Table des matières

COURS V
THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ET COURBES ALGÉBRIQUES

V.1. Courbes algébriques

V.1.1. — Fixons un corps k et X un k-schéma algébrique (*i.e.* de type fini).

Rappelons que le schéma X est une *courbe algébrique* sur k s'il satisfait les conditions équivalentes suivantes :

(i) $\dim(X) = 1$.

(ii) tout point de X est ou bien fermé (*i.e.* minimal) ou bien générique (*i.e.* maximal).

(iii) le corps résiduel de tout point générique de X est de degré de transcendance 1 sur k.

V.1.2. — Considérons une courbe algébrique X intègre de corps des fonctions (rationnelles) K. D'après la proposition IV.3.12, une fonction rationnelle f sur X, transcendante sur k en tant qu'élément de K, définit un morphisme fini surjectif $X \to \mathbb{P}^1_k$.

On en déduit en particulier l'équivalence des propriétés suivantes sur une courbe algébrique intègre X :

(i) X est propre sur k ;

(ii) X est projective sur k. [1]

Cela résulte du fait qu'un morphisme fini est projectif et que la composée de deux morphismes projectifs est projectif.

V.1.3. — Si X est une courbe algébrique sur k, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est normale,

(ii) X est localement factorielle ;

et si de plus k est parfait, ces conditions sont équivalentes à la condition suivante :

(iii) X est lisse sur k.

Remarque V.1.4. — Dans la théorie des schémas, le point de vue classique sur les courbes algébriques (*i.e.* variétés algébriques de dimension 1) est constituée par l'étude des courbes algébriques projectives lisses dans le cas d'un corps de base algébriquement clos k. Comme on vient de le rappeler, cela revient à étudier les k-schémas propres normaux de dimension 1.

1. *i.e.* il existe une immersion fermée $X \to \mathbb{P}^n_k$ pour un entier n convenable.

Par ailleurs, nous verrons que la théorie classique se généralise au cas des courbes algébriques sur un corps k non nécessairement algébriquement clos quitte à considérer des courbes propres lisses et géométriquement intègre (voir Paragraphe III.1.24)

La proposition IV.3.12 admet les généralisations et corollaires suivants :

Proposition V.1.5. — *Soit X et Y deux courbes algébriques propres et normales.*

Soit $f : Y \to X$ un morphisme de k-schémas.

Alors, ou bien f est constante ou bien f est dominant.

Dans le deuxième cas, f est nécessairement fini, plat surjectif.

Démonstration. — Du fait que Y et X sont propres sur k, on déduit que f est propre. En particulier, $f(Y)$ est un fermé de X, qui est de plus irréductible vu que Y l'est par hypothèse. Donc $f(Y)$ est ou bien réduit à un point ou bien égal à X.

Plaçons nous dans le deuxième cas. Alors, f est dominant et induit un morphisme sur les corps des fonctions de X et Y : $\phi : \kappa(X) \to \kappa(Y)$.

Soit π une fonction rationnelle sur X, transcendante sur k. Elle induit un morphisme fini surjectif $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ d'après la Proposition IV.3.12. Par ailleurs, $\pi' = \phi(\pi)$ est une fonction rationnelle sur Y transcendante sur k. Elle induit donc un morphisme fini surjectif : $\pi' : Y \to \mathbb{P}^1_k$ d'après *loc. cit.* Par construction, $\pi \circ f = \pi'$. On en déduit donc que f est fini puisque π et π' sont finis.

Soit y un point de Y, $x = f(y)$. Soit A l'anneau local de x dans X. Alors, $V = f^{-1}(U)$ est affine car f est fini : $V = \mathrm{Spec}(B)$. Comme f est fini surjectif, le morphisme induit $V \to \mathrm{Spec}(A)$ est encore surjectif, donc dominant. On en déduit que le morphisme correspondant $\phi : A \to B$ est injectif. Or A est un anneau de valuation discrète : être plat sur A équivaut à être sans A-torsion. Comme ϕ est injectif et B est intègre, on en déduit que B est sans torsion, donc plat sur A. □

V.1.6. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme plat fini surjectif.

