Table des matières

COURS III
INVARIANTS COHOMOLOGIQUES DES SCHÉMAS I

III.1. Premiers pas en cohomologie

III.1.1. — La cohomologie accompagne la genèse de la théorie des schémas de Grothendieck. C'est même la volonté de développer une théorie cohomologique des variétés algébriques qui a été la motivation première du travail de Grothendieck.

III.1.a. Bases de l'algèbre homologique. —

Exemple III.1.2. — Considérons un entier $n > 0$. Pour tout groupe abélien A, la multiplication par n dans A définie un morphisme de groupes $A \to A, x \mapsto n.x$. On note A_n (resp. A/n) le noyau (resp. conoyau) de ce morphisme, qui est appelé le sous-groupe de n-torsion de A. On a ainsi définit un foncteur $F_n : A \mapsto A_n$ (resp. $G_n : A \mapsto A/n$).

On vérifie facilement qu'étant donnée une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0 \tag{III.1}$$

la suite suivante est exacte

$$0 \to A'_n \xrightarrow{F_n(u)} A_n \xrightarrow{F_n(v)} A''_n.$$

Par contre, bien que v soit supposée surjective, il peut arriver que $F_n(v)$ ne soit pas surjective. [1]

L'algèbre homologique a pour but originel, de comprendre le défaut de surjectivité de $F_n(v)$.

D'un point de vue terminologique : si un endofoncteur $F : \mathscr{A}b \to \mathscr{A}b$ transforme les suites exactes (courtes) en suites exactes (resp. à gauche, à droite), on dit que F est *exact* (resp. *exact à gauche*, *exact à droite*).

Ainsi, le foncteur F_n défini précédemment est exact à gauche mais pas exact à droite. La théorie des *foncteurs dérivés* permet de comprendre ce défaut.

Rappelons la proposition suivante :

Proposition III.1.3. — *Considérons les notations précédentes. A toute suite exacte de la forme* (III.1)*, on associe un morphisme canonique :*

$$\delta : A''_n \to A'/n$$

naturel par rapport aux morphismes de suites exactes courtes et qui s'inscrit dans la suite exacte suivante :

$$0 \to A'_n \xrightarrow{F_n(u)} A_n \xrightarrow{F_n(v)} A''_n \xrightarrow{\delta} A'/n \to A/n \to A''/n \to 0. \tag{III.2}$$

1. L'exemple le plus évident est le cas où v est la projection canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Le noyau de δ et plus généralement la suite exacte longue ci-dessus permettent donc de comprendre le défaut de surjectivité de $F_n(v)$.

Démonstration. — On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "n"] & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "n"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] & A' \arrow[r, "v"] & A'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

D'après les définitions du paragraphe précédent cette proposition, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& A_n \arrow[r, "F_n(u)"] \arrow[d, "n"] & A'_n \arrow[r, "F_n(v)"] \arrow[d, "n"] & A''_n \arrow[d, "n"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "n"] & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "n"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "n"] & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "n"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\
& A/n \arrow[r] & A'/n \arrow[r] & A''/n. &
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent appliqué à ce diagramme donne alors précisément l'existence du morphisme δ et de la suite exacte (III.2). Notons pour être plus précis que l'exactitude à droite de cette suite résulte du fait que G_n est exact à droite. $\square$

Exemple III.1.4. — Dans le cas où $A = \mathbb{Q}$, pour toute suite exacte de la forme (III.1), $F_n(v)$ est surjectif. En effet, dans ce cas, $A/n = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(\delta) = A'_n$.

Plus généralement, ce raisonnement s'applique à tout groupe abélien A tel que $A/n = 0$ – on dit alors que A est *n-divisible*.

III.1.5. — Concernant la terminologie :
- On dit que le foncteur $G_n : A \mapsto A/n$ est le *premier foncteur dérivé à droite* du foncteur (exact à gauche) F_n. On note : $R^1F_n := G_n$.
- La suite exacte (III.2) est appelée *suite exacte (longue) de cohomologie* associée au foncteur F_n.

La méthode présentée ici s'applique à d'autres endofoncteurs de la catégorie des groupes abéliens. On peut aussi l'étendre à d'autres catégories, comme par exemple celle des modules sur un anneau. La théorie qui en résulte s'appelle l'*algèbre homologique*.

Grothendieck a montré comment étendre cette théorie à des catégories encore plus générales, qu'il a appelée *catégories abéliennes*. Dans ce cours, notre principal exemple sera la catégorie des *faisceaux abéliens sur un schéma*.

