm{mod} : f_*. \tag{II.4}$$

Dans le cas où $f = j : U \to X$ est une immersion ouverte, $j^*(\mathcal{E})$ est simplement la restriction du faisceau $\mathcal{E}$ aux ouverts de U (*cf.* example II.1.15).

Définition II.2.4. — Considérons un schéma X. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module.

1. On dit que $\mathcal{E}$ est *libre (de rang fini)* s'il est isomorphe $\mathcal{O}_X^n$ pour un entier $n > 0$. Si X est non vide, l'entier n est est alors uniquement déterminé. On l'appelle le *rang* de $\mathcal{E}$.
2. On dit que $\mathcal{E}$ est *localement libre (de rang fini)* si pour tout point x de X, il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $\mathcal{E}|_U$ est libre. On note alors $\mathrm{rg}_x(\mathcal{E})$ le rang de $\mathcal{E}|_U$.
3. On dit que $\mathcal{E}$ est *inversible* s'il est localement libre de rang 1 en tout point de X.

Remarque II.2.5. — 1. Un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang fini est en particulier cohérent (cf Exemple II.2.2).

2. Les modules libres (resp. localement libres, inversibles) sont stables par le foncteur f^*. [6]

Exemple II.2.6. — – Soit $X = \mathbb{P}^n_k$ un espace projectif. Le faisceau $\mathcal{O}_X(1)$ est un faisceau inversible. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{O}_X(n)$ la puissance tensorielle n-ème de ce $\mathcal{O}_X$-module.

– Soit X un S-schéma.

Rappelons que X est lisse sur S si et seulement si il est (localement) de présentation finie et le faisceau des formes différentielles $\Omega_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre (nécessairement de rang fini).

– Une S-courbe lisse est un S-schéma lisse tel que le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega_{X/S}$ est inversible.

On appelle ce faisceau le *faisceau canonique* de X/S.

II.3. Groupe de Picard

II.3.1. — Considérons les notations du paragraphe II.2.3.

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des $\mathcal{O}_X$-modules. on définit leur produit tensoriel, $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ comme le faisceau associé au préfaisceau sur X :

$$(U \subset X) \mapsto \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U),$$

muni de sa structure naturelle de $\mathcal{O}_X$-module.

Par ailleurs, le préfaisceau abélien sur X

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) : U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U)$$

est un faisceau et il porte naturellement une structure de $\mathcal{O}_X$-module. On vérifie facilement que le bifoncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}$ ainsi définit est l'adjoint à droite du bifoncteur $\otimes_{\mathcal{O}_X}$.

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, on pose $\mathcal{E}^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$. Considérons le morphisme identité :

$$\mathcal{E}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X).$$

En utilisant le fait que $\underline{\mathrm{Hom}}_{cO_X}$ est adjoint à gauche de $\otimes_{\mathcal{O}_X}$, on obtient un morphisme canonique :

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee \to \mathcal{O}_X. \tag{II.5}$$

6. Cela résulte simplement de la relation $f^*g^* = (gf)^*$.

Proposition II.3.2. — *Supposons que $\mathcal{E}$ est localement libre (de rang fini). Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible.*

(ii) *Le morphisme* (II.5) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que la proposition est évidente si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^n$. En effet, dans ce cas, $\mathcal{E}^\vee \simeq \mathcal{O}_X^n$ et donc $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee \simeq \mathcal{O}_X^{2n}$.

On se réduit à ce cas là en remarquant qu'il suffit de se restreindre aux ouverts d'un recouvrement $X = \cup_{i \in I} U_i$ de X tel que $\mathcal{E}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{n_i}$. Notons au passage que pour un ouvert U de X, $j : U \to X$, $j^*(\mathcal{E}^\vee) = (\mathcal{E}|_U)^\vee$. □

II.3.3. — Notons que les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles sont trivialement stables par produit tensoriel. La proposition précédente montre que l'ensembles des classes d'isomorphies de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles forment un groupe abélien $\mathrm{Pic}(X)$ dont la loi est induite par $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ et l'inverse par $[\mathcal{E}] \mapsto [\mathcal{E}^\vee]$.