Soit x un point de X, $A = \mathcal{O}_{X,x}$. Soit B la A-algèbre telle que $f^{-1}(\mathrm{Spec}(A)) = \mathrm{Spec}(B)$. Alors B est une A-algèbre fini et plate sur un anneau local (noethérien). Alors B est une A-algèbre libre de rang fini. On définit le *degré de f en x* comme l'entier

$$\deg_x(f) = \mathrm{rg}_A(B).$$

Il résulte facilement de cette définition que la fonction $x \mapsto \deg_x(f)$ est localement constante sur X.

En particulier, si X est irréductible, cette fonction est constante et on peut parler du *degré* de f sans ambiguïté. Dans le cas où Y et X sont irréductibles, si l'on note L/K l'extension des corps résiduels des points génériques, on obtient la relation :

$$\deg(f) = [L : K].$$

Définition V.1.7. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme dominant (*i.e.* un revêtement fini) entre courbes algébriques propres et normales. Le morphisme f induit une extension L/K des corps de fonctions respectifs de Y et X.

On définit le degré de f comme le degré de L/K.

Exemple V.1.8. — Considérons un morphisme f comme dans la définition précédente. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme.

(ii) $\deg(f) = 1$.

En effet, le fait que (i) implique (ii) est clair. Réciproquement, si on reprend les notations du paragraphe précédent la définition pour, un point x de X, on obtient que B est libre de rang 1 sur A : autrement dit, $B \simeq A$ en tant qu'anneaux.

L'exemple peut se traduire en disant que si un revêtement de courbes algébriques propres normales est un isomorphisme au point générique, c'est globalement un isomorphisme. La proposition suivante généralise ce fait :

Proposition V.1.9. — *Soit k un corps quelconque.*

Le foncteur qui à un k-schéma intègre X associe son corps des fonctions :

$$\kappa : X \mapsto \kappa(X)$$

défini une anti-équivalence de catégorie entre les courbes algébriques propres normales sur k munis des morphismes dominants et les extensions de degré de transcendance 1 de k.

Indication. — On va construire l'équivalence quasi-inverse. Soit K une extension de k de degré de transcendance 1. Il existe dans K un élément transcendant π, qui correspond à une extension de corps $\Pi : k(t) \to K$. On peut alors considérer la clôture normale $X(K, \pi)$ de $\mathbb{P}^1_k$ le long de l'extension Π : elle est obtenue en recollant les schémas $\operatorname{Spec}(\tilde{A})$ où $\tilde{A}$ est la clôture intégrale de A dans K par rapport à Π et $\operatorname{Spec}(A)$ est un ouvert de $\mathbb{P}^1_k$.

Par construction, le schéma $X(K, \pi)$ est fini normal sur $\mathbb{P}^1_k$: c'est donc une courbe algébrique propre normale. De plus, son corps des fonctions est K. On a donc montré que κ est essentiellement surjectif.

Pour la fin de la preuve, on renvoie à [**Har77**, §6]). □

V.2. Théorème de Riemann-Roch (courbes)

V.2.a. Systèmes linéaires complets. —

Définition V.2.1. — Soit X un schéma noethérien et $D = \sum_{i \in I} n_i.x_i$ un diviseur algébrique de X.

- On dit que D est est effectif si pour tout $i \in I$, $n_i \geq 0$.
- Étant donnés deux diviseurs algébriques D et D' de X, on définit une relation d'ordre :

  $$D \geq D'$$

  si $D - D'$ est effectif.
- On définit le système linaire complet associé à D comme l'ensemble :

  $$|D| = \{D' \in Z^1(X) | D' \geq 0, D' \sim D\}$$

  des diviseurs algébriques effectifs rationnellement équivalents à D.

Exemple V.2.2. — Soit X un schéma intègre de corps des fonctions K, f une fonction méromorphe non nulle sur X : $f \in K^\times$.