III.1.b. Cohomologie des faisceaux. —

III.1.6. — On va appliquer la méthode de la section précédente à la catégorie des faisceaux abéliens sur un schéma X.

Si F est un tel faisceau, on pose $\Gamma(X, F) := F(X)$ et on l'appelle le groupe des *sections globales*. Dans ce paragraphe, nous le notons simplement Γ sans référence à X.

On a ainsi définit un foncteur :

$$\Gamma : \mathscr{A}b_X \to \mathscr{A}b, F \mapsto \Gamma(F) := \Gamma(X, F).$$

Considérons une suite exacte courte de faisceaux (cf Paragraphe II.1.9) :

$$0 \to F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F'' \to 0. \tag{III.3}$$

Si on applique le foncteur Γ à cette suite exacte, on en déduit une suite exacte courte :

$$0 \to \Gamma(F') \xrightarrow{u} \Gamma(F) \xrightarrow{v} \Gamma(F'').$$

En effet, le noyau d'un morphisme de faisceaux se calcule termes à termes (Paragraphe II.1.7), donc le foncteur Γ commute aux noyaux :

$$\Gamma(\mathrm{Ker}(v)) = \mathrm{Ker}(\Gamma(v)).$$

Par contre, le conoyau d'un morphisme de faisceaux ne se calcule pas termes à termes : Γ ne commute pas en général aux conoyaux. En généralisant la terminologie de la section précédente, on dit que le foncteur Γ est *exact à gauche*.

Exemple III.1.7. — Soit $X = \mathbb{A}^1_k$ la droite affine sur un corps k, G un groupe abélien et G_X le faisceau abélien constant sur X de groupe G (voir Exemple II.1.2). Rappelons que : $\Gamma(X, G_X) = G^{\pi_0(X)}$.

Soit $Z = \{0, 1\}$ vu comme un sous-schéma fermé de X d'immersion $i : Z \to X$. On peut définir un morphisme canonique de faisceaux abéliens sur X :

$$\nu : \mathbb{Z}_X \to i_*(\mathbb{Z}_Z)$$

en associant à un ouvert $U \subset X$ le morphisme canonique $\mathbb{Z}^{\pi_0(U)} \to \mathbb{Z}^{\pi_0(U \cap Z)}$. On vérifie que ν est un épimorphisme en considérant les fibres de ces faisceaux. Pourtant, le morphisme :

$$\Gamma(\nu) : \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\pi_0(X)} \to \mathbb{Z}^{\pi_0(Z)} = \mathbb{Z}^2$$

ne peut pas être un épimorphisme.

III.1.8. — Dans le cours d'A. Thuillier, on a vu comment obtenir l'analogue de la proposition III.1.3.

A un faisceau F, on associe un complexe $\mathcal{G}^\bullet(F)$ appelé *résolution de Godement* de F et tel que la suite de faisceaux :

$$0 \to F \to \mathcal{G}^\bullet(F) \tag{III.4}$$

est exacte.

Si on applique le foncteur Γ termes à termes au complexe $\mathcal{G}^\bullet(F)$ on obtient un complexe de faisceaux :

$$\Gamma(\mathcal{G}^0(F)) \to \ldots \to \Gamma(\mathcal{G}^{i-1}(F)) \xrightarrow{d^{i-1}} \Gamma(\mathcal{G}^i(F)) \xrightarrow{d^i} \Gamma(\mathcal{G}^{i+1}(F)) \to \ldots$$

Pour tout entier $i \geq 0$, on note $R^i\Gamma(F)$ le i-ème faisceau de cohomologie de ce complexe :

$$R^i\Gamma(F) := \mathrm{Ker}(d^i)/\mathrm{Im}(d^{i-1}).$$

Notons que du fait que Γ est exact à gauche et d'après l'exactitude de la suite (III.4), $R^0\Gamma(F) = \Gamma(F)$.