Définition II.3.4. — On appelle $\mathrm{Pic}(X)$ le *groupe de Picard* de X.

Pour tout morphisme de schémas $f : Y \to X$, les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles sont stables par le foncteur de changement de base f^*. On en déduit un morphisme canonique de groupes abéliens :

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y), [\mathcal{L}] \mapsto [f^*(\mathcal{L})]. \tag{II.6}$$

II.3.5. — Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine.

Comme on l'a déjà vu, un $\mathcal{F}$-module inversible sur X est en particulier cohérent, donc de la forme $\tilde{M}$ pour M un A-module.

Réciproquement, dire qu'un $\mathcal{O}_X$-module de la forme $\tilde{M}$ est inversible équivaut à demander que M pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $M_\mathfrak{p}$ est libre de rang 1 que $A_\mathfrak{p}$. C'est encore équivalent à demander que M est un A-module projectif[7] fini de rang 1 : le groupe de Picard de X (ou encore de A) est donc isomorphe aux classes d'isomorphies de A-modules projectifs finis de rang 1 (l'addition est donné par le produit tensoriel de A-modules).

Supposons de plus que A soint intègre, de corps des fractions K. On définit un *idéal fractionnaire* de A comme un sous-A-module non nul I de K tel qu'il existe un élément $f \in A$ vérifiant $f.I \subset A$. On peut définir le produit de deux idéaux fractionnaires I et J :

$$I.J = \{xy \mid x \in I, y \in J\}.$$

L'inverse de I est l'idéal fractionnaire

$$I^{-1} = \{\alpha \in K | \alpha.I \subset A\}.$$

On dit que l'idéal fractionnaire est *inversible* si $I^{-1}.I = R$. Ainsi, les idéaux fractionnaires inversibles forment un groupe abélien pour le produit et l'inverse définis ci-dessus.

On montre facilement que tout A-module projectif fini de rang 1 est isomorphe à un idéal fractionnaire inversible (cf [**Mat86**, 11.3 et p.166]). De plus, un idéal fractionnaire est isomorphe à A si et seulement si il est principal. On en déduit donc un isomorphisme de groupes abéliens :

$$\mathrm{Pic}(A) = \{I \text{ idéal fractionnaire inversible de } A\}/\{I \text{ idéal fractionnaire principal de } A\}.$$

Remarque II.3.6. — Soit X une S-courbe propre et lisse.

La classe du faisceau canonique $\Omega_{X/S}$ sur X défini un élément de $\mathrm{Pic}(X)$ appelé la *classe canonique* de X/S. Nous noterons cet élément $\omega_{X/S}$, ou encore ω_X lorsque S est clair.

Exemple II.3.7. — Soit k un corps.

7. *i.e.* Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ est exact.

– La droite projective $\mathbb{P}^1_k$ est une courbe propre et lisse sur k. Nous verrons ci-dessous que le morphisme
$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k), n \mapsto [\mathcal{O}_X(n)]$$
est un isomorphisme.
– La droite affine $\mathbb{A}^1_k$ est une courbe lisse sur k qui n'est pas propre sur k. Par ailleurs, $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$ et $k[t]$ est un anneau principal. D'après la description du groupe de Picard d'un schéma affine donnée au paragraphe II.3.5, on en déduit donc :
$$\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^1_k) = 0.$$
– Le dernier point de l'exemple précédent se généralise comme suit :

Théorème II.3.8. — *Soit A un anneau noethérien intègre, $X = \mathrm{Spec}(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est intégralement clos et pour tout ouvert $U \subset X$,* $\mathrm{Pic}(U) = 0$.

(ii) *A est factoriel.* (8)

Voir [**EGA4**, 21.7.6].

Références

[EGA4] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20, 24, 28, 32), 1964-1967.

[Mat86] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Translated from the Japanese by M. Reid.

premier semestre 2013

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`

8. Rappelons que dire qu'un anneau noethérien A est factoriel équivaut à dire que tout idéal premier de hauteur 1 est principal (cf [**Mat86**, 20.1]).