Alors le diviseur algébrique $\operatorname{div}(f)$ est effectif si et seulement si f est une fonction globale sur X *i.e.* $f \in \mathcal{O}_X(X)$. (en effet, par définition, $\operatorname{div}(f) \geq 0$ si et seulement si en tous points x de X, $\operatorname{ord}_x(f) \geq 0$: f n'a pas de pôles en x. Cela équivaut à dire : $f \in \mathcal{O}_{X,x}$.)

V.2.3. — Fixons un schéma normal X et un faisceau inversible $\mathcal{L}$.

Soit $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ une section globale non nulle de $\mathcal{L}$. Considérons un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X et pour tout indice $i \in I$, une trivialisation $\varphi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|_{U_i}$.

Alors, pour tout indice $i \in I$, on pose :

$$\pi_i = \varphi_i)_{U_i}(s|_{U_i}) \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X).$$

On peut dès lors effectuer la même construction que dans le paragraphe IV.5.3 : pour tout couple d'indices (i, j), $\pi_i \pi_j^{-1}$ est une fonction inversible sur l'ouvert $U_{ij} = U_i \cap U_j$, donc en particulier :

$$\operatorname{div}_{U_{ij}}(\pi_i) - \operatorname{div}_{U_{ij}}(\pi_j) = \operatorname{div}_{U_{ij}}(\pi_i \pi_j^{-1}) = 0.$$

Il en résulte que les cycles $\operatorname{div}(\pi_i)$, vu dans X, se recollent et définissent un cycle algébrique $\operatorname{div}(\mathcal{L}, s)$. [2] On vérifie facilement que ce diviseur ne dépend pas de la trivialisation choisie de $\mathcal{L}$.

Par construction, $\operatorname{div}(\mathcal{L}, s)$ est effectif.

Proposition V.2.4. — *Soit X un schéma localement factoriel de corps des fonctions K et D un diviseur algébrique sur X.*

- *Pour toute section non nulle $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D))$, le diviseur $\operatorname{div}(\mathcal{L}(D), s)$ est rationnellement équivalent à D.*
- *Considérons des sections non nulle $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D))$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
  (i) $\operatorname{div}(\mathcal{L}, s) = \operatorname{div}(\mathcal{L}, s')$.
  (ii) *il existe $\lambda \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$ tel que $s = \lambda.s'$.*
- *Le morphisme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \big(\Gamma(X, \mathcal{L}(D)) - \{0\}\big)/\Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) & \to & |D| \\ s & \mapsto & \operatorname{div}(\mathcal{L}, s) \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. — On reprend les notations du paragraphe IV.5.8 pour la définition du faisceau inversible $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}'(-D)$: d'où un recouvrement ouvert $(U_x)_{x \in X}$ de U et des éléments $f_x \in K^\times$ tels que :

1. $D \cap U_x = -\operatorname{div}(f_x)$.
2. $\mathcal{L}(D)|_{U_x} = \mathcal{O}_X|_{U_x}.f_x \subset K_{U_x}$.

On en déduit donc pour tout $x \in X$ une trivialisation

$$\varphi_x : \mathcal{L}(D)|_{U_x} \to \mathcal{O}_X|_{U_x}, a \mapsto a.f_x^{-1}.$$

Notons que par construction, on dispose d'un monomorphisme :

$$\nu : \mathcal{L} \to K_X$$

Si maintenant s est une section globale non nulle de $\mathcal{L}(D)$, on pose :

3 $f(s) = \nu_X(s) \in K^\times$.

4 pour tout $x \in X$, $\pi_x(s) = \varphi_x)_{U_x}(s|_{U_x}) \in \Gamma(U_x, \mathcal{O}_X)$.

D'après la construction qui précède : $\operatorname{div}(\mathcal{L}, s) \cap U_x = \operatorname{div}(\pi_x(s))$.