Avec ces notations, l'analogue de la proposition III.1.3 s'énonce comme suit :

Proposition III.1.9. — *Considérons les notations précédentes. Pour toute suite exacte (courte)* (III.3) *de faisceaux abéliens, il existe une suite exacte (longue) de faisceaux abéliens :*

$$\begin{aligned} 0 \to &\Gamma(F') \xrightarrow{u} \Gamma(F) \xrightarrow{v} \Gamma(F'') \\ &\xrightarrow{\delta^0} R^1\Gamma(F') \to R^1\Gamma(F) \to R^1\Gamma(F'') \\ &\xrightarrow{\delta^2} R^2\Gamma(F') \ldots \end{aligned}$$

Démonstration. — Il s'agit à nouveau d'une application du lemme du serpent appliqué à chaque étage des morphismes de complexes :

$$\Gamma(\mathcal{G}^\bullet(F')) \to \Gamma(\mathcal{G}^\bullet(F)) \to \Gamma(\mathcal{G}^\bullet(F'')).$$

□

Définition III.1.10. — Considérons les notations de la proposition précédente.

On appelle le foncteur $R^i\Gamma : \mathscr{A}b_X \to \mathscr{A}b$ les i-ème foncteur dérivé à droite du foncteur (exact à gauche) Γ.

Par ailleurs, pour tout faisceau F et tout entier $i \geq 0$, on pose encore :

$$H^i(X, F) = R^i\Gamma(F)$$

– parfois, on trouve aussi la notation $R^i\Gamma(X, F) := R^i\Gamma(F)$.

La suite exacte de la proposition précédente est appelée la *suite exacte longue de cohomologie* associée à la suite exacte courte (III.3).

On utilisera la cohomologie dans le cas particulier où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module.

Remarque III.1.11. — Si X est un k-schéma et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module, alors $\mathcal{E}$ est en particulier un faisceau de k-espaces vectoriels (car tout $\mathcal{O}_X(U)$ a une structure canonique de k-espace vectoriel).

Il en résulte la résolution de Godement $\mathcal{G}^\bullet(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ est un complexe de faisceaux de k-espaces vectoriels.

Cela implique que les groupes abéliens $H^i(X, \mathcal{E})$ ont une structure de k-espace vectoriel (le même raisonnement est valable si on remplace la corps k par un anneau quelconque).

Rappelons la définition suivante :

Définition III.1.12. — Soit X un schéma et $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-module.

On dit que le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ est *quasi-cohérent* (resp. *cohérent*) si pour tout ouvert affine $U = \operatorname{Spec}(A)$ de X, il existe un A-module M (resp. de présentation finie) tel que $\mathcal{E} \simeq \tilde{M}$ (notation de l'exemple II.2.2).

Exemple III.1.13. —
- Tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini est en particulier cohérent.
- Soit X un schéma affine.

  D'après cette définition et l'exemple II.2.2, il est évident que la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents (resp. cohérents) est équivalente à la catégorie des A-modules (resp. de présentation finie).

III.1.14. — On peut résumer les bases de la théorie cohomologique des faisceaux cohérents pour un schéma X et un $\mathcal{O}_X$ module cohérent $\mathcal{E}$ par les résultats suivants (que nous traiterons dans la partie sur la cohomologie) :

Th. 0. Si X est un schéma noethérien de dimension d,[2] $H^i(X, \mathcal{E}) = 0$ si $i > d$.

Th. 1. Si X est affine, $H^i(X, \mathcal{E}) = 0$ si $i > 0$.

Th. 2. Si $X = \mathbb{P}^r_k$ est un espace projectif, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(n)$ pour un entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$H^m(\mathbb{P}^r_k, \mathcal{O}_X(n)) = \begin{cases} k[t_0, ...t_r]_n & \text{si } m = 0, n \geq 0, \\ (k[t_0, ...t_r]_{-n-r-1})^\vee & \text{si } m = r, n \leq -r-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. *i.e.* il n'existe pas de suite strictement décroissante de fermés irréductibles de X formée de plus de $d + 1$ éléments.

où $k[t_0, ...t_r]_n$ désigne le k-espace vectoriel formé des polynômes en $t_0, ..., t_r$ homogènes de degré total n, et $E^\vee$ désigne le dual d'un k-espace vectoriel E.

Th. 3. Si X est un k-schéma propre, $H^m(X, \mathcal{E})$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Les deux premiers théorèmes sont dus à Serre – le deuxième théorème a été vu au premier semestre.

Le troisième théorème est du à Serre dans le cas où X est projectif et à Grothendieck dans le cas où X est propre.

Remarque III.1.15. — Nous reviendrons sur ces résultats.