Considérons le premier point. D'après les points 2, 3, 4 ci-dessus, on obtient : $\pi_x(s) = f(s) f_x^{-1}$. En particulier,

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}, s) \cap U_x = \operatorname{div}(\pi_x(s)) = \operatorname{div}(f(s)) - \operatorname{div}(f_x) = \operatorname{div}(f(s)) + (D \cap U_x).$$

Comme (U_x) est un recouvrement ouvert de U, on en déduit par définition de l'équivalence rationnelle : $\operatorname{div}(\mathcal{L}, s) \sim D$.

Considérons le deuxième point. Alors $\operatorname{div}(\mathcal{L}, s) = \operatorname{div}(\mathcal{L}, s')$ équivaut à dire que pour tout $x \in X$,

$$\operatorname{div}(\pi_x(s)) = \operatorname{div}(\pi_x(s'))$$

ce qui équivaut à dire que la fonction méromorphe :

$$\pi_x(s)\pi_x(s')^{-1} = f(s)f(s')^{-1}.$$

---

2. Comme dans le paragraphe IV.5.3, on a la formule :

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}, s) = \sum_{x \in X^{(1)}} v_x(\pi_i).x$$

où v_x est la valuation associé à x et $i \in I$ est un indice quelconque tel que $x \in U_i$.

n'a pas de zéro ni de pôle en x. Comme ceci est valable en tout point x de X, on en déduit : $f(s)f(s)^{-1} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$.

Pour démontrer le dernier point, il suffit de voir que tout élément du système linéaire complet $|D|$ est de la forme $\operatorname{div}(\mathcal{L}, s)$ pour une section globale non nulle s de $\mathcal{L}$.

Fixons donc un diviseur $D' \geq 0$ rationnellement équivalent à D : $D - D' = \operatorname{div}(f)$ pour une fonction méromorphe non nulle $f \in K^\times$. Autrement dit $\operatorname{div}(f) \geq -D$. On en déduit facilement que les fonctions méromorphe ff_x^{-1} définissent une section globale de $\mathcal{L}$ dont le diviseur est égal à D. □

V.2.5. — Rappelons que d'après le [Th. 3] du paragraphe III.1.14, pour tout k-schéma propre X et tout fibré inversible $\mathcal{L}$ sur X, le k-espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{L})$ est de dimension finie. Pour tout diviseur algébrique D sur X, on pose :

$$l(D) = \dim_k \big(\Gamma(X, \mathcal{L}(D))\big). \tag{V.1}$$

La proposition précédente admet alors le corollaire suivant :

Corollaire V.2.6. — *Soit X est un k-schéma propre, localement factoriel et géométriquement irréductible.*

L'application $s \mapsto \operatorname{div}(\mathcal{L}, s)$ établit une bijection

$$(\Gamma(X, \mathcal{L}) - \{0\})/k^\times \xrightarrow{\sim} |D|.$$

En particulier, ou bien le système linéaire $|D|$ est vide, auquel cas $l(D) = 0$, ou bien il admet une structure d'espace projectif sur k de dimension $l(D) - 1$.

Cela résulte de la proposition précédente et du fait que les hypothèses sur X entraînent : $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ (voir Proposition III.1.25).

Corollaire V.2.7. — *Soit X un k-schéma propre, localement factoriel et géométriquement intègre, et D un diviseur algébrique sur X.*

1. *Si $\deg(D) < 0$, alors $l(D) = 0$ et $|D| = \emptyset$.*
2. *Si $l(D) > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (i) $\deg(D) = 0$.
   (ii) $D \sim 0$.
   (iii) $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{O}_X$.

Démonstration. — Pour le premier point, si $[D| \neq \emptyset$, D est équivalent à un diviseur effectif qui est nécessairement de degré positif. L'affirmation résulte donc du corollaire précédent et de l'invariance du degré par équivalence rationnelle (Corollaire IV.4.8).