Notons que le théorème (3) se déduit du théorème (2) grâce aux faits suivants :

- Dans le cas où $X = \mathbb{P}^n_k$ et $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent : le cas où $\mathcal{E}$ est une somme finie de faisceaux de la forme $\mathcal{O}_X(n)$ résulte du point (2).
- On passe de là au cas d'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ en utilisant le fait que $\mathcal{E}$ est un quotient d'une somme finie de faisceaux $\mathcal{O}_X(n)$ et la méthode du dévissage (voir cours sur la cohomologie).
- On en déduit le cas où X est un schéma projectif : alors il existe une immersion fermée $i : X \to \mathbb{P}^r_k$ pour un entier $r > 0$. Le faisceau $i_*(\mathcal{E})$ est cohérent sur $\mathbb{P}^r_k$ et on montre l'isomorphisme :
$$H^m(X, \mathcal{E}) = H^m(\mathbb{P}^r_k, i_*(\mathcal{E})).$$
- On passe du cas où X est projectif sur k au cas d'un k-schéma propre en utilisant le lemme de Chow.

III.1.16. — Soit X un k-schéma propre et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Alors X est de dimension finie et il résulte des théorèmes 0 et 3 ci-dessus que les k-espaces vectoriels $H^m(X, \mathcal{E})$ sont de dimension finie et nuls pour m assez grand.

Ainsi, l'entier
$$\chi(X, \mathcal{E}) := \sum_{m \geq 0} (-1)^m . \dim_k(H^m(X, \mathcal{E}))$$

Définition III.1.17. — Sous les hypothèses qui précèdent, on appelle l'entier $\chi(X, \mathcal{E})$ la *caractéristique d'Euler-Poincaré* du faisceau $\mathcal{E}$.

On note $\chi(X) = \chi(X, \mathcal{O}_X)$ et on appelle cet entier la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X/k.

Exemple III.1.18. — Pour toute suite exacte de faisceaux cohérents sur un k-schéma propre X
$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0,$$
on déduit de la suite exacte longue de cohomologie qui lui est associée (Proposition III.1.9) la relation suivante :
$$\chi(X, \mathcal{E}) = \chi(X, \mathcal{E}') + \chi(x, \mathcal{E}'').$$

Le théorème central pour la suite est le résultat de dualité suivant :

***Théorème III.1.19* (Serre)**. — *Soit X une courbe propre et lisse sur un corps k. Alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{E}$ de rang fini, il existe un isomorphisme canonique :*
$$H^1(X, \mathcal{E})^\vee \simeq H^0(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_X)$$
où $\mathcal{E}^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ est le dual de $\mathcal{E}$ et le membre de droite désigne le dual du k-espace vectoriel de dimension finie $H^n(X, \mathcal{E})$.

Corollaire III.1.20. — *Dans les conditions du théorème précédent, on obtient un isomorphisme canonique :*
$$H^1(X, \mathcal{O}_X)^\vee \simeq H^0(X, \omega_X) = \Gamma(X, \omega_X).$$

III.1.c. Application à l'étude des courbes algébriques. —

III.1.21. — Fixons dans toute cette section un corps k.

Rappelons qu'une courbe algébrique C sur k est un k-schéma de type fini de dimension 1. Cela équivaut à l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) tout point de C est ou bien un point générique ou bien un point fermé.

(ii) pour tout point générique η de C, l'extension résiduel $\kappa(\eta)/k$ est de degré de transcendance 1.

Dans le cas où C est lisse sur k, nous avons déjà rappelé que cela équivaut à dire que le $\mathcal{O}_C$-module $\Omega_{C/k}$ est inversible.

Définition III.1.22. — Soit X une courbe propre sur un corps k.

On définit le *genre* de C comme l'entier :

$$g = \dim_k(H^1(X, \mathcal{O}_X))$$

qui est fini d'après le [Th. 3] rappelé dans le paragraphe III.1.14.

D'après le théorème de dualité de Serre dans le cas des courbes (et plus exactement son Corollaire III.1.20), le genre d'une courbe propre et lisse X sur k est égal à la dimension du k-espace vectoriel des sections globales du faisceau canonique de X/k :

$$g = \dim_k(\Gamma(X, \omega_X)). \tag{III.5}$$

Exemple III.1.23. — D'après le [Th. 2] du paragraphe III.1.14, $H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_X) = 0$: ainsi, la droite projective est une courbe de genre 0.

III.1.24. — Soit k un corps de base.

On dit qu'un k-schéma X est géométriquement intègre si pour toute extension finie L/k, le schéma $X \times_k \mathrm{Spec}(L)$ est intègre. Ayant fixée une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, il revient au même de demander que le schéma $\bar{X} := X \times_k \mathrm{Spec}(\bar{k})$ est intègre.

Proposition III.1.25. — *Soit X un k-schéma propre et géométriquement intègre.*

Alors, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$.

Démonstration. — On commence par le cas où X est de plus fini sur k. Un morphisme fini étant affine, on a nécessairement $X = \mathrm{Spec}(A)$ pour A une k-algèbre finie. Par hypothèse, sur X, A est intègre. On en déduit en particulier que A est un corps [3] extension finie de k.

Soit a un élément de A, et π son polynôme minimal de sorte que A contient l'extension de corps $B = k[t]/(\pi)$. Or $\bar{B} = \big(k[t]/(\pi)\big) \otimes_k \bar{k} = \bar{k}^d$ où d est le degré de π. Or du fait que $\bar{B}$ est une sous-k-algèbre de $A \otimes_k \bar{k}$, qui est supposé intègre par hypothèse, on déduit que $\bar{B}$ est intègre, ce qui équivaut à dire que $d = 1$, *i.e.* $a \in k$.

Pour le cas général, du fait que X est propre sur k et d'après le théorème de finitude de la cohomologie des faisceaux cohérents (Paragraphe III.1.14, [Th. 3]), on obtient $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une k-algèbre finie. Or $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k \bar{k} = \Gamma(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ et on déduit du fait que $\bar{X}$ est intègre le fait que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une k-algèbre finie géométriquement intègre. On est donc réduit au cas traité précédemment. □

Exemple III.1.26. — Soit X une courbe algébrique propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps k.

On déduit de la proposition précédente que $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$. Appliquant le [Th. 0] du paragraphe III.1.14 et le fait que X est de dimension 1, on obtient pour tout $i > d$, $\dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

3. En effet, pour tout $a \in A - \{0\}$, l'endomorphisme k-linéaire $A \to A, x \mapsto a.x$ est injectif et donc bijectif comme A/k est de dimension finie.

Ainsi, on obtient la relation fondamentale entre le genre de la courbe X/k et sa caractéristique d'Euler-Poincaré :

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g. \tag{III.6}$$

Remarque III.1.27. — L'étude des courbes propres, lisses et géométriquement intègre sur un corps k se ramène (dans une certaine mesure) à celle des courbes propres lisses connexes sur la clôture séparable de k du fait que le foncteur d'extension des scalaires de k à $\bar{k}$ est fidèlement plat.

Si l'on veut, on peut donc se restreindre au cas d'un corps de base algébriquement clos.

III.2. Suite exacte exponentielle

III.2.1. — Soit X un $\mathbb{C}$-schéma projectif X. Alors, l'ensemble $X(\mathbb{C})$ peut-être muni d'une structure d'espace analytique [(4)]

On note traditionnellement X^{an} (ou X^h dans la notation originalle de Serre) cet espace analytique. Cette association est fonctorielle. On peut de plus l'étendre en un foncteur associant à un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{E}$ un faisceau abélien sur X^{an} muni d'une structure de $\mathcal{O}_{X^{an}}$-module analytique cohérent $\mathcal{E}^{an}$.

D'après un théorème célèbre de Serre, ce foncteur est une équivalence de catégories (cf [**Ser56**, Th. 3]). De plus on obtient un isomorphisme de groupes de cohomologie :

$$H^*(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} H^*(X^{an}, \mathcal{E}^{an})$$

III.2.2. — Soit X un schéma projectif lisse sur $\mathbb{C}$ et posons $\mathfrak{X} = X^{an}$.

La fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ induit une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2i.\pi} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\exp} \mathbb{C} \to 0.$$

En considérant les fonctions holomorphes sur $\mathcal{X}$ à valeurs dans la suite exacte ci-dessus on obtient une suite exacte dite exponentielle :

$$0 \to \mathbb{Z}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{2i.\pi} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^\times \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to 0$$

où $\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$ désigne le faisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{X}$. On en déduit une suite exacte longue de cohomologie :

$$H^1(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}_{\mathfrak{X}}) \to H^1(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \to H^1(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^\times) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}_{\mathfrak{X}}) \to H^2(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

La cohomologie du faisceau de $\mathcal{X}$ à valeur dans le faisceau constant $\mathbb{Z}$ s'identifie à la cohomologie singulière de l'espace topologique sous-jacent, soit $X(\mathbb{C})$. C'est la cohomologie de Betti de X :

$$H^*_B(X, \mathbb{Z}) = H^*_{sing}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

D'après le théorème de Serre, $H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = H^i(X, \mathcal{O}_X)$. D'après un principe général, le groupe abélien $H^1(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^\times)$ s'identifie aux classes d'isomorphies de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules inversibles. D'après le théorème du paragraphe précédent, il s'agit du groupe de Picard de X.