Pour le deuxième point : l'équivalence entre (ii) et (iii) résulte de l'isomorphisme entre faisceaux inversibles et classe de diviseurs sur X (Théorème IV.5.9) ; l'équivalence entre (i) et (ii) résulte du fait qu'un diviseur effectif est de degré 0 si et seulement si il est nul. □

Remarque V.2.8. — Rappelons qu'un k-schéma lisse est localement factoriel. La proposition précédente et ses deux corollaires sont souvent énoncés dans le cas d'un corps algébriquement clos k pour un k-schéma X propre et lisse.

V.2.b. Enoncé et preuve. — Pour la preuve du théorème de Riemann-Roch, on utilisera les faisceaux gratte-ciel :

Lemme V.2.9. — *Soit X un schéma, x un point de X et G un groupe abélien. Posons : $Z = \overline{\{x\}}$ et notons : $i_x : Z \to X$ l'immersion canonique, G_Z le faisceau constant de groupe G sur Z.*

Alors, le faisceau $i_{x*}(G_Z)$ est l'unique faisceau abélien F sur X vérifiant les conditions suivantes :

$$\forall y \in X, F_y = \begin{cases} G & \textit{si } y \in Z(x), \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Par définition, le faisceau $i_{x*}(G_Z)$ est définit par la formule suivante :

$$F : (U \subset X) \mapsto \begin{cases} G & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette formule montre immédiatement les conditions attendues sur $i_{x*}(G_X)$.

Unicité : soit F un faisceau vérifiant les conditions de l'énoncé. Considérons l'immersion fermée canonique : $i_x : Z(x) \to X$. Alors, le fibre de $i_x^{-1}(F)$ en tous points de Z est G. Il en résulte que ce faisceau est isomorphisme au faisceau constant : il existe un isomorphisme :

$$i_x^{-1}(F) \xrightarrow{\sim} G_Z$$

qui induit donc un morphisme :

$$F \to i_{x*}(G_Z).$$

Calculant la fibre de ce morphisme en tous points de X, et appliquant la propriété vérifiée par F, on obtient le résultat attendu. $\square$

Définition V.2.10. — Sous les conditions de l'énoncé, le faisceau $i_{x*}(G)$ est appelé le faisceau gratte-ciel au point x de X associé au groupe G.

Remarque V.2.11. — Reprenons les hypothèses et notations du lemme précédent.

Il est facile de voir que la résolution de Godement associée à $i_{x*}(G)$ prend la forme suivante :

$$0 \to i_{x*}(G) \to (F \xrightarrow{1_F} F \xrightarrow{1_F} \cdots)$$

où F est le faisceau $(U \subset X) \mapsto \prod_{y \in (Z \cap U)} G$. On en déduit donc :

$$H^i(X, i_{x*}(G)) = \begin{cases} G & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme V.2.12. — *Soit X un schéma et x un point fermé de X de corps résiduel $\kappa(x)$. On pose $Z = \{x\}$ et on note $i_x : Z \to X$ l'immersion canonique. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Le faisceau $i_{x*}(\mathcal{O}_Z)$ est le faisceau gratte-ciel en x associé au groupe $\kappa(x)$.*
2. *Le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_X$ associé au fermé Z est défini par la suite exacte courte :*

$$0 \to \mathcal{I}_x \to \mathcal{O}_X \to i_{x*}(\mathcal{O}_Z) \to 0. \tag{V.2}$$

3. *Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$, le faisceau $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} i_{x*}(\mathcal{O}_Z)$ est le faisceau gratte-ciel en x associé au groupe $\kappa(x)$.*

Démonstration. — Les deux premières propriétés sont évidentes. La troisième résulte du fait que pour tout point $y \in X$,

$$(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} i_*(\mathcal{O}_Z))_y = \mathcal{L}_y \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} (i_*(\mathcal{O}_Z))_y \simeq \mathcal{O}_{X,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} (i_*(\mathcal{O}_Z))_y = (i_*(\mathcal{O}_Z))_y$$

et de la propriété d'unicité du faisceau gratte-ciel $(i_*(\mathcal{O}_Z))_y$ – Lemme V.2.9. $\square$

V.2.13. — Soit X une courbe algébrique propre, lisse et géométriquement intègre sur k.