La suite exacte précédente prend donc la forme plus classique :

$$H^1_B(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2_B(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X) \tag{III.7}$$

Notons que pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$, la classe de cohomologie $c_1(\mathcal{L})$ est appelée la classe de Chern de $\mathcal{L}$.

---

4. *i.e.* un espace annelé qui est localement un fermé de $\mathbb{C}^n$ défini par des équations holomorphe muni de son anneau de fonctions holomorphes (à valeurs dans $\mathbb{C}$).

III.2.3. — Considérons le cas d'une courbe algébrique projective lisse X sur $\mathbb{C}$. Alors $X(\mathbb{C})$ est une variété différentiable compacte de dimension 2 – ou encore une surface de Riemann compacte. Il en résulte que $H^2_B(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, et l'application c_1 ci-dessus n'est autre que l'application degré :

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}, \mathcal{L} \mapsto \deg(\alpha_X(\mathcal{L})) \tag{III.8}$$

qui est surjective. [5]

La dualité de Serre donne un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriels :

$$H^1(X,\mathcal{O}_X) \simeq [\Gamma(X,\omega_X)]^*$$

où ω_X est le faisceau des formes différentielles (algébriques) sur X. On déduit donc de (III.7) une suite exacte de groupes abéliens :

$$H^1_B(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{I} [\Gamma(X,\omega_X)]^* \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

Notons que par définition, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(X,\omega_X = \Gamma(X,\omega_X)$ des formes différentielles algébriques sur X est de dimension g où g est le genre de X.

Rappelons finalement que $H^1_B(X,\mathbb{Z})$ est égal au groupe des lacets de $X(\mathbb{C})$ à homotopie près. [6] De plus, l'application I s'identifie à l'application qui à un lacet γ de $X(\mathbb{C})$ associe le forme linéaire sur $\Gamma(X,\omega_X)$ qui à une forme différentielle ω associe :

$$I(\gamma).\omega = \int_\gamma \omega.$$

Il résulte de la classification des surfaces de Riemann que $X(\mathbb{C})$ est homéomorphe à un tore à g trous. Le groupe $H^1_B(X,\mathbb{Z})$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$. Par ailleurs, l'image de I est isomorphe à un réseau Λ de $H^1(X,\mathcal{O}_X) = \Gamma(X,\omega_X)^*$.

Si l'on note $\mathrm{Pic}^0(X)$ le groupe des classes de diviseurs (*i.e.* de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles) de degré 0), la suite exacte précédente donne donc un isomorphisme de groupes abéliens :

$$[\Gamma(X,\omega_X)]^*/H^1_B(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Pic}^0(X).$$

Notons que le groupe quotient

$$\mathrm{coKer}(I) = \Gamma(X,\omega_X)^*/H^1_B(X,\mathbb{Z})$$

n'est pas autre chose que ce que l'on a appelé la jacobienne de $X(\mathbb{C})$ définie en I.2.4. Voici donc une forme moderne de cette même définition en termes cohomologiques :

Définition III.2.4. — Avec les notations qui précédent, on appelle les groupes abéliens isomorphes :

$$[\Gamma(X,\omega_X)]^*/H^1_B(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Pic}^0(X),$$

munis de leur structure naturelle de variété algébrique complexe, la *jacobienne* $J(X)$ de X.

D'après ce qui a été rappelé dans la discussion précédente, $J(X)$ est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{C}^g/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^g$.

---

5. Cela résulte de l'existence d'une immersion fermée $X \to \mathbb{P}^n$.
6. Un lacet de $X(\mathbb{C})$ est une application continue $S^1 \to X(\mathbb{C})$. Deux lacets α et β sont homotopes s'ils existent une famille H_t de lacets de $X(\mathbb{C})$ paramétrés continument par $t \in [0,1]$ et tels que $H_0 = \alpha$, $H_1 = \beta$.

Références

[Ser56] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6 :1–42, 1955–1956.

---

premier semestre 2013

FRÉDÉRIC DÉGLISE, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`