Le faisceau inversible canonique ω_X sur X (autrement dit le faisceau des formes différentielles sur X – Exemple II.2.6) défini la classe d'un diviseur algébrique :

$$K_X = \alpha_X(\omega_X) \tag{V.3}$$

suivant l'équivalence $\alpha_X : \mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{CH}^1(X)$ (Théorème IV.5.9).

Théorème V.2.14. — *Considérons les notations qui précèdent et soit g le genre de la courbe algébrique X.*

Alors, pour tout diveiseur algébrique D sur X, l'égalité suivante est vérifiée :

$$l(D) - l(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Le preuve qui suit est due à Hartshorne, [**Har77**, IV, Th. 1.3].

Démonstration. — Par définition, $l(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D))$. Le théorème de dualité de Serre montre que :

$$H^1(X, \mathcal{L}(D))^\vee = H^0(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}(D)^\vee) = H^0(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}(-D)^\vee).$$

On en déduit en particulier : $\dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D)) = l(K_X - D)$. On est donc ramené à montrer l'égalité :

$$\mathscr{P}(D) : \chi(X, \mathcal{L}(D)) = \deg(D) + 1 - g.$$

Dans le cas où $D = 0$, $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}_X$ et la formule résulte de l'exemple III.1.26, formule III.6.

On peut alors terminer la preuve par induction, du fait que tout diviseur est obtenu en ajoutant ou soustrayant un nombre fini de points fermés de X : il suffit de montrer que pour tout point fermé x de X, la formule $\mathscr{P}(D)$ est vraie si et seulement si la formule $\mathscr{P}(D + x)$ est vraie.

Fixons donc un point fermé x de X, de corps résiduel $\kappa(x)$. Soit d le degré de $\kappa(x)/k$. Par définition du degré, $\deg(D + x) = \deg(D) + d$. Pour montrer l'équivalence attendue, il suffit donc de montrer que :

$$\chi(X, \mathcal{L}(D + x)) = \chi(X, \mathcal{L}(D)) + d. \tag{V.4}$$

Reprenons les notations du lemme V.2.12. D'après l'exemple IV.5.12 le faisceau d'idéaux associés au point fermé x de X est isomorphe à $\mathcal{L}(-x)$. Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{L}(D + x)$ est inversible, donc plat. D'après le point (3) du lemme V.2.12, on obtient : $i_{x*}(\mathcal{O}_Z) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D + x) \simeq i_{x*}(\mathcal{O}_Z)$.

Appliquant ces trois faits à la suite exacte courte (V.2) de $\mathcal{O}_X$-modules tensorisée par $\mathcal{L}(D+x)$, on obtient donc la suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{L}(D) \to \mathcal{L}(D + x) \to i_{x*}(\mathcal{O}_Z) \to 0.$$

Par additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré (Exemple III.1.18), on en déduit :

$$\chi(X, \mathcal{L}(D + x) = \chi(X, \mathcal{L}(D)) + \chi(X, i_{x*}(\mathcal{O}_Z))$$

La formule (V.4) en résulte, compte tenu de la remarque V.2.11. □

V.2.c. Applications. —

V.2.15. — Soit X une courbe algébrique propre, lisse et géométriquement intègre, g son genre et K sont diviseur canonique.

1. Riemann a d'abord démontré [(3)] l'inégalité suivante :

$$l(D) \geq \deg(D) + 1 - g.$$

3. Riemann, B. (1857) "Theorie der Abelschen Funktionen", Journal für die reine und angewandte Mathematik, 54 : 115-155.

La formule de Riemann-Roch, qui calcule le terme correctif $l(D) - \deg(D) - 1 + g$ a été établi par Roch, ancien élève de Riemann. [4]

2. Appliquant la formule de Riemann-Roch au diviseur $D = 0$, on obtient :
$$\deg(K_X) = 2g - 2.$$
Il suffit de noter que : $l(0) = 1$, $l(K_X) = g$ (relation (III.5)).

3. Soit D un diviseur algébrique tel que $\deg(D) > 2g - 2$. Alors, $\deg(K_X - D) > 0$, donc $l(K_X - D) = 0$. On obtient dans ce cas l'égalité :
$$l(D) = \deg(D) + 1 - g.$$
En particulier, pour tout diviseur algébrique D et tout entier $n > 0$,
   - si $\deg(D) < 0$, $|nD| = \varnothing$,
   - si $\deg(D) = 0$, $\begin{cases} |nD| = \varnothing & \text{si } nD \nsim 0, \\ l(nD) = 1 & \text{sinon,} \end{cases}$
   - si $\deg(D) > 0$: $l(nD) = n.\deg(D) + 1 - g$ pour n suffisamment grand

Proposition V.2.16. — *Soit X courbe algébrique propre, lisse et géométriquement intègre est rationnelle.*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *la courbe X est de genre* 0.

(ii) *X isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$.*

Démonstration. — Le fait que (ii) implique (i) résulte de l'exemple III.1.23.

Réciproquement, soit x et y deux points de X. On considère le diviseur $D = x - y$. Alors,
$$\deg(K_X - D) = \deg(K_X) = -2.$$
D'après le dernier point de l'exemple précédent, on en déduit : $l(K_X - D) = 0$. La formule de Riemann-Roch implique donc $l(D) = 1$. Comme $\deg(D) = 0$, le dernier point de l'exemple précédent implique que D est rationnellement équivalent à 0 : il existe donc une fonction rationnelle f sur X telle que $\operatorname{div}(f) = x - y$.

La fonction $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ qui s'en déduit est finie surjective (Proposition IV.3.12). C'est aussi un morphisme plat d'après V.1.5.

De plus, $f^{-1}(0) = \{x\}$ ce qui implique que f est de degré 0. L'exemple V.1.8 montre que f est un isomorphisme. □

Définition V.2.17. — Une courbe algébrique satisfaisant les propriétés équivalentes qui précédent est dite *rationnelle*.

V.3. Courbes elliptiques

V.3.a. Structure de groupe abélien. —

V.3.1. — Soit E une courbe algébrique propre, lisse géométriquement intègre. Rappelons que nous avons donné une définition préliminaire de la jacobienne de E/k (Définition IV.5.14) comme le groupe abélien des classes de diviseurs de degré 0 :
$$\operatorname{Pic}^0(E) = \operatorname{Ker}\big(\deg : \operatorname{Pic}(E) \to \mathbb{Z}\big).$$
Voici une nouvelle conséquence du théorème de Riemann-Roch.

4. Roch, G., (1865) "Ueber die Anzahl der willkurlichen Constanten in algebraischen Functionen" Journal für die reine und angewandte Mathematik, 64 : 372-376.

Proposition V.3.2. — *Soit E une courbe algébrique propre, lisse, géométriquement intègre de genre $g = 1$ et e un point rationnel de E.*

Alors, l'application suivante :

$$E(k) \to \mathrm{Pic}^0(E), x \mapsto \mathcal{L}(x - e)$$

est une bijection.

Démonstration. — Soit D un diviseur algébrique de degré 0 sur X. On applique la formule de Riemann-Roch au diviseur $D + e$. Or $\deg(D + e) = 1 > 2g - 2 = 0$. La formule de Riemann-Roch se réécrit donc suivant le dernier point de V.2.15 :

$$l(D + e) = \deg(D + e) + g - 1 = 1.$$

Autrement dit, il existe un unique diviseur algébrique effectif D' rationnellement équivalent à $D + e$. Comme D' est nécessairement de degré 1, on peut reformuler la proposition précédente en disant qu'il existe un unique point rationnel x de X tel que $D + e \sim x$, ce qui conclut. □

Remarque V.3.3. — Nous verrons dans le cours suivant que la structure de groupes sur les points rationnels de E/k correspond en fait à une structure de schémas en groupes sur E.

Références

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

---

premier semestre 2013

